1. Si descriva il sistema:

$$S: \begin{cases} z_1(t)\,(-4\,z_2(t) + 8\,u(t)) = 0 \\ \sqrt{z_1(t) - u(t)} - z_2(t) = 0 \\ y_1(t) = z_1^2(t) + 4\,z_2(t) \\ y_2(t) = z_2(t) \end{cases}$$

in forma compatta usando la notazione vettoriale. Si dica se S è dinamico o non dinamico, variante o invariante nel tempo. Si determini, infine, un punto di lavoro di S corrispondente all'ingresso costante $u(t) = 1$ e si dica, motivando la risposta, se tale punto di lavoro è unico.

Sia: $z := |z_1 \;\; z_2|'$, $y := |y_1 \;\; y_2|'$, $\varphi_1(z, u) := z_1(-4\,z_2 + 8\,u)$, $\varphi_2(z, u) := \sqrt{z_1 - u} - z_2$, $\psi_1(z) := z_1^2 + 4\,z_2$, $\psi_2(z) := z_2$, *e infine* $\varphi(z, u) := |\varphi_1(z, u) \quad \varphi_2(z, u)|'$, $\psi(z) := |\psi_1(z) \quad \psi_2(z)|'$. *Allora,*

$$S: \begin{cases} \varphi(z(t), u(t)) = 0 \\ y(t) = \psi(z(t)) \end{cases} .$$

S è un sistema non dinamico, tempo-invariante.

Se $u(t) = 1$, *la prima equazione presenta due alternative:* $z_1 = 0$ *oppure* $z_2 = 2$. *Nel primo caso, la seconda equazione non ha soluzioni reali. Nel secondo, ammette come unica soluzione possibile* $z_1 = 5$. *Dunque, il punto di lavoro cercato è unico ed è dato da:*

$$z(t) = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \quad , \quad y(t) = \begin{bmatrix} 33 \\ 2 \end{bmatrix} .$$

2. Con riferimento al sistema

$$
\boldsymbol{S}: \quad \begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\,x_1(t) + x_2^{\,2}(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\sqrt{x_1(t)} - x_2(t)\,u(t) \\ y(t) = x_1(t) + x_2(t)\,u(t) \end{cases} \quad ,
$$

a) si spieghi che cosa s'intende per stato di equilibrio di S corrispondente all'ingresso costante $u(t) = \bar{u}$;

Uno stato di equilibrio di S corrispondente a $u(t) = \bar{u}$ è una soluzione costante $\bar{x}$ dell'equazione di stato, sotto l'azione di quell'ingresso. In altre parole, $\bar{x}$ è uno stato iniziale di S a partire dal quale, sotto l'azione dell'ingresso costante $\bar{u}$, lo stato rimane invariato.

b) si determini il modello lineare δS tangente a S nella condizione di equilibrio $\bar{x} = |\ 9 \quad 3\ |'$, $\bar{y} = 6$, corrispondente all'ingresso costante $u(t) = -1$, specificando in dettaglio quale sia il significato delle variabili che compaiono in δS.

Come sempre:

$$
\boldsymbol{\delta S}: \quad \begin{cases} \delta\dot{x}(t) = A\,\delta x(t) + B\,\delta u(t) \\ \\ \delta y(t) = C\,\delta x(t) + D\,\delta u(t) \end{cases}
$$

dove

$$
A = \begin{bmatrix} -1 & 2\,\bar{x}_2 \\ \\ \dfrac{-1}{2\sqrt{\bar{x}_1}} & -\bar{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ \\ \dfrac{-1}{6} & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \\ -\bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \\ -3 \end{bmatrix}
$$

$$
C = \begin{bmatrix} 1 & \bar{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad D = \bar{x}_2 = 3 \quad .
$$

Quanto alle variabili di δS, $\delta x(t) := x(t) - \bar{x}$, $\delta u(t) := u(t) - \bar{u}$, $\delta y(t) := y(t) - \bar{y}$.

3. ***a***) Sia $x(\cdot)$ il movimento del sistema:

$$\boldsymbol{S}: \qquad \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad ,$$

prodotto dall'ingresso $u(\cdot)$, a partire dallo stato inziale x_0. Si spieghi che cosa significa affermare che tale movimento è stabile (nel senso di Liapunov).

Sia $x_p(\cdot)$ il movimento di S prodotto dall'ingresso $u(\cdot)$, a partire da $x_0 + \delta x_0$ e sia $\delta x(t)$ la differenza fra $x(\cdot)$ e $x_p(\cdot)$. Allora $x(\cdot)$ è un movimento stabile di S se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che $\|\delta x_0\| < \delta$ implica $\|\delta x(t)\| < \varepsilon$, per tutti i $t > 0$. A parole si può dire che $x(\cdot)$ è un movimento stabile di S se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che qualsiasi perturbazione dello stato iniziale, d'intensità inferiore a δ ma per altro arbitraria, produce un movimento perturbato $x_p(\cdot)$ la cui distanza massima da $x(\cdot)$ non eccede ε.

b) Si dica che senso ha (quando ce l'ha) la frase "*S* è un sistema stabile".

Un significato plausibile è: "tutti i movimenti di S, prodotti da qualsiasi ingresso e da qualsiasi stato iniziale, sono stabili".

4. Sia *S* un sistema dinamico lineare descritto dalla terna (A, B, C), con:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 15 & 13 & -3 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = 10 \begin{bmatrix} -q & 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

a) Si dica per quali valori di q il sistema *S* è asintoticamente stabile.

