1. Si descriva il sistema:

$$S: \quad \begin{cases} 5\, z_1(t) - 8\, u_1(t) + u_2(t) = 0 \\ 2\, z_1(t) + z_2(t) + 0.5\, u_2(t) = 0 \\ 4\, z_2(t) - 5\, z_3(t) + 12\, u_1(t) - 0.1\, u_2(t) = 0 \\ y(t) = z_1^2(t) + 4\, z_2(t) - 6\, u_1(t) \end{cases}$$

in forma compatta usando la notazione vettoriale. Si dica se S è dinamico o non dinamico, lineare o non lineare, variante o invariante nel tempo. Si determini, infine, un punto di lavoro di S corrispondente all'ingresso costante $u_1(t) = 0$, $u_2(t) = -10$.

Sia: $u := |\, u_1 \quad u_2 \,|'$, $z := |\, z_1 \quad z_2 \quad z_3 \,|'$, $\varphi(z, u) := |\, \varphi_1(z, u) \quad \varphi_2(z, u) \quad \varphi_3(z, u) \,|'$, $\varphi_1(z, u) := 5\, z_1 - 8\, u_1 + u_2$, $\varphi_2(z, u) := 2\, z_1 + z_2 + 0.5\, u_2$, $\varphi_3(z, u) := 4\, z_2 - 5\, z_3 + 12\, u_1 - 0.1\, u_2$, $\psi(z, u) := z_1^2 + 4\, z_2 - 6\, u_1$. *Allora,*

$$S: \quad \begin{cases} \varphi(z(t), u(t)) = 0 \\ y(t) = \psi(z(t), u(t)) \end{cases}$$

Il sistema S è non dinamico, non lineare e invariante nel tempo. Infine, se $\bar{u}_1 = 0$ *e* $\bar{u}_2 = -10$*, allora:*

$$5\, z_1 - 8\, \bar{u}_1 + \bar{u}_2 = 0 \iff 5\, z_1 - 10 = 0 \iff \bar{z}_1 = 2$$

$$2\, z_1 + z_2 + 0.5\, \bar{u}_2 = 0 \iff 4 + z_2 - 5 = 0 \iff \bar{z}_2 = 1$$

$$4\, z_2 - 5\, z_3 + 12\, \bar{u}_1 - 0.1\, \bar{u}_2 \iff 4 - 5\, z_3 + 1 = 0 \iff \bar{z}_3 = 1$$

$$\bar{y} = \psi(\bar{z}, \bar{u}) := \bar{z}_1^2 + 4\, \bar{z}_2 - 6\, \bar{u}_1 = 8.$$

2. Con riferimento al sistema

$$S: \quad \begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\,x_1(t)\,u(t) - \sqrt{x_2(t)} + 3 \\ \dot{x}_2(t) = x_1^2(t) - x_2(t) \\ y(t) = x_1(t)\,x_2(t) \end{cases} \quad ,$$

***a*)** si dica se $|\,3 \quad 9|'$, $|\,-3 \quad 9|'$ o $|\,3 \quad -9|'$ sono stati di equilibrio di S corrispondenti all'ingresso costante $u(t) = 0$;

Sia: $f_1(x, u) := -\,x_1\,u - \sqrt{x_2} + 3$, $f_2(x, u) := x_1^2 - x_2$, $f(x, u) := |\,f_1(x, u) \quad f_2(x, u)\,|'$. *Allora:*

$$f(|\,3 \quad 9|', 0) = 0 \quad , \quad f(|-3 \quad 9|', 0) = 0 \quad , \quad f(|\,3 \quad -9|', 0) \neq 0$$

quindi, solo i primi due sono stati di equilibrio di S *corrispondenti a* $u(t) = 0$.

***b*)** si determini il modello lineare δS tangente a S in una condizione di equilibrio corrispondente all'ingresso costante $u(t) = 0$;

Naturalmente:

$$\delta S: \quad \begin{cases} \delta\dot{x}(t) = A\,\delta x(t) + B\,\delta u(t) \\ \delta y(t) = C\,\delta x(t) + D\,\delta u(t) \end{cases}$$

dove:

$$A := \frac{\partial f}{\partial x}(|\,3 \quad 9|', 0) = \begin{bmatrix} 0 & -1/6 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad B := \frac{\partial f}{\partial u}(|\,3 \quad 9|', 0) = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$g(x, u) := x_1\,x_2$,

$$C := \frac{\partial g}{\partial x}(|\,3 \quad 9|', 0) = [\,9 \quad 3\,] \quad , \quad D := \frac{\partial g}{\partial u}(|\,3 \quad 9|', 0) = 0 \quad .$$

c*)** si discuta, motivando attentamente la risposta, la stabilità dello stato di equilibrio di S considerato al punto (b***).

