1. Dato un modello matematico *S* di un sistema fisico *P* si spieghi con la massima precisione, concisione e chiarezza possibili:

a) che cosa significa affermare che *S* è un sistema dinamico;

Indicando con u e z, rispettivamente, le variabili indipendenti (d'ingresso) e le variabili dipendenti di S, si ha che S è un sistema dinamico se, almeno per alcuni valori di t, u(t) non è sufficiente a determinare univocamente z(t).

b) quale proprietà consente di affermare che un insieme di variabili del sistema dinamico *S* è un insieme di variabili di stato;

Si tratta di un insieme di variabili di stato se il valore assunto da tali variabili in un generico istante t_0 *unito all'andamento dell'ingresso u da* t_0 *in poi determina univocamente l'andamento da* t_0 *in poi delle variabili dipendenti z.*

c) se le variabili di stato del modello *S* sono anche, implicitamente, variabili di stato del sistema *P*.

In linea di principio, non lo sono. Infatti, ***a)*** *a seconda dei problemi presi in considerazione, il medesimo sistema fisico può essere adeguatamente descritto da modelli matematici diversi: a volte dinamici e a volte no, a volte semplicissimi a volte terribilmente complessi (una variabile può comparire in un particolare modello, ma non in altri; oppure comparire in due modelli diversi con ruoli diversi);* ***b)*** *non sempre una variabili di stato (di un particolare modello matematico) ha un "significato fisico", corrisponde cioè ad una ben identificata grandezza fisica.*

2. Con riferimento ad un assegnato sistema dinamico *S*, si dica quali elementi determinano univocamente un particolare movimento dello stato di *S*.

Ogni movimento dello stato di un assegnato sistema dinamico S, con ingresso u e vettore di stato x, è determinato dallo stato iniziale $x(t_0)$ *e dall'andamento dell'ingresso u da* t_0 *in poi.*

Nel caso in cui *S* sia lineare e tempo-invariante, con matrice dinamica *A* e matrice d'ingresso *B*, sia dica, con una formula, in che modo lo stato all'istante *t* dipende dagli elementi suddetti.

Senza ledere la generalità si può supporre $t_0=0$*; quindi (Lagrange):*

$$x(t) = e^{At}\, x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\, B\, u(\tau)\, d\tau$$

3. ***a*)** utilizzando il metodo di Heaviside, si determini il segnale $y(\cdot)$ la cui trasformata di Laplace è data da:

$$Y(s) = \frac{4\,s}{(s+1)\,(s+2)} \quad ;$$

$$Y(s) = \frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s+2)} \quad \Rightarrow \quad A = -4 \quad , \quad B = 8$$

$$y(t) = -4\, e^{-t} + 8\, e^{-2t}$$

***b*)** si dica se $y(\cdot)$ può essere interpretata come la risposta a scalino (di ampiezza unitaria) di un sistema *S* lineare tempo-invariante e, in caso affermativo, si calcoli il guadagno di *S*.

Si può interpretare come la risposta a scalino di un sistema avente funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{4\,s^2}{(s+1)\,(s+2)}$$

e quindi guadagno $\mu = 4/2 = 2$.

4. Il polinomio caratteristico $\chi_A(\cdot)$ della matrice dinamica A di un sistema lineare tempo-invariante è dato da:

$$\chi_A(s) = s^5 + 2\,s^4 + 5\,s^3 + 4\,s^2 + \alpha\,s + \beta\,.$$

a) Dire se il sistema è asintoticamente stabile nei due casi seguenti:

$(\alpha = 5, \beta = 1)$, $(\alpha = 10, \beta = 0)$.

Nel secondo caso è violata una condizione necessaria, quindi il sistema non è asintoticamente stabile. Nel primo caso (Tabella di Routh)

1	5	5
2	4	1
3	4.5	0
1	1	
1.5	0	
1		

Gli elementi della prima colonna sono non nulli e di segno concorde, quindi il sistema è asintoticamente stabile.

b) Determinare le condizioni, su α e β, che assicurano l'asintotica stabilità del sistema considerato (regione di asintotica stabilità nello spazio dei parametri).

1	5	α
2	4	β
3	$(2\,\alpha - \beta)/2$	0
$\dfrac{12 - 2\,\alpha + \beta}{3}$	β	
$\dfrac{\dfrac{(12 - 2\,\alpha + \beta)(2\,\alpha - \beta)}{6} - 3\,\beta}{\dfrac{12 - 2\,\alpha + \beta}{3}}$	0	
β		

La regione di asintotica stabilità nello spazio dei parametri è descritta da:

$12 - 2\,\alpha + \beta > 0$

$(12 - 2\,\alpha + \beta)(2\,\alpha - \beta) - 18\,\beta > 0$

$\beta > 0$

5. Si spieghi che cosa s'intende per *risposta in frequenza* di un sistema lineare, tempo-invariante, a un ingresso e un'uscita.

