Politecnico di Milano

GUIDO O. GUARDABASSI

LEZIONI DI

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Ad uso esclusivo, personale e riservato degli studenti iscritti al corso di Fondamenti di automatica per l'automazione.

Corso di laurea in Ingegneria dell'Automazione

I N D I C E

Capitolo 1. Sistemi

Capitolo 2. Sistemi lineari tempo-invarianti: analisi nel dominio del tempo

Capitolo 3. Elementi di analisi dei segnali

Capitolo 4. Sistemi lineari tempo-invarianti: analisi nel dominio della frequenza

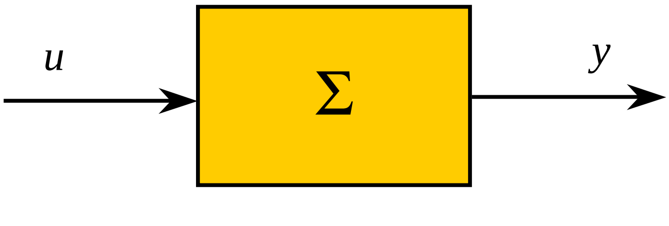
Capitolo 5. Problemi e sistemi di controllo

Capitolo 6. Sistemi di controllo lineari, tempo-invarianti, monovariabili

Capitolo 7. Sistemi lineari tempo-invarianti: progetto di massima del controllore

Capitolo 1

Sistemi



1. *Introduzione*

L'automatica riguarda il complesso insieme di attività intese a prendere decisioni razionali in un mondo mutevole e parzialmente ignoto, sulla base di informazioni disponibili e pertinenti.

Ciò comporta la necessità di approfondire un variegato ventaglio di problemi che sono o specifici dell'automatica, come quelli di controllo e supervisione, o sono comunque tali da assumere, in questo contesto, connotati e rilievo in qualche modo straordinari. Ad esempio, la ricerca e la selezione mirata di *informazioni presumibilmente utili*, nel vario e di solito non casuale fluire dei dati disponibili, costituisce di per sé un problema tecnicamente ed intellettualmente stimolante, tipico dell'automatica e strettamente connesso ad un altro problema, altrettanto affascinante, come quello di *prevedere*, con il minimo di indeterminazione possibile, l'evoluzione futura di fenomeni che ci riguardano. In entrambi i casi c'è, innanzitutto, la necessità di rappresentare adeguatamente "il fluire dei dati": la loro sorgente e i molti modi in cui possono venire trasmessi ed elaborati. Matematicamente, il fluire dei dati è rappresentato da funzioni del tempo; da funzioni, cioè, che dicono come i valori via via assunti da variabili legate al mondo fisico dipendono da una variabile ordinatrice, a volte continua, come lo scorrere della vita, a volte discreta, come il battito del cuore o il ticchettio di un pendolo, detta *tempo*. Quando è dominante, sugli altri, l'interesse per l'informazione insita nel loro andamento, le funzioni del tempo sono anche dette *segnali*. I problemi connessi alla raccolta, la rappresentazione, la trasmissione, l'interpretazione e l'elaborazione dei segnali giocano un ruolo fondamentale nelle discipline comunemente indicate come costitutive dell'ingegneria dell'informazione, vale a dire l'elettronica, l'informatica, le telecomunicazioni e, ovviamente, l'automatica. Esse sono alla base della rivoluzione tecnologica che ha segnato la seconda metà del secolo appena concluso e che probabilmente segnerà, anche se in misura ancora imprevedibile, quello appena iniziato.

Per comprendere il mondo reale, imparare a prevedere, almeno in parte, cosa ci prepara il futuro e, in particolare, quali possono essere le conseguenze delle azioni che ci competono, è necessario elaborare una rappresentazione sintetica, semplificata ma ragionevolmente attendibile, del mondo stesso. E' necessario, cioè, trovare una rappresentazione che, con riferimento al particolare e concreto problema da risolvere, isoli e descriva con accuratezza conforme alla loro rilevanza solo gli aspetti che contano: possibilmente pochi, possibilmente semplici. Isolare e descrivere gli aspetti salienti di un fenomeno è facile, a volte; a volte terribilmente difficile. Può essere necessario avvalersi di conoscenze e di strumenti diversi e insospettabili; d'intelligenza, d'intuito e di pazienza, di doti insomma che appartengono al carattere e alla cultura di un individuo: tecnica e non. Occorrono creatività e modestia, lungimiranza e distacco, capacità di organizzare gerarchicamente obiettivi e strumenti, senza pretendere di ricondurre ogni cosa ad una visione unica: onnicomprensiva e totalizzante.

I fenomeni fisici, anche i più semplici, possono essere descritti in una gran varietà di modi diversi. Ci sono infiniti modi di fotografare la medesima realtà. Ma un buon fotografo sa che, per operare bene, in modo professionalmente rispettabile, occorre prima di tutto sapere a quale uso è destinata la fotografia; e poi bisogna conoscere il soggetto: che cosa, del soggetto, è rilevante, in rapporto allo scopo per il quale è utile produrre una fotografia. Se ciò è vero per un fotografo, a maggior ragione è vero per un pittore, per un musicista o per un poeta: persone abituate a descrivere scorci di paesaggio, spesso di paesaggio interiore, con un linguaggio diversamente sintetico, a volte comprensibile a tutti, a volte ermetico per molti; più spesso, nei casi migliori, comprensibile ed ermetico insieme. In ingegneria, il linguaggio per descrivere la realtà, quella nota e, almeno in parte, quel poco o tanto d'ignoto ch'essa può sottendere, è fornito dalla matematica. La matematica consente di descrivere aspetti e comportamenti di frammenti significativi del mondo reale, formulando con ragionevole precisione molti dei problemi che siamo interessati a risolvere. In più, essa consente di farlo in un modo condiviso dalla comunità scientifica dell'intero pianeta: la matematica cinese non è diversa da quella norvegese o sudamericana. Questo ruolo della matematica, di *linguaggio* tecnicamente universale atto a descrivere frammenti del mondo reale, è spesso sottovalutato dai matematici stessi, a favore di un secondo e coesistente ruolo, a loro più congeniale e ritenuto più importante, che è quello di *strumento* atto a caratterizzare, classificare, inquadrare in contesti più ampi ed eventualmente a risolvere, anche numericamente, problemi tecnici formulati in modo adeguato. Per la gente comune, abituata da una "cattiva scuola" ad intrattenere con la matematica rapporti difficili, essa in effetti consiste essenzialmente nell'arte di calcolare: di ottenere, cioè, attraverso percorsi più o meno misteriosi, quei numeri che possono costituire una soluzione di problemi a volte (ma non sempre) rispondenti alle necessità della vita. In realtà, le più affascinanti acquisizioni della matematica sono, almeno per chi scrive, quelle che consentono di legare le soluzioni ai dati (di un determinato problema) "senza fare i calcoli"; senza, cioè, esplorarne numericamente le infinite istanze. Per un ingegnere, qualunque ingegnere, ma in particolare per quelli che si occupano di automazione, entrambi i ruoli appena ricordati della matematica sono fondamentali: quello di linguaggio per descrivere aspetti e problemi del mondo reale e quello di strumento per analizzare le possibili formulazioni matematiche di un particolare problema, cercarne le soluzioni e metterle in rapporto con la realtà.

2. *Sistemi fisici e modelli matematici*

Per *sistema fisico* generalmente s'intende un insieme di parti che, interagendo fra loro, fanno sì che l'insieme assuma un'individualità autonoma, per così dire collettiva, connotata da funzioni e finalità proprie. Il buon funzionamento di un sistema fisico richiede infatti che il comportamento delle parti sia ordinato all'esercizio delle funzioni e al raggiungimento degli obiettivi propri del sistema nel suo complesso. Inoltre, ogni sistema fisico può essere analizzato sia ampliando che contraendo la scala di riferimento: può essere visto, cioè, come elemento di un sistema fisico più ampio, mentre, nello stesso tempo, ogni sua parte può essere vista, a sua volta, come un insieme di parti, o di sottosistemi fisici, interagenti fra loro.

In ingegneria, come in fisica o in chimica, è prassi comune utilizzare *modelli matematici* per descrivere con l'accuratezza necessaria gli aspetti ritenuti rilevanti del comportamento di un sistema fisico. Questa consuetudine sta per altro sempre più diffondendosi in un numero crescente di ambiti disciplinari: dalla biologia all'ecologia, dall'economia alla medicina. Un modello matematico è tipicamente costituito da un insieme (o sistema) di equazioni, intese ad esprimere i legami esistenti fra le variabili che intervengono nel particolare fenomeno che s'intende descrivere. Dunque, un modello matematico è costituito da un sistema di relazioni (equazioni ed eventualmente disequazioni) fra variabili in qualche modo connesse alle grandezze fisiche del fenomeno da descrivere. Per questo, la parola *sistema*, se non accompagnata dall'aggettivo "fisico", sarà di norma da intendersi, nel seguito di questa trattazione, come sinonimo di modello matematico. Le eventuali eccezioni verranno ogni volta esplicitamente segnalate, a meno che non siano rese assolutamente evidenti dal contesto.