S è instabile qualunque sia il valore di q. Infatti, il polinomio caratteristico di A ha coefficienti di segno discorde, indipendentemente da q.

b) Si dica per quali dei seguenti valori di q il sistema *S* è stabilizzabile:

$$q = 3 \quad , \quad q = -1 \quad , \quad q = 1 \; .$$

S è in forma canonica di controllo. La sua funzione di trasferimento è data da:

$$G(s) = \frac{10\,(s-q)}{s^3 + 3\,s^2 - 13\,s - 15} \; .$$

Per $q = -1$ il sistema è sicuramente stabilizzabile (la eventuale cancellazione riguarderebbe un autovalore con parte reale negativa). Dei due valori positivi proposti, quello che, attribuito a s, annulla anche il denominatore è $q = 3$. Quindi, in quel caso, S non è stabilizzabile, mentre per $q = 1$ è stabilizzabile.

5. Con riferimento al sistema S descritto dallo schema a blocchi di Fig.1, si calcolino le funzioni di trasferimento $F_1(s)$ da u a y e $F_2(s)$ da w a y.

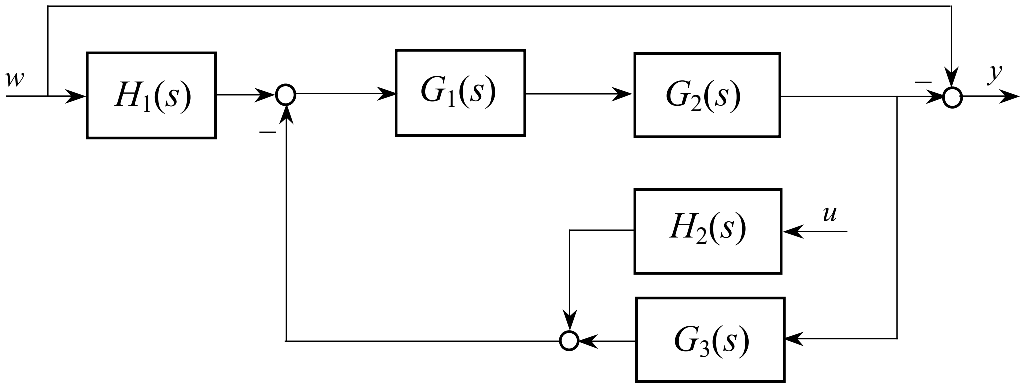
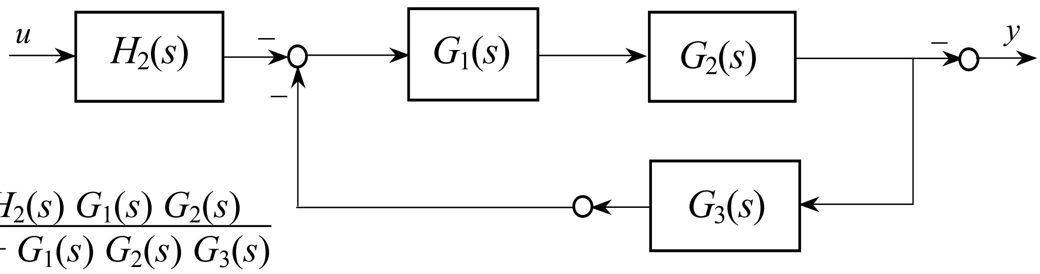


Fig. 1

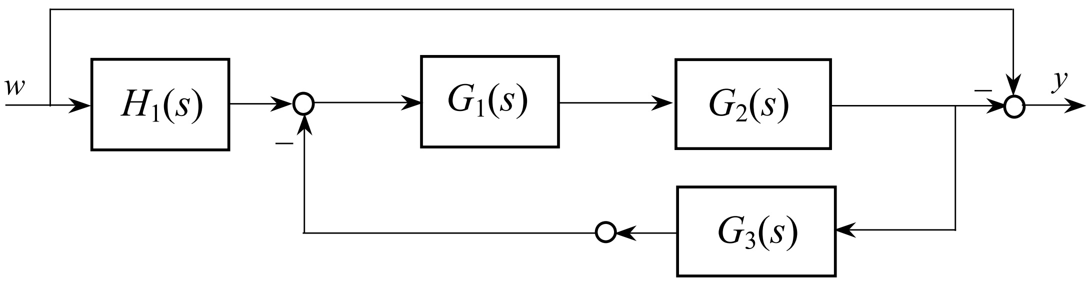
N.B.: Se necessario, si utilizzi (per la risposta) anche il retro di questo foglio.

La funzione di trasferimento da u a y non dipende dalla presenza o meno di w:



$$F_1(s) = \frac{H_2(s)\, G_1(s)\, G_2(s)}{1 + G_1(s)\, G_2(s)\, G_3(s)}$$

Analogamente, quella da w a y non dipende dalla presenza o meno di u:



$$F_2(s) = 1 - \frac{H_1(s)\, G_1(s)\, G_2(s)}{1 + G_1(s)\, G_2(s)\, G_3(s)} = \frac{1 + G_1(s)\, G_2(s)\, (G_3(s) - H_1(s))}{1 + G_1(s)\, G_2(s)\, G_3(s)}.$$

6. Si dica qual è (se esiste) la trasformata di Fourier di un segnale $v(t)$ avente trasformata di Laplace:

$$V(s) = \frac{10\,(s - 2)}{(s + 5)(s^2 + 0.6\, s + 9)} \quad \rightarrow \quad V(j\omega) = \frac{10\,(j\,\omega - 2)}{(j\,\omega + 5)(-\,\omega^2 + 0.6\, j\,\omega + 9)}.$$

infatti, tutti i poli di $V(s)$ hanno parte reale negativa.