1. Si descriva il sistema:

$$
S: \begin{cases} \dot{x}_1(t) = 5\, x_1(t) - 8\, u_1(t) + u_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = 2\, x_1(t) + x_2(t) + 0.5\, u_2(t) \\ \dot{x}_3(t) = 4\, x_2(t) - 5\, x_3(t) + 12\, u_1(t) - 0.1\, u_2(t) \\ y(t) = x_1^2(t) + 4\, x_2(t) - 6\, u_1(t) \end{cases}
$$

in forma compatta usando la notazione vettoriale. Si dica se S è dinamico o non dinamico, lineare o non lineare, variante o invariante nel tempo. Si determini, infine, un punto di lavoro o una condizione di equilibrio di S corrispondente all'ingresso costante $u_1(t) = 0$, $u_2(t) = -10$.

Sia: $x := |x_1 \quad x_2 \quad x_3|'$, $u := |u_1 \quad u_2|'$,

$$
A := \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0.5 \\ 0 & 4 & -5 \end{bmatrix} \quad , \qquad B := \begin{bmatrix} -8 & 1 \\ 0 & 0.5 \\ 12 & -0.1 \end{bmatrix}
$$

$f(x, u) := A\, x + B\, u$, $\qquad g(x, u) := x_1^2 + 4\, x_2 - 6\, u_1$

allora

$$
S: \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases} .
$$

Il sistema S è dinamico, non lineare, tempo-invariante. Gli stati di equilibrio corrispondenti a $\bar{u} := |0 \quad -10|'$ sono le soluzioni dell'equazione: $A\, x + B\, \bar{u} = 0$. Poiché A è non singolare, la soluzione è unica ed è data da:

$\bar{x} = - A^{-1}\, B\, \bar{u} = |2 \quad 1 \quad 1|'$.

Corrispondentemente, $\bar{y} = g(\bar{x}, \bar{u}) = 8$.

2. Con riferimento al sistema

$$\boldsymbol{S}: \quad \begin{cases} -z_1(t)\,u(t) - \sqrt{z_2(t)} + 3 = 0 \\ z_1^2(t) - z_2(t) = 0 \\ y(t) = z_1(t)\,z_2(t) \end{cases} ,$$

***a*)** si dimostri che $\bar{z} := [\bar{z}_1 \quad \bar{z}_2]' = [3 \quad 9]'$ è un punto di lavoro di S corrispondente all'ingresso costante $u(t) = \bar{u} = 0$;

Infatti:

$$-\bar{z}_1\,\bar{u} - \sqrt{\bar{z}_2} + 3 = 0$$
$$\bar{z}_1^{\,2} - \bar{z}_2 = 0$$

***b*)** si determini il modello lineare δS tangente a S nel punto di lavoro indicato in (a);

Sia: $\delta u := u - \bar{u}$, $\delta z := z - \bar{z}$, $\delta y := y - \bar{y}$; allora:

$$\boldsymbol{\delta S}: \begin{cases} M\,\delta z(t) + N\,\delta u(t) = 0 \\ \delta y(t) = P\,\delta z(t) + Q\,\delta u(t) \end{cases}$$

dove :

$$M = \begin{bmatrix} -\bar{u} & -\dfrac{1}{2\sqrt{\bar{z}_2}} \\ 2\,\bar{z}_1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1/6 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} , \quad N = \begin{bmatrix} -\bar{z}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P = [\,\bar{z}_2 \quad \bar{z}_1\,] = [\,9 \quad 3\,] , \quad Q = 0 .$$

3. Si spieghi:

a) che cosa s'intende per funzione di trasferimento di un sistema *S* (lineare, tempo-invariante, a un ingresso e un'uscita);

La funzione di trasferimento da un ingresso a un'uscita è quella funzione della variabile complessa *s* che, moltiplicata per la trasformata di Laplace dell'ingresso, dà la trasformata di Laplace dell'effetto prodotto dall'ingresso sull'uscita.

b) perché la funzione di trasferimento di un sistema (lineare, tempo-invariante, a un ingresso e un'uscita) dinamico in senso proprio è una funzione razionale propria.

Sia (A, B, C) la terna di matrici che descrive un sistema *S* lineare, tempo-invariante, a un ingresso e un'uscita, dinamico in senso proprio, di ordine *n*. La funzione di trasferimento di *S* è data da:

$$G(s) = C\,(s\,I - A)^{-1}\,B = \frac{1}{det(s\,I - A)}\,C\,(s\,I - A)^{*}\,B$$

dove con l'asterisco s'è indicata l'aggiunta. Ma, per definizione, ogni elemento della matrice $(s\,I - A)^{*}$ e quindi anche $C\,(s\,I - A)^{*}\,B$ è un polinomio di grado non superiore a n-1, mentre $det(s\,I - A)$ è un polinomio di grado *n*. Quindi, $G(s)$ è una funzione razionale propria.