Le variabili di un sistema, cioè di un modello matematico, possono essere generalmente in molti modi suddivise in *variabili indipendenti* e *variabili dipendenti*: fissate le prime, le seconde possono essere calcolate grazie alle equazioni che costituiscono il sistema. Ad esempio, in un resistore di resistenza R, la tensione $v(t)$ e la corrente $i(t)$ possono ritenersi legate dalla relazione ("legge di Ohm"):

$$v(t) - R\, i(t) = 0 \ .$$

Evidentemente, si può considerare indipendente la corrente i e dipendente la tensione v; o anche viceversa. In un sistema, la scelta delle variabili indipendenti, che è di solito suggerita dalla natura del problema da risolvere e tuttavia richiede, per coerenza, una qualche accortezza quando l'operazione riguardi i diversi sottosistemi di un sistema più ampio, non verrà ulteriormente discussa qui.

Le variabili di un sistema fisico, e quindi quelle di ogni suo modello matematico, possono d'altro canto essere suddivise in *variabili esterne* e *variabili interne* (in economia, si usano a volte gli aggettivi esogeno ed endogeno). Esterne sono le variabili che il sistema fisico ha in comune con il mondo circostante. Esse descrivono le interazioni fra il sistema in esame e ciò che lo circonda. Tutte le altre variabili del sistema sono dette interne. Alla luce della precedente distinzione (tra variabili indipendenti e variabili dipendenti), le variabili esterne, e di conseguenza il sistema, acquisiscono un orientamento (Fig.2.1); il sistema diventa un *sistema orientato*. In particolare, le variabili

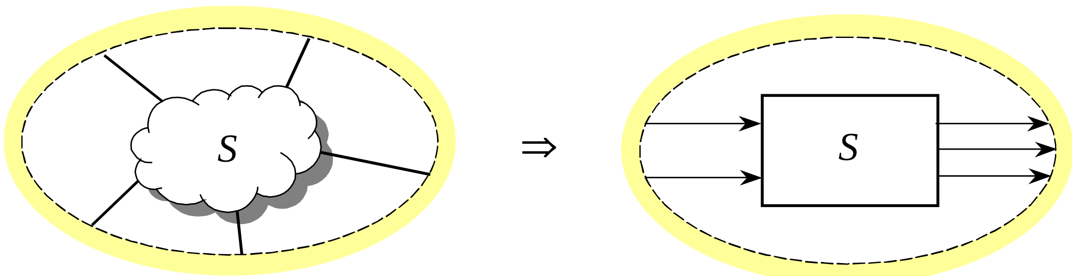


Fig. 2.1 : Sistema non orientato e sistema orientato.

indipendenti esterne di un sistema S sono dette *variabili d'ingresso*, mentre le variabili dipendenti esterne sono dette *variabili di uscita* di S. Si può anche dire che le variabili d'ingresso descrivono l'azione che il mondo circostante esercita sul sistema S, mentre le variabili di uscita descrivono la *risposta* di S; ovvero l'azione che S di conseguenza esercita sul mondo circostante. Con riferimento al già citato esempio del resistore, dovrebbe essere evidente che tanto la corrente $i(t)$ quanto la tensione $v(t)$ sono variabili esterne. Sono variabili, cioè, che il resistore, inserito in un circuito, ha in comune col mondo circostante. Se si decide di adottare la tensione v come variabile indipendente, quest'ultima diventa la variabile d'ingresso e la corrente i diventa la variabile di uscita. La resistenza costante R può essere invece un esempio di variabile indipendente interna. Se costanti nel tempo, le variabili indipendenti interne sono spesso indicate come *parametri* del sistema. Nel caso un po' banale del singolo resistore considerato finora, non esistono variabili dipendenti interne.

I sistemi orientati si prestano in modo particolare a descrivere con efficacia le mutue relazioni esistenti fra gli elementi (i sottosistemi) di un sistema composito (Fig.2.2). Le variabili d'ingresso del sistema complessivo S sono palesemente quella del sottosistema S_1 e quella del sottosistema S_2, mentre la variabile di uscita di S è una delle uscite di S_3.

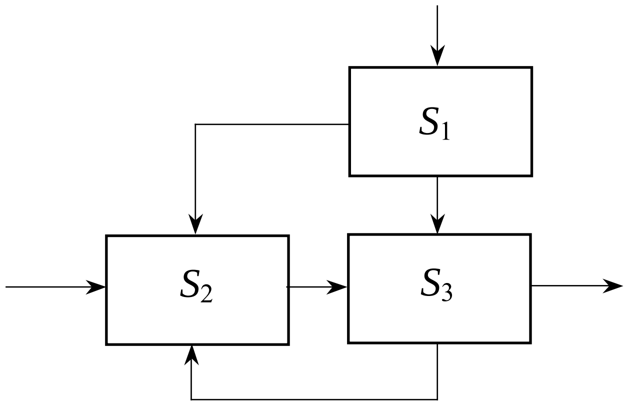


Fig. 2.2 : Sistema composito, o interconnesso, S.

Si noti che l'orientamento indotto in un sistema dalla nozione di variabili d'ingresso e d'uscita non è necessariamente connesso, o coerente, con la direzione dei flussi di materia, energia o altro eventualmente presenti nel sistema. Ad esempio, la "portata in uscita" di un serbatoio potrebbe benissimo assumere, in una particolare situazione, il ruolo di variabile d'ingresso.

3. *Sistemi non dinamici*

Si consideri un sistema orientato S con ingresso u e uscita y. Il sistema S si dice *non dinamico* se, stante la natura delle equazioni che lo costituiscono e supposte note le eventuali variabili indipendenti interne, il valore $u(t)$ assunto da u in ogni istante t consente di determinare univocamente il valore assunto in quel medesimo istante da tutte le variabili dipendenti; in particolare, dalla variabile d'uscita y.

Vediamo alcuni esempi.

***Esempio* 1.** Lampadina

Consideriamo una comune lampadina e chiedamoci quale relazione intercorra fra la tensione applicata $v(t)$, da intendersi come variabile indipendente esterna (ingresso), e la corrente assorbita $i(t)$, da intendersi come variabile dipendente esterna (uscita). Un semplice esperimento consente di stabilire che la relazione è del tipo di quella indicata in Fig.3.1. Si può cioè ritenere che al valore v corrisponda istantaneamente un valore di i dato da: $i = h(v)$.

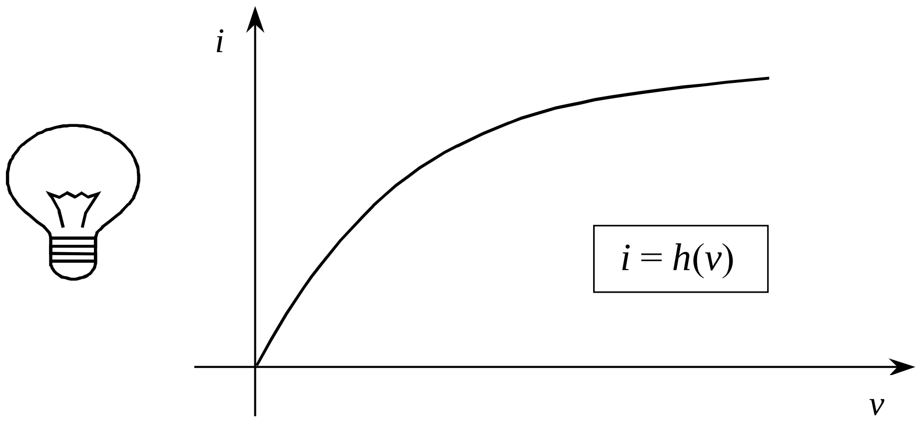


Fig. 3.1 : Caratteristica esterna di una comune lampadina.

Indicando quindi con u la variabile d'ingresso, vale a dire la tensione, e con y la variabile di uscita, vale a dire la corrente, e con S il "sistema lampadina", possiamo scrivere:

$$\boldsymbol{S}: \quad y(t) = h(u(t)) \ ,$$

dove $h(\cdot)$ è la funzione descritta con un grafico in Fig.3.1. La funzione $h(\cdot)$ è in realtà definita in Fig.3.1 solo per valori positivi di v. Ma è naturale supporre che, in generale, la funzione goda di simmetria dispari; cioè: $h(-v) = -h(v)$.