Gli autovalori della matrice dinamica A *di* δS *sono:* $\lambda_{1,2} = -\,0.5 \pm j\,0.866$. *Quindi, si può affermare che* $x = |\,3 \quad 9|'$ *è uno stato di equilibrio asintoticamente stabile di* S.

3. Si dica, a parole,

a) in che cosa consiste il metodo di Heaviside;

E' un metodo per l'antitrasformazione di segnali a trasformata razionale. Consiste nello sviluppare la trasformata del segnale in somma di trasformate elementari, di ognuna delle quali si conosce l'antitrasformata. Per la linearità della trasformazione, il segnale è dato dalla somma delle antitrasformate elementari.

b) che cosa sono i poli dominanti (di un segnale a trasformata razionale).

Sono i poli a parte reale negativa, senza zeri nelle immediate vicinanze, più prossimi all'asse immaginario. La loro parte reale determina la "durata" della componente transitoria.

4. Sia A la matrice dinamica di un sistema S (lineare, tempo-invariante) e sia

$$p(s;\, a,\, b) := s^3 + a\, s^2 + b\, s\, + 1$$

il polinomio caratteristico di A. Si determini, nel piano (a, b), la regione di asintotica stabilità di S. Si dica, quindi, se nel cerchio di raggio unitario e centro l'origine ($a^2 + b^2 \leq 1$) esistano valori di a e di b tali da rendere S asintoticamente stabile.

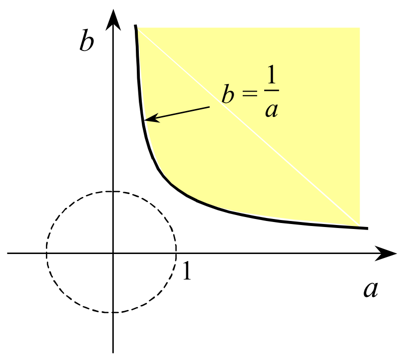
Applicando il criterio di Routh, si riconosce immediatamente che S *è asintoticamente stabile se e solo se:*

$$\begin{array}{cc} 1 & b \\ a & 1 \\ \dfrac{a\,b - 1}{a} & 0 \\ 1 & \end{array}$$

$a > 0$ *e* $a\,b - 1 > 0$;

cioè se e solo se: $a > 0$ *e* $b > 1/a$.

Pertanto, nel cerchio unitario di centro l'origine non ci sono valori di a *e di* b *tali da rendere* S *asintoticamente stabile.*



5. Si dica, giustificando la risposta, se il sistema dinamico S descritto dalle matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -150 & 15 & -1 & -7 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 25 & 10 & 1 & 0 \end{bmatrix} \;, \quad D = 0 \;,$$

è stabilizzabile. Si dica inoltre, sempre giustificando la risposta, se la conclusione sarebbe stata diversa nel caso $D = 1$.

Il sistema è in forma canonica di controllo; quindi, se $D = 1$, *la funzione di trasferimento di* S *è data da:*

$$G(s) = \frac{s^2 + 10\,s + 25}{s^4 + 7\,s^3 + s^2 - 15\,s + 150} = \frac{(s+5)^2}{s^4 + 7\,s^3 + s^2 - 15\,s + 150} := \frac{b(s)}{a(s)} \quad .$$

Poiché il numeratore ha due radici coincidenti in -5, *la parte cieca, se esiste (e in questo caso effettivamente esiste) non può che essere asintoticamente stabile. Quindi,* S *è stabilizzabile.*

La presenza di un legame diretto da u *a* y *non altera la parte cieca della terna* (A, B, C); *quindi, la conclusione è la stessa. D'altronde, se* $D = 1$, *si ha:* $G(s) = (a(s) + b(s))/a(s)$ *e le radici comuni a numeratore e denominatore sono tutte e sole quelle comuni a* $a(s)$ *e* $b(s)$.

6. Si faccia una realizzazione in forma ingresso-uscita della funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{10\,(s - 2)}{(s+5)(s^2 + 0.6\,s + 9)} \quad .$$

$$G(s) = \frac{10\,s - 20}{s^3 + 5.6\,s^2 + 12\,s + 45}$$

$$(s^3 + 5.6\,s^2 + 12\,s + 45)\,y(t) = (10\,s - 20)\,u(t)$$

$$y^{(3)}(t) + 5.6\,y^{(2)}(t) + 12\,y^{(1)}(t) + 45\,y(t) = 10\,u^{(1)}(t) - 20\,u(t) \quad .$$