Se G(s) è la funzione di trasferimento del sistema, la risposta in frequenza è l'immagine attraverso G(·) del semiasse immaginario positivo; cioè:

$$\{G(j\omega):\ \omega \geq 0\}$$

6. Utilizzando le regole di elaborazione degli schemi a blocchi, si calcoli la funzione di trasferimento F^* da $c°$ a u nel sistema di Fig.1.

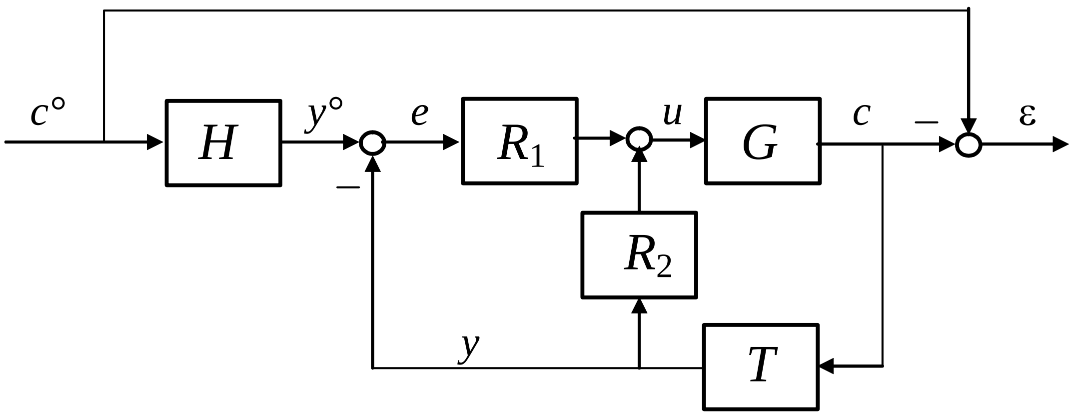
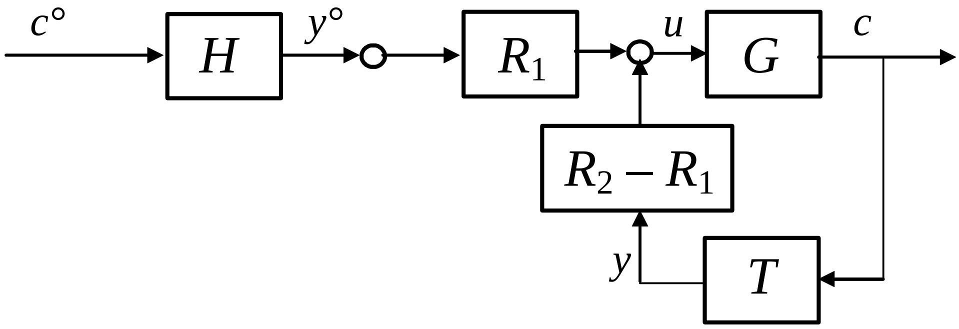
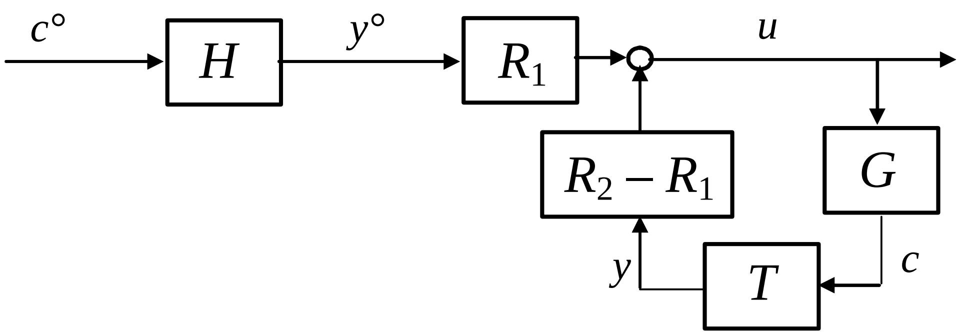


Fig. 1





$$F^* = \frac{H\,R_1}{1 - G\,T\,(R_2 - R_1)}$$