***Esempio* 2.** Sistema biella-manovella

Si consideri il classico sistema biella-manovella usato in meccanica per trasformare in rotatorio un moto rettilineo alternato, o viceversa. Il sistema è schematizzato in Fig.3.2.

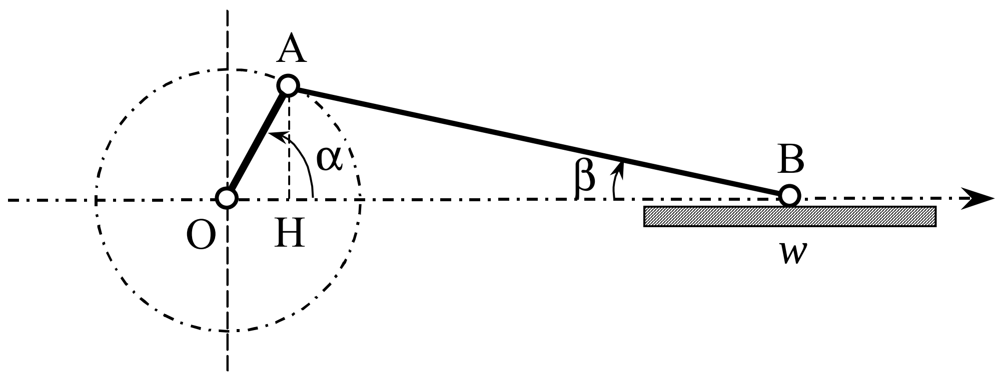


Fig. 3.2 : Il sistema biella-manovella.

La “manovella” OA, di lunghezza R, è vincolata a ruotare attorno alla cerniera fissa O, mentre l’estremità B della “biella” AB, di lunghezza $L > R$, è vincolata a muoversi lungo una retta fissa, che supponiamo passante per O.

Indicando con α l’angolo (positivo in senso antiorario ed espresso in radianti) formato dalla manovella con la retta di scorrimento della cerniera B, con β l’angolo (positivo in senso orario ed espresso in radianti) formato dalla biella con la medesima retta, con H la proiezione perpendicolare della cerniera A e con w la coordinata (rispetto ad O) della cerniera B sulla retta in questione, si ha:

$$w(t) = R\, cos(\alpha(t)) + L\, cos(\beta(t)) \quad .$$

D’altro canto, un semplice esame della Fig.3.2, e più precisamente del segmento AH, consente di scrivere:

$$R\, sin(\alpha(t)) = L\, sin(\beta(t)) \quad .$$

Il nostro obiettivo è quello di ricavare il legame fra l’angolo α, preso come variabile (indipendente) d’ingresso, e la posizione w, che prendiamo dunque come variabile (dipendente) di uscita, della cerniera B sulla sua retta di scorrimento. Conformemente alla consuetudine d’indicare con la lettera u le variabili indipendenti esterne, con la lettera z le variabili dipendenti e con la lettera y le variabili di uscita, poniamo allora:

$$\alpha = u \qquad , \qquad \beta = z_1 \qquad , \qquad w = z_2 = y$$

e descriviamo il comportamento che c’interessa della biella-manovella trascrivendo nel modo seguente le precedenti equazioni:

$$\boldsymbol{S}: \qquad \begin{cases} z_2(t) - R\, cos(u(t)) - L\, cos(z_1(t)) = 0 \\ R\, sin(u(t)) - L\, sin(z_1(t)) = 0 \\ y(t) = z_2(t) \quad . \end{cases}$$

Il modello matematico S così ottenuto stabilisce evidentemente, ad ogni istante t, un legame istantaneo fra l’angolo $u(t)$ e le variabili dipendenti $z_1(t)$ e $z_2(t) = y(t)$; si tratta dunque di un sistema non dinamico.

Nel caso di sistemi non elementari, è importante disporre di una notazione sintetica che consenta di dare una formulazione compatta dei sistemi e una caratterizzazione semplice e generale delle loro proprietà. Questa specie di "stenografia" è offerta dalla ***notazione vettoriale***, che adottiamo qui a scopo illustrativo. Sia dunque:

$$z := \begin{bmatrix} z_1 \\ \\ z_2 \end{bmatrix}$$

e inoltre: $\varphi_1(z_1, z_2, u) := z_2 - R\, cos(u) - L\, cos(z_1)$, $\varphi_2(z_1, u) := R\, sin(u) - L\, sin(z_1)$,

$$\varphi(z, u) := \begin{bmatrix} \varphi_1(z_1, z_2, u) \\ \\ \varphi_2(z_1, u) \end{bmatrix} \quad , \quad \psi(z) := z_2$$

sicché:

$$\boldsymbol{S} : \qquad \begin{cases} \varphi(z(t), u(t)) = 0 \\ \\ y(t) = \psi(z(t)) \ . \end{cases}$$

Quella appena trovata verrà indicata nel seguito come *forma normale* o *forma standard* di un sistema non dinamico *S*. Essa consta di due equazioni vettoriali: la prima, equivalente a tante equazioni scalari quante sono le variabili dipendenti (scalari), *implicitamente* descrive come il valore assunto da queste ultime al generico istante *t* dipende dal valore assunto, nel medesimo istante, dalle variabili d'ingresso; la seconda equazione descrive invece come il valore assunto all'istante *t* dalle variabili di uscita dipende dal valore contemporaneamente assunto dalle variabili dipendenti (ed eventualmente da quelle d'ingresso).

Il legame che il sistema *S* impone fra le variabili d'ingresso e di uscita è espresso dalla cosiddetta *caratteristica esterna* o *caratteristica ingresso-uscita*. L'equazione (eventualmente vettoriale) che descrive la caratteristica ingresso-uscita può, almeno nei casi più semplici, essere ricavata dalla forma normale eliminando le variabili dipendenti che non sono di uscita.

Nel caso del sistema biella-manovella, abbiamo:

$$\begin{cases} z_2 - R\, cos(u) - L\, cos(z_1) = 0 \\ \\ R\, sin(u) - L\, sin(z_1) = 0 \\ \\ y = z_2 \ . \end{cases}$$

Dalla seconda equazione, ricaviamo:

$$sin(z_1) = \rho \; sin(u) \qquad , \qquad \rho := R/L$$

quindi,

$$cos(z_1) = \sqrt{1 - sin^2(z_1)} = \sqrt{1 - \rho^2 \; sin^2(u)} \quad ;$$

ora, sostituendo nella prima equazione, si ottiene:

$$z_2 = R \; cos(u) + L \; cos(z_1) = L \; [\rho \; cos(u) + \sqrt{1 - \rho^2 \; sin^2(u)}]$$

pertanto, in vista dell'ultima equazione, risulta:

$$y = L \; [\rho \; cos(u) + \sqrt{1 - \rho^2 \; sin^2(u)}] := \chi(u) \; .$$

La funzione $\chi(\cdot)$, periodica di periodo 2π, è una particolare rappresentazione della caratteristica ingresso-uscita di S. Se del sistema S interessa soltanto il legame ingresso-uscita, si può addirittura scrivere:

$$\boldsymbol{S} : \quad y(t) = \chi(u(t)) \qquad , \qquad \chi(u) := L \; [\rho \; cos(u) + \sqrt{1 - \rho^2 \; sin^2(u)}] \; .$$

L'andamento (su un periodo) della funzione $\chi(u)/L$ è mostrato, per diversi valori di ρ, in Fig.3.3.

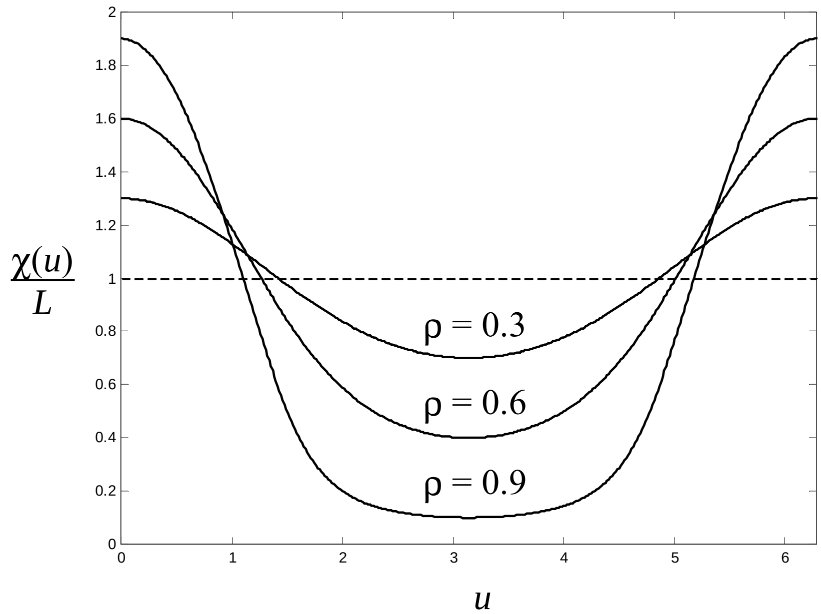


Fig. 3.3 : La funzione $\chi(u)/L$, per $u \in [0, 2\pi]$.