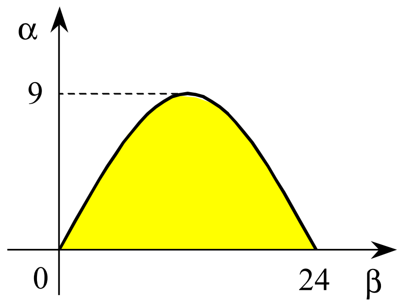
4. Sia A la matrice dinamica di un sistema S (lineare, tempo-invariante) e sia

$$p(s;\, \alpha, \beta) := s^4 + 4\, s^3 + 6\, s^2 + \beta\, s + \alpha$$

il polinomio caratteristico di A.

a) Si determini, nel piano (α, β), la regione di asintotica stabilità di S;

$$\begin{array}{ccc}
1 & 6 & \alpha \\[6pt]
4 & \beta & 0 \\[6pt]
6 - 0.25\,\beta & \alpha & \\[6pt]
\dfrac{6\,\beta - 0.25\,\beta^2 - 4\,\alpha}{6 - 0.25\,\beta} & 0 & \\[6pt]
\alpha & &
\end{array}$$



La regione cercata è data da: $\beta < 24$, $0 < \alpha < 1.5\,\beta - 0.0625\,\beta^2$.

b) si dica, motivando la risposta, se nel rettangolo

$$Q = \{ (\alpha, \beta) : \quad 0.5 \le \alpha \le 2 \quad , \quad 3 \le \beta \le 6 \}$$

esiste almeno un punto in corrispondenza del quale il sistema S risulti asintoticamente stabile;

E' facile riconoscere che (con α in ordinate e β in ascisse) almeno lo spigolo inferiore destro di Q ($\alpha = 0.5$, $\beta = 6$) appartiene alla regione di asintotica stabilità. Per altro, $p(s;\, 1, 4) = (s + 1)^4$. Quindi anche il punto ($\alpha = 1$, $\beta = 4$) di Q appartiene alla regione di asintotica stabilità.

c) si scrivano i quattro polinomi di Kharitonov relativi al rettangolo Q del precedente punto (β) (i quattro polinomi, cioè, che consentono di verificare se S sia o meno asintoticamente stabile in modo robusto relativamente a Q).

$p_1(s) = s^4 + 4\, s^3 + 6\, s^2 + 3\, s + 2$
$p_2(s) = s^4 + 4\, s^3 + 6\, s^2 + 6\, s + 2$
$p_3(s) = s^4 + 4\, s^3 + 6\, s^2 + 3\, s + 0.5$
$p_4(s) = s^4 + 4\, s^3 + 6\, s^2 + 6\, s + 0.5$

5. Con riferimento al sistema:

$$
\boldsymbol{S}:\ \begin{cases} \dot{x}_1(t) = 5\,x_1(t)\,u(t) - 10\,x_2(t) \\[2ex] \dot{x}_2(t) = x_1(t)\,x_2(t) + 4\,x_2(t) + 2 \\[2ex] y(t) = \sqrt{x_2(t)\,u(t)} \end{cases}
$$

si determini uno stato di equilibrio corrispondente all'ingresso $u(t) = \bar{u} = 1$ e se ne discuta la stabilità.

Gli stati di equilibrio di S corrispondenti a $\bar{u}$ sono le soluzioni di:

$$
\begin{cases} 5\,x_1 - 10\,x_2 = 0 \\[2ex] x_1\,x_2 + 4\,x_2 + 2 = 0 \end{cases}
$$

cioè: $\bar{x}_1 = -2$, $\bar{x}_2 = -1$.

La matrice dinamica A del sistema lineare tangente a S nel punto di equilibrio trovato è data da:

$$
A = \begin{bmatrix} 5\,\bar{u} & -10 \\[2ex] \bar{x}_2 & \bar{x}_1 + 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -10 \\[2ex] -1 & 2 \end{bmatrix}; \qquad det(s\,I - A) = s^2 - 7\,s = s\,(s-7)\,.
$$

Poiché un autovalore di A ha parte reale positiva, lo stato di equilibrio in esame è instabile.

6. Si faccia una realizzazione della funzione di trasferimento:

$$
G(s) = \frac{10\,(s+7)}{(s-1)(s^2 + 0.8\,s + 4)}\,.
$$

Indicando con $b(s) = 10\,s + 70$ il numeratore e con $a(s) = s^3 - 0.2\,s^2 + 3.2\,s - 4$ il denominatore di $G(s)$, una sua realizzazione (in forma ingresso-uscita) è data da:

$$
y^{(3)}(t) - 0.2\,y^{(2)}(t) + 3.2\,y^{(1)}(t) - 4\,y(t) = 10\,u^{(1)}(t) + 70\,u(t)
$$

dove, per ogni variabile v, $v^{(h)}(\cdot)$ indica la derivata h-esima di $v(\cdot)$.