***Esempio* 3.** Rete di resistori

Il comportamento elettrico (ma non, ad esempio, quello termico) della semplice rete di resistori riportata in Fig.2.1, nella quale (a titolo di esempio) prendiamo come variabile d'ingresso la tensione v_1 e come variabile d'uscita la tensione v_2, può essere descritto ricorrendo alle "leggi" di Ohm e di Kirchhoff.

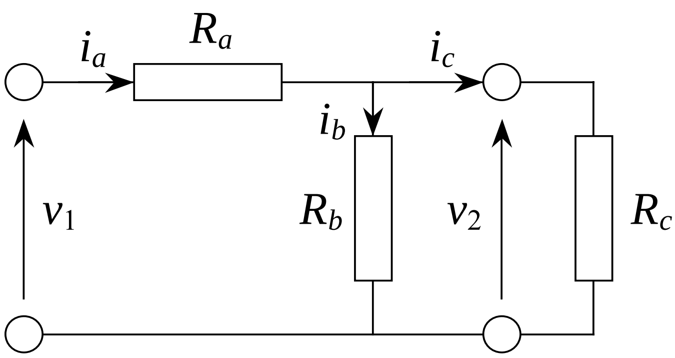


Fig. 3.4 : Una semplice rete di resistori.

In particolare, il legame fra la variabile indipendente v_1 e le 4 variabili dipendenti i_a, i_b, i_c e v_2, può essere descritto dalle quattro equazioni seguenti:

$$\begin{aligned} & v_1(t) - R_a\, i_a(t) - R_b\, i_b(t) = 0 \\ & R_c\, i_c(t) - R_b\, i_b(t) = 0 \\ & i_a(t) - i_b(t) - i_c(t) = 0 \\ & v_2(t) - R_c\, i_c(t) = 0 \quad . \end{aligned}$$

Per dare al sistema una formulazione compatta, poniamo:

$$z := \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ v_2 \end{bmatrix} \qquad , \qquad u := v_1 \qquad , \qquad y := v_2$$

e inoltre:

$$\varphi(z,u) := \begin{bmatrix} \varphi_1(z,u) \\ \varphi_2(z,u) \\ \varphi_3(z,u) \\ \varphi_4(z,u) \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} & \varphi_1(z,u) := u - R_a\, z_1 - R_b\, z_2 \\ & \varphi_2(z,u) := R_c\, z_3 - R_b\, z_2 \\ & \varphi_3(z,u) := z_1 - z_2 - z_3 \\ & \varphi_4(z,u) := z_4 - R_c\, z_3 \end{aligned}$$

$$\psi(z,u) := z_4 \quad .$$

Allora, anche la rete di resistori qui considerata può essere descritta da:

$$S: \quad \begin{cases} \varphi(z(t), u(t)) = 0 \\ \\ y(t) = \psi(z(t), u(t)) \ . \end{cases}$$

Anzi, possiamo ulteriormente osservare che, in questo caso, le funzioni φ e ψ che compaiono nella forma normale (o standard) di S sono *lineari* (in z e u); infatti è facile verificare che

$$\varphi(z, u) = M\,z + N\,u \qquad , \qquad \psi(z, u) = Q\,z$$

dove:

$$M := \begin{bmatrix} -R_a & -R_b & 0 & 0 \\ 0 & -R_b & R_c & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -R_c & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad N := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad Q := [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1] \ .$$

Quindi, S è un *sistema lineare*:

$$S: \quad \begin{cases} M\,z(t) + N\,u(t) = 0 \\ \\ y(t) = Q\,z(t) \ . \end{cases}$$

Poiché, infine, le matrici M, N e Q (come del resto le funzioni φ e ψ) non dipendono dal tempo, il sistema S si dice *invariante nel tempo* o anche *tempo-invariante*. In caso contrario, S sarebbe *variante nel tempo*, o *tempo-variante*.

Ad esempio, se la resistenza R_b non fosse costante, come ipotizzato finora, ma avesse un andamento sinusoidale:

$$R_b(t) = 10\,[2 + sin(3\,t - \pi/4)] \quad [\Omega]$$

le matrici N e Q resterebbero ovviamente invariate, ma M diventerebbe una funzione (nota) del tempo:

$$M(t) := \begin{bmatrix} -R_a & -10\,[2 + sin(3\,t - \pi/4)] & 0 & 0 \\ 0 & -10\,[2 + sin(3\,t - \pi/4)] & R_c & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -R_c & 1 \end{bmatrix}$$

e quindi anche la funzione φ verrebbe a dipendere dal tempo:

$\varphi(z, u, t) = M(t)\, z + N\, u$.

Poichè anche in questo caso φ dipenderebbe linearmente da z e da u (più precisamente: poichè $\varphi(\cdot,\cdot, t)$ è lineare), S sarebbe ancora un sistema lineare, ma variante nel tempo.

Tornando al caso tempo-invariante, notiamo che la linearità del sistema consente di calcolare facilmente la caratteristica ingresso-uscita di S. Infatti, supponendo che M non sia singolare, si ha: $z = -M^{-1} N u$ e quindi

$y = \gamma u$, $\gamma := -Q\ M^{-1} N$.

Una breve riflessione consente di concludere che, nel caso in esame, $Q\ M^{-1} N$ coincide con il primo elemento della quarta riga di M^{-1}. L'osservazione consente di pervenire con relativa rapidità ad esprimere il guadagno γ in funzione dei parametri R_a, R_b e R_c:

$$\gamma = \frac{R_b\, R_c}{R_a\, R_b + R_a\, R_c + R_b\, R_c} \quad .$$

Questa espressione è per altro facilmente ottenibile anche per analisi diretta del circuito di Fig.3.4.

4. *Modello lineare tangente a un sistema (non dinamico) in un punto di lavoro*

E' importante riconoscere che, in prossimità di un punto di lavoro, un sistema non lineare sufficientemente regolare può essere approssimato da un modello lineare. A questo scopo, riprendiamo brevemente in esame il primo esempio del paragrafo precedente (lampadina comune). Abbiamo visto che il suo comportamento (elettrico) può essere descritto da

$$\boldsymbol{S}: \quad y(t) = h(u(t)) \ ,$$

dove $h(\cdot)$ è la funzione (a simmetria dispari) descritta dal grafico di Fig.3.1.

Sulla caratteristica ingresso-uscita $y = h(u)$, consideriamo un particolare *punto di lavoro* determinato dall'ingresso $\bar{u}$ e dal corrispondente valore $\bar{y} := h(\bar{u})$.

Se sviluppiamo la funzione $h(\cdot)$ in serie di Taylor attorno al punto $\bar{u}$, otteniamo:

$$y = h(u) = h(\bar{u}) + \frac{dh}{du}(\bar{u})\,(u - \bar{u}) + \frac{1}{2}\frac{d^2h}{du^2}(\bar{u})\,(u - \bar{u})^2 + \dots \quad .$$

L'approssimante lineare, o del prim'ordine, della funzione $h(\cdot)$ nel punto $\bar{u}$ si ottiene ignorando i termini di ordine superiore al primo; scrivendo cioè:

$$y = h(\bar{u}) + \frac{dh}{du}(\bar{u})\,(u - \bar{u}) = \bar{y} + \frac{dh}{du}(\bar{u})\,(u - \bar{u}) \quad .$$

In altri termini, per valori di u non troppo discosti da $\bar{u}$, il sistema

$$\boldsymbol{\delta S :} \qquad \delta y(t) = \gamma\, \delta u(t)$$

dove:

$$\delta y(t) := y(t) - \bar{y} \qquad , \qquad \delta u(t) := u(t) - \bar{u} \qquad , \qquad \gamma := \frac{dh}{du}(\bar{u}) \qquad ,$$

può essere considerato una buona approssimazione di S. In Fig.4.1 sono mostrati il grafico di $h(\cdot)$ e la retta $\delta y = \gamma\, \delta u$, tangente a tale grafico nel punto di lavoro considerato.

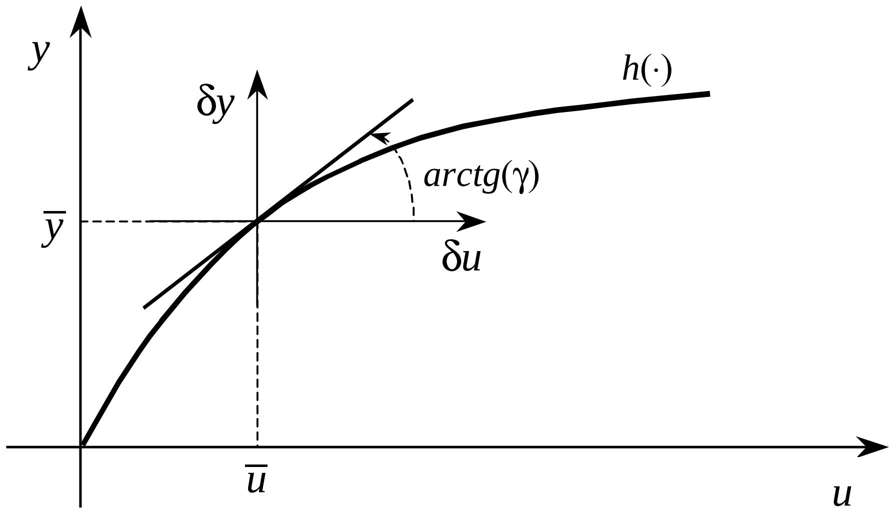


Fig. 4.1 : Approssimazione lineare di $h(\cdot)$ in $\bar{u}$.

La Fig.4.1 spiega anche perchè sia legittimo dire che δS è il *sistema lineare tangente a S nel punto di lavoro* $(\bar{u}, \bar{y})$.

Vediamo ora in che cosa consista il sistema lineare δS tangente in un punto di lavoro a un generico sistema non dinamico (e tempo-invariante) S posto in forma standard (o forma normale).

Sia dunque:

$$\boldsymbol{S:} \qquad \begin{cases} \varphi(z(t), u(t)) = 0 \\ y(t) = \psi(z(t), u(t)) \end{cases} .$$

e, per un dato valore $\overline{u}$ di u, sia $\overline{z}$ una soluzione dell'equazione

$$\varphi(z, \overline{u}) = 0 \quad .$$

La coppia $(\overline{z}, \overline{u})$ rappresenta un *punto di lavoro* di S, in corrispondenza del quale y assume il valore $\overline{y} = \psi(\overline{z}, \overline{u})$. Se le funzioni φ e ψ sono sufficientemente regolari nel punto di lavoro considerato, vale a dire derivabili in $(\overline{z}, \overline{u})$ con derivate continue, e se tanto $\delta u := u\text{-}\overline{u}$ quanto $\delta z := z\text{-}\overline{z}$ sono sufficientemente piccoli, allora in prima approssimazione (formula di Taylor arrestata ai termini del prim'ordine):

$$\varphi(z, u) \cong \varphi(\overline{z}, \overline{u}) + \frac{\partial\varphi}{\partial z}(\overline{z}, \overline{u})\ \delta z + \frac{\partial\varphi}{\partial u}(\overline{z}, \overline{u})\ \delta u$$

$$\psi(z, u) \cong \psi(\overline{z}, \overline{u}) + \frac{\partial\psi}{\partial z}(\overline{z}, \overline{u})\ \delta z + \frac{\partial\psi}{\partial u}(\overline{z}, \overline{u})\ \delta u$$

dove, se n è il numero di elementi del vettore z (e della funzione vettoriale φ):

$$M := \frac{\partial\varphi}{\partial z}(\overline{z}, \overline{u})$$

è una matrice $n \times n$ il cui generico elemento M_{hk} è dato da:

$$M_{hk} := \frac{\partial\varphi_h}{\partial z_k}(\overline{z}, \overline{u}) \qquad , \qquad h, k = 1, 2, \dots , n.$$

Analogamente, se m è il numero di elementi del vettore u:

$$N := \frac{\partial\varphi}{\partial u}(\overline{z}, \overline{u}) \quad ; \quad N_{hk} := \frac{\partial\varphi_h}{\partial u_k}(\overline{z}, \overline{u}) \quad , \quad h = 1, 2, \dots , n \quad , \quad k = 1, 2, \dots , m.$$

Infine, se p è il numero di elementi del vettore y (e della funzione vettoriale ψ):

$$\frac{\partial\psi}{\partial z}(\bar{z},\bar{u}) := P \quad , \quad P_{hk} := \frac{\partial\psi_h}{\partial z_k}(\bar{z},\bar{u}) \quad , \quad h = 1, 2, \dots , p \quad , \quad k = 1, 2, \dots , n \;;$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial u}(\bar{z},\bar{u}) := Q \quad , \quad Q_{hk} := \frac{\partial\psi_h}{\partial u_k}(\bar{z},\bar{u}) \quad , \quad h = 1, 2, \dots , p \quad , \quad k = 1, 2, \dots , m \,.$$

Osserviamo inoltre che, per definizione, $\varphi(\bar{z}, \bar{u}) = 0$ e $\psi(\bar{z}, \bar{u}) = \bar{y}$. Ponendo $\delta y := y\text{-}\bar{y}$, possiamo quindi concludere che il comportamento di S nelle vicinanze del punto di lavoro è approssimativamente descritto da un sistema lineare, non dinamico e tempo-invariante, detto *sistema lineare tangente a S nel punto di lavoro* considerato:

$$\boldsymbol{\delta S :} \qquad \begin{cases} M\,\delta z(t) + N\,\delta u(t) = 0 \\ \\ \delta y(t) = P\,\delta z(t) + Q\,\delta u(t) \end{cases} \quad .$$

Una breve riflessione porta infine ad affermare che, se M è una matrice non singolare, la *caratteristica ingresso-uscita* di δS è semplicemente data da:

$$\delta y = \Gamma\,\delta u \qquad , \qquad \Gamma := Q - P\,M^{-1}\,N \quad .$$

Esempio

Si consideri un sistema S descritto da:

$$\boldsymbol{S :} \qquad \begin{cases} \varphi(z(t), u(t)) = 0 \\ \\ y(t) = \psi(z(t), u(t)) \end{cases}$$

dove $z := [z_1 \quad z_2 \quad z_3]'$, $u := [u_1 \quad u_2]'$, y è uno scalare e inoltre:

$$\varphi(z, u) := [\varphi_1(z, u) \qquad \varphi_2(z, u) \qquad \varphi_3(z, u)]'$$

$$\varphi_1(z, u) := z_1^3 - z_3\, ln(u_1) + 4\sqrt{u_2^3} + 1$$
$$\varphi_2(z, u) := z_2\, u_1 - 8$$
$$\varphi_3(z, u) := 6\, z_1 - 3\, z_2 + 2\, z_3 - 6\, u_2 \quad ,$$

$$\psi(z, u) := z_3 - u_1^2 \quad .$$

Si vuol determinare il modello (o sistema) lineare δS tangente a S nel punto di lavoro corrispondente agli ingressi $u_1 = \bar{u}_1 = 1$, $u_2 = \bar{u}_2 = 0$.

Dobbiamo innanzitutto determinare (se esiste) il punto di lavoro in questione. Per questo, dobbiamo risolvere il sistema $\varphi(z, \overline{u}) = 0$, il sistema cioè:

$$z_1^3 + 1 = 0$$
$$z_2 - 8 = 0$$
$$6\, z_1 - 3\, z_2 + 2\, z_3 = 0\ ,$$

nelle incognite z_1, z_2 e z_3.

In questo caso, la soluzione esiste, è unica (in campo reale) ed è data da:

$$\overline{z}_1 = -1 \quad , \quad \overline{z}_2 = 8 \quad , \quad \overline{z}_3 = 15\ .$$

Corrispondentemente, $\overline{y} = \overline{z}_3 - \overline{u}_1^2 = 14$. Quanto a δS, si ha (m=2, n=3, p=1) :

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z_1}(z, u) = 3\, z_1^2 \quad , \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial z_2}(z, u) = 0 \quad , \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial z_3}(z, u) = -\, ln(u_1)$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial z_1}(z, u) = 0 \quad , \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial z_2}(z, u) = u_1 \quad , \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial z_3}(z, u) = 0$$

$$\frac{\partial\varphi_3}{\partial z_1}(z, u) = 5 \quad , \quad \frac{\partial\varphi_3}{\partial z_2}(z, u) = -\,3 \quad , \quad \frac{\partial\varphi_3}{\partial z_3}(z, u) = 2$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial u_1}(z, u) = -\,\frac{z_3}{u_1} \quad , \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial u_2}(z, u) = 6\,\sqrt{u_2}$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial u_1}(z, u) = z_2 \quad , \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial u_2}(z, u) = 0$$

$$\frac{\partial\varphi_3}{\partial u_1}(z, u) = 0 \quad , \quad \frac{\partial\varphi_3}{\partial u_2}(z, u) = -\,6$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial z_1}(z, u) = 0 \quad , \quad \frac{\partial\psi}{\partial z_2}(z, u) = 0 \quad , \quad \frac{\partial\psi}{\partial z_3}(z, u) = 1$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial u_1}(z, u) = -\,2\, u_1 \quad , \quad \frac{\partial\psi}{\partial u_2}(z, u) = 0\ .$$

Pertanto:

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & -3 & 2 \end{bmatrix} \quad , \qquad N = \begin{bmatrix} -15 & 0 \\ 8 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} \ ,$$

$$P = [\, 0 \quad 0 \quad 1 \,] \quad , \qquad Q = [\, -2 \quad 0 \,] \ .$$

Notiamo infine che

$$M^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ -6 & 9 & 3 \end{bmatrix}$$

quindi, per quanto riguarda la caratteristica ingresso-uscita di δS, si ha

$\Gamma := Q - P\, M^{-1}\, N = [\, -28.5 \quad 3]$

e quindi:

$\delta y = \Gamma\, \delta u = 3\ \delta u_2 - 28.5\ \delta u_1$.

Questo esempio conclude la trattazione dei sistemi non dinamici.

5. *Sistemi dinamici*

E' esperienza comune che non sempre le conseguenze di un'azione esercitata su di un particolare oggetto si manifestano e si esauriscono istantaneamente. Più spesso, esse richiedono tempo per svilupparsi facendo sì che gli avvenimenti attuali siano l'esito di complesse e variegate vicende; di avvenimenti accaduti in un passato più o meno remoto. Per render conto di ciò, è necessario ricorrere a sistemi, a modelli matematici, il cui comportamento catturi e rifletta questa fondamentale capacità di legare ciò che il tempo tenderebbe a dividere, di cogliere il nesso profondo che un poeta ha descritto così: "Time present and time past – are both perhaps present in time future – and time future contained in time past” (T. S. Eliot: *Four Quartets*). E Robert Musil, nell’*Uomo senza qualità*: “A ben guardare, si può sempre scorgere nell'ultimo avvenire appena avverato il futuro tempo antico” (traduzione di Anita Rho).

Il connotato qualificante di un sistema ***dinamico*** è che la conoscenza del valore assunto dalle variabili indipendenti in un generico istante t (noto) non basta a determinare il valore che, *in quell’istante*, assumono le variabili dipendenti; in particolare, quelle d’uscita. Ciò che manca, nei sistemi non dinamici, è il riflesso del passato: il ruolo che l’andamento passato delle variabili indipendenti, segnatamente quelle d’ingresso, svolge nel determinare il valore attuale delle variabili dipendenti. La capacità propria dei sistemi dinamici di legare il presente al passato da qualcuno è detta *memoria*. Con qualche attenzione ad evitare sconfinamenti incongrui, bisogna ammettere la sostanziale correttezza della suggestione che emana da una parola così densa di significato: rispondendo alle domande di chi l’interrogava sulle atrocità del nazismo, Tullia Zevi ha significativamente affermato che la memoria è una cosa dinamica, grazie alla quale il passato diventa presente e può aiutarci a costruire un futuro migliore.

Quali modelli matematici condividono, per così dire, con la nostra mente quella straordinaria proprietà che chiamiamo memoria? Che parentela hanno con la “memoria” di un calcolatore? Cominciamo ad esaminare alcuni semplici esempi.

***Esempio* 1**

Con riferimento al semplice circuito elettrico di Fig.4.1, si vuol descrivere il legame esistente fra la tensione v_1, presa come variabile indipendente (ingresso) e la tensione v_2, considerata come variabile d’uscita. Con le convenzioni di segno indicate in Fig.5.1, si ha:

$$v_1(t) - R\, i(t) - v_2(t) = 0$$

$$i(t) = C\,\frac{dv_2}{dt}(t)\,.$$

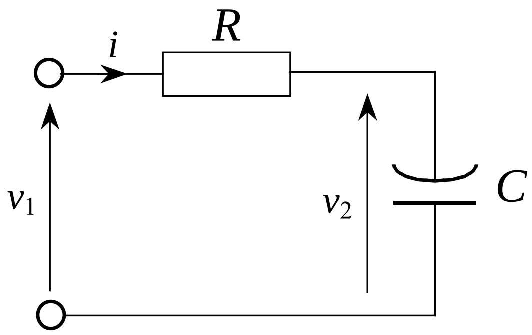


Fig. 5.1: Un circuito elementare.

Quindi, il legame tra v_1 e v_2 è descritto da:

$$\frac{dv_2}{dt}(t) = \frac{1}{RC}\left(- v_2(t) + v_1(t)\right)$$

ovvero, con la notazione di Newton,

$$\dot{v}_2(t) = \frac{1}{RC}\big(-v_2(t) + v_1(t)\big) \quad .$$

Questa è un'equazione differenziale del prim'ordine, lineare, a coefficienti costanti, a proposito della quale ci poniamo la seguente domanda. Fissato un istante iniziale t_0, che supponiamo coincidere con l'origine dell'asse dei tempi ($t_0 = 0$), e dato l'andamento della variabile d'ingresso v_1 dall'istante iniziale in poi (Fig.5.2) è possibile determinare l'andamento da 0 in poi della variabile dipendente v_2?

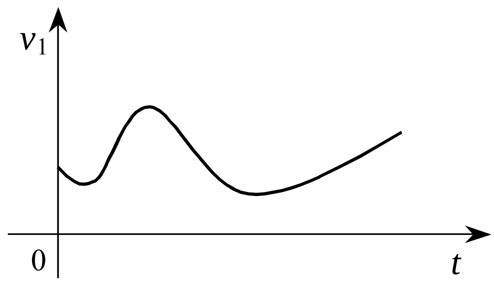


Fig. 5.2 : Andamento dell'ingresso.

La matematica ci dice che la risposta è no (perchè $v_2(t)$ risulti univocamente determinata per ogni $t > 0$, occorre conoscere qualcosa in più; ad esempio, il valore iniziale di v_2). Questa risposta è indicativa del fatto che quello in esame (costituito da un'unica equazione) è un *sistema dinamico*.

In un sistema dinamico, *un insieme* (un vettore) x di variabili dipendenti costituisce un insieme (un vettore) di ***variabili di stato*** se la conoscenza di $x(t_0)$ e dell'andamento dell'ingresso da t_0 in poi è sufficiente a determinare l'andamento, da t_0 in poi, di tutte le variabili dipendenti e se, inoltre, nessun sottoinsieme di x gode, da solo, della medesima proprietà.

Con riferimento al sistema dell'Esempio 1, possiamo dunque affermare che la tensione v_2 è, da sola, una variabile di stato (coincidente, in questo caso, con la variabile d'uscita). Ricordando che è consuetudine indicare con la lettera u l'ingresso e con la lettera y l'uscita, poniamo:

$$u := v_1 \quad , \quad x := v_2 \quad , \quad y := v_2 = x \; .$$

E' utile riconoscere che, con questa nuova notazione, il sistema di Fig.4.1 può essere posto nella forma seguente.

$$\boldsymbol{S} : \begin{cases} \dot{x}(t) = a\,x(t) + b\,u(t) \\ \\ y(t) = x(t) \end{cases}$$

dove: $a := -\,1/RC := -\,b$. La prima equazione (differenziale, del prim'ordine) descrive come evolve lo stato del sistema, a partire dallo stato iniziale $x(0)$ e sotto l'azione, da 0 in poi, dell'ingresso u. Per questo essa è detta *equazione di stato*. La seconda equazione (algebrica) dice in che modo il valore dell'uscita all'istante t dipende dal valore assunto, sempre all'istante t, dallo stato (ed eventualmente dall'ingresso). Per questo è detta *equazione d'uscita*.

Il sistema S non è che un caso particolare di un sistema della forma:

$$\boldsymbol{S}: \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) & \textit{equazione di stato} \\ y(t) = g(x(t)) & \textit{equazione d'uscita} \end{cases}$$

con $f(x, u) := a\, x + b\, u$ e $g(x) := x$. Vedremo nel seguito come, grazie alla notazione vettoriale, questa sia una descrizione comune ad una classe molto ampia di sistemi dinamici (*forma normale*); così ampia da comprendere (direttamente o indirettamente) quasi tutti i sistemi dinamici d'interesse corrente.

Come nel caso di un sistema non dinamico, poiché f e g non dipendono dal tempo, S è detto *tempo-invariante*. Poiché f e g dipendono linearmente da x e u, S è *lineare*. Se, ad esempio, la capacità del condensatore anziché essere costante fosse una funzione nota del tempo, diciamo $C(\cdot)$, si avrebbe: $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$, con $f(x, u, t) := a(t)\, x + b(t)\, u$ e $a(t) := -(\dot{C}(t) + 1/R)/C(t))$, $b(t) := -1/(RC(t))$. In tal caso, il sistema S continuerebbe ad essere lineare, ma tempo-variante.

***Esempio* 2**

Si consideri un carrello su rotaie orizzontali (e rettilinee) spinto da una forza $\sigma(t)$. Sia M la massa del carrello (comprensiva dell'inerzia delle ruote e di tutte le altre eventuali masse in movimento ad esse collegate). Vogliamo descrivere in che modo la velocità v del carrello dipende dall'andamento della spinta σ ad esso applicata.

La cosiddetta "legge di Newton" (forza uguale a massa per accelerazione) ci porta a scrivere l'equazione seguente:

$$M\, \dot{v}(t) = \sigma(t) + \alpha(v(t))$$

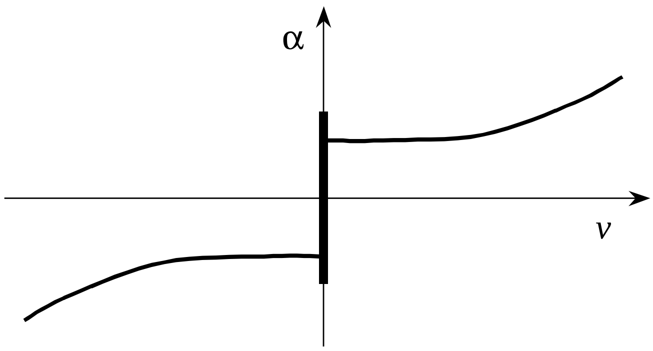


Fig. 5.3 : Relazione fra forza d'attrito e velocità.

dove con α si è indicata la forza (equivalente), in direzione longitudinale, che le rotaie esercitano sul carrello per attrito, e si è supposto che tale forza (d'attrito) dipenda essenzialmente, a parità di carico (cioè a M

costante) dalla sola velocità del carrello. La relazione fra la forza α e la velocità v è comunemente descritta da una curva del tipo di quella rappresentata in Fig.4.3. In primissima approssimazione, si può in qualche caso ritenere:

$\alpha(v) = -A\,v \quad , \quad A > 0\ .$ (*attrito viscoso*)

Si perviene così, ancora una volta, ad un'equazione differenziale del prim'ordine (lineare e a coefficienti costanti, nel caso di attrito viscoso). Questo significa che, dato l'andamento dell'ingresso σ da 0 in avanti, il calcolo dell'andamento di v da 0 in avanti non è ancora possibile. Sappiamo che l'informazione mancante è il valore iniziale di v.

La velocità v è, dunque, da sola, una variabile di stato. Ricorrendo alla notazione consueta, poniamo:

$u := \sigma \quad , \quad x := v \quad , \quad y := v = x\ .$

Con questa notazione, il sistema che descrive il moto del carrello può essere facilmente posto in forma normale:

$$\boldsymbol{S}: \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) & \textit{equazione di stato} \\ \\ y(t) = g(x(t)) & \textit{equazione d'uscita} \end{cases}$$

dove :

$$f(x, u) := \frac{1}{M}\,(\alpha(x) + u)$$

$$g(x) := x\ .$$

Poiché f e g non dipendono dal tempo, S è tempo-invariante. Se $\alpha(x) = -A\,x$ (attrito viscoso), allora

$$f(x, u) := a\,x + b\,u \quad , \quad a := -\frac{A}{M} \quad , \quad b := \frac{1}{M}$$

anche f , cioè, oltre a g, è una funzione lineare di x e u; quindi S è, in questo caso, un sistema dinamico tempo invariante e lineare.

***Esempio* 3**

La crescita di una specie in condizione di isolamento con risorse illimitate può essere descritta da un modello estremamente semplice. Indicando con x la biomassa di quella specie, è ragionevole supporre che la velocità di crescita sia proporzionale alla biomassa stessa:

$$\dot{x}(t) = k\, x(t) \quad .$$

Il coefficiente costante k è detto tasso di crescita. Anche in questo caso, il sistema, privo di ingressi (non ci sono variabili indipendenti), è costituito da un'equazione differenziale del prim'ordine (lineare, a coefficienti costanti). Per risolverla, su un intervallo di tempo $[0, T]$, occorre tuttavia disporre del valore iniziale di x che, come suggerisce la notazione, può assumere così il ruolo di variabile di stato.

Un sistema dinamico privo d'ingressi si dice *libero*; se è anche tempo-invariante, si dice *autonomo*.

Tornando alla descrizione della crescita di una specie, si può più realisticamente supporre che le risorse (ad esempio quelle alimentari) siano limitate e che quindi la disponibilità individuale diminuisca al crescere della popolazione (ipotesi malthusiana). Ciò comporta che il tasso di crescita non sia più da ritenersi costante, bensì una funzione (decrescente) della biomassa; ad esempio:

$$\dot{x}(t) = k(x(t))\, x(t) \quad , \quad k(x) = k_0 - \alpha\, x \quad , \quad \alpha > 0 \quad .$$

Se la specie si presta alla coltivazione o all'allevamento e indichiamo con la lettera v l'intensità complessiva delle azioni esterne atte a favorirne la crescita (irrigazione, concimazione, spargimento di antiparassitari, nel caso di specie vegetale; alimentazione aggiuntiva ed opportunamente calibrata, nel caso di specie animale) mentre indichiamo con la lettera w l'intensità complessiva delle azioni di prelievo (ad esempio: taglio di alberi in un bosco o attività di caccia o di pesca) non potremo evidentemente ignorare che il tasso di crescita risente delle azioni suddette. Ad esempio, si può supporre che sia:

$$\dot{x}(t) = k(x(t), v(t), w(t))\, x(t) \quad , \quad k(x, v, w) = k_0 - \alpha\, x + \beta\, v - \gamma\, w \quad , \quad \alpha,\beta,\gamma > 0 \quad .$$

In questo caso, potremmo altresì considerare come variabile d'uscita il frutto dell'azione di prelievo, plausibilmente proporzionale al prodotto dell'intensità dell'azione per la biomassa:

$$y(t) = h\, w(t)\, x(t) \quad .$$

Siamo così pervenuti a un sistema dinamico in forma normale. Infatti ponendo:

$$u := [u_1 \quad u_2]' \quad , \quad u_1 := v \quad , \quad u_2 := w \quad ,$$

si può scrivere:

$$
S: \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) & \textit{equazione di stato} \\ y(t) = g(x(t), u(t)) & \textit{equazione d'uscita} \end{cases}
$$

dove:

$f(x, u) := k(x, u_1, u_2)\, x$, $k(x, u_1, u_2) = k_0 - \alpha\, x + \beta\, u_1 - \gamma\, u_2$

$g(x, u) := h\, u_2\, x$.

Un semplice sguardo alle funzioni f e g consente di concludere che il sistema S così specificato è tempo-invariante e non lineare.

Quando, come in questo caso, la funzione g dipende effettivamente da u (non è costante al variare di u) e pertanto l'uscita dipende anche direttamente dall'ingresso e non solo indirettamente attraverso lo stato, allora il sistema S si dice dinamico *in senso improprio*. Altrimenti, è dinamico in senso proprio.

***Esempio* 4**

Si considerino due specie libere in un ambiente isolato e si supponga che una di esse (diciamo la seconda) costituisca una risorsa alimentare per la prima. Si tratta, in altre parole, del classico rapporto preda-predatore. Indichiamo con x_1 e x_2, rispettivamente, la biomassa della specie predatrice e quella della specie predata. Supponiamo inoltre che la specie predatrice sia oggetto di prelievo con intensità u e consideriamo come variabile d'uscita il risultato di tale azione di prelievo; risultato che, come nell'Esempio 3, possiamo ritenere proporzionale al prodotto dell'intensità u per la biomassa x_1 presente nel sistema.

Sulla falsariga dell'esempio precedente, possiamo scrivere:

$$
S: \begin{cases} \dot{x}_1(t) = k_1(x_1(t), x_2(t), u(t))\, x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = k_2(x_1(t), x_2(t))\, x_2(t) \\ y(t) = h\, u(t)\, x_1(t) \end{cases}
$$

dove:

$k_1(x_1, x_2, u) := k_{01} - \alpha_{11}\, x_1 + \alpha_{12}\, x_2 - \beta\, u$

$k_2(x_1, x_2) := k_{02} - \alpha_{12}\, x_1 - \alpha_{22}\, x_2$

e tutti i coefficienti sono positivi.

Se ora poniamo: $x := [x_1 \quad x_2]'$,

$f_1(x, u) := k_1(x_1, x_2, u)\, x_1$

$f_2(x, u) := k_2(x_1, x_2)\, x_2$

$$f(x, u) := \begin{bmatrix} f_1(x, u) \\ \\ f_2(x, u) \end{bmatrix} \quad , \qquad g(x, u) := h\, u\, x_1 \quad ,$$

il sistema S può ancora essere posto nella forma:

$$\boldsymbol{S :} \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) & \textit{equazione di stato} \\ \\ y(t) = g(x(t), u(t)) & \textit{equazione d'uscita} \end{cases} .$$

In questo caso, l'equazione di stato è un'equazione differenziale *vettoriale* del prim'ordine, mentre l'equazione d'uscita è, come sempre, un'equazione algebrica. Per risolvere l'equazione di stato su un assegnato intervallo di tempo $[0, T]$ - affinché sia possibile, cioè, determinare $x(t)$ per ogni $t \in [0, T]$ - non è sufficiente conoscere l'andamento dell'ingresso u su $[0, T]$. L'informazione mancante è il valore di x in un istante $t_0 \in [0, T]$; ad esempio, per $t_0 = 0$; vale a dire la conoscenza di $x_1(0)$ e di $x_2(0)$. Come ormai sappiamo, è questa proprietà che conferisce agli elementi del vettore x il carattere di variabili di stato.

Si chiama *ordine* di un sistema dinamico il numero delle sue variabili di stato (scalari), cioè il numero di elementi del vettore di stato, o anche, equivalentemente, il numero di "dimensioni" dello spazio di stato. L'ordine del sistema S non va confuso con l'ordine della sua equazione differenziale vettoriale di stato.

Il sistema preda-predatore che abbiamo appena ricavato è dunque un sistema dinamico (non lineare e tempo-invariante) del second'ordine.

***Esempio* 5**

Con riferimento al circuito di Fig.5.4, si vuol descrivere il legame fra la tensione v_1, presa come variabile d'ingresso e la tensione v_2, considerata come variabile d'uscita.

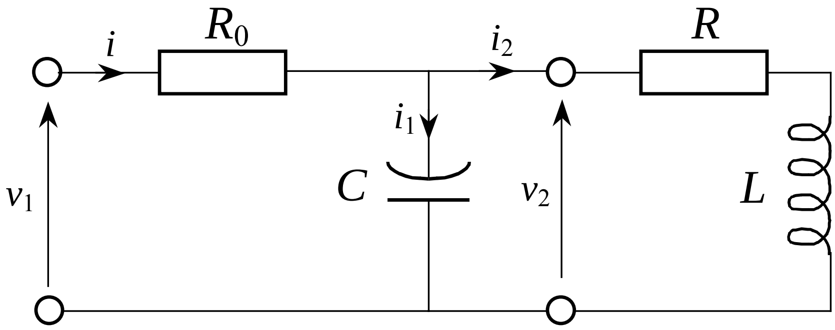


Fig. 5.4 : Un circuito elettrico.

Le "leggi" (o "principi") di Ohm e di Kirchhoff, opportunamente combinati, consentono di scrivere:

$$
\boldsymbol{S}: \quad \begin{cases} v_1(t) - R_0\, i(t) - v_2(t) = 0 \\[2ex] i(t) - i_1(t) - i_2(t) = 0 \\[2ex] i_1(t) = C\,\dfrac{dv_2}{dt}(t) \\[2ex] v_2(t) - R\, i_2(t) - L\,\dfrac{di_2}{dt}(t) = 0 \end{cases}
$$

Dalla prima equazione di S, ricaviamo:

$$i(t) = \frac{v_1(t) - v_2(t)}{R_0} \quad ;$$

dalla seconda (e dalla terza):

$$i_2(t) = i(t) - i_1(t) = \frac{v_1(t) - v_2(t)}{R_0} - C\,\frac{dv_2}{dt}(t) \quad ;$$

quindi,

$$\frac{di_2}{dt}(t) = \frac{1}{R_0}\left[\frac{dv_1}{dt}(t) - \frac{dv_2}{dt}(t)\right] - C\,\frac{d^2v_2}{dt^2}(t) \quad .$$

Sostituendo nell'ultima equazione di S, si ottiene:

$$v_2(t) - R\left[\frac{v_1(t) - v_2(t)}{R_0} - C\,\frac{dv_2}{dt}(t)\right] - L\left[\frac{1}{R_0}\left[\frac{dv_1}{dt}(t) - \frac{dv_2}{dt}(t)\right] - C\,\frac{d^2v_2}{dt^2}(t)\right] = 0 \quad .$$

Questa è un'equazione differenziale del second'ordine (lineare, a coefficienti costanti) nell'incognita v_2 (la variabile che abbiamo deciso di considerare come variabile d'uscita), nella quale, oltre a v_2 e a un certo numero di sue derivate, compare soltanto la variabile d'ingresso v_1 e un certo numero di sue derivate. Essa rappresenta il sistema dinamico *S*, descrivendo direttamente il legame fra le variabili d'ingresso e quelle d'uscita. Coerentemente, si dice che tale equazione costituisce una descrizione di *S* in *forma ingresso-uscita*.

Per mettere meglio in evidenza questo aspetto, poniamo come di consueto:

$$u := v_1 \quad , \quad y := v_2$$

e riscriviamo, ordinandone i termini e con la notazione di Newton, l'equazione differenziale che abbiamo appena ricavato:

$$\mathbf{S}: \quad L\,C\;\ddot{y}(t) + \left[\frac{L}{R_0} + R\,C\right]\dot{y}(t) + \left[1 + \frac{R}{R_0}\right]y(t) = \frac{L}{R_0}\,\dot{u}(t) + \frac{R}{R_0}\,u(t) \;\; .$$

Per risolvere su un assegnato intervallo di tempo $[0, T]$ una cosiffatta equazione non è sufficiente conoscere l'andamento dell'ingresso u sull'intervallo $[0, T]$. L'informazione mancante può, in questo caso, essere il valore iniziale di y e di $\dot{y}$. Appare dunque naturale dedurne che y e $\dot{y}$ possano essere assunte come un insieme di variabili di stato di *S* e che quindi l'ordine di *S* coincida con l'ordine dell'unica equazione differenziale *scalare* che ne costituisce una descrizione in forma ingresso-uscita.

Per esaminare meglio la non banale questione della relazione intercorrente fra le possibili descrizioni di *S* in forma normale e quelle in forma ingresso-uscita, chiediamoci innanzitutto se sia possibile, nel caso del circuito di Fig.5.4, porre *S* in forma normale. Per questo, ritorniamo a:

$$\mathbf{S}: \quad \begin{cases} v_1(t) - R_0\,i(t) - v_2(t) = 0 \\[2ex] i(t) - i_1(t) - i_2(t) = 0 \\[2ex] i_1(t) = C\,\dfrac{dv_2}{dt}(t) \\[2ex] v_2(t) - R\,i_2(t) - L\,\dfrac{di_2}{dt}(t) = 0 \;\; . \end{cases}$$

Dalla prima equazione avevamo già ricavato:

$$i(t) = \frac{v_1(t) - v_2(t)}{R_0} \;\; ;$$

dalla seconda, abbiamo:

$$i_1(t) = i(t) - i_2(t) = \frac{v_1(t) - v_2(t)}{R_0} - i_2(t) \; .$$

Sostituendo, la terza e la quarta equazione possono essere riscritte nel modo seguente :

$$\frac{dv_2}{dt}(t) = \frac{1}{C}\left[\frac{v_1(t) - v_2(t)}{R_0} - i_2(t)\right]$$

$$\frac{di_2}{dt}(t) = \frac{1}{L}\,[v_2(t) - R\, i_2(t)] \; .$$

Queste sono due equazioni differenziali scalari (lineari e a coefficienti costanti) del prim'ordine nelle incognite v_2 e i_2. Oltre a v_2 e a i_2, nelle due equazioni compare soltanto la variabile d'ingresso v_1. Tutto ciò suggerisce che v_2 e i_2 possano costituire un insieme di variabili di stato di S e che quelle appena scritte siano le corrispondenti equazioni di stato (scalari).

Seguendo la consuetudine, poniamo:

$$u := v_1 \quad , \quad y := v_2 \quad , \quad x_1 := v_2 \quad , \quad x_2 := i_2$$

e riscriviamo il sistema S nella forma seguente:

$$\boldsymbol{S}: \quad \begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\dfrac{1}{C\,R_0}\, x_1(t) - \dfrac{1}{C}\, x_2(t) + \dfrac{1}{C\,R_0}\, u(t) \\[2ex] \dot{x}_2(t) = \dfrac{1}{L}\, x_1(t) - \dfrac{R}{L}\, x_2(t) \\[2ex] y(t) = x_1(t) \; . \end{cases}$$

Se ora introduciamo il vettore di stato $x := [x_1 \quad x_2]'$, e definiamo:

$$A := \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{C\,R_0} & -\dfrac{1}{C} \\[2ex] \dfrac{1}{L} & -\dfrac{R}{L} \end{bmatrix} \quad , \quad B := \begin{bmatrix} \dfrac{1}{C\,R_0} \\[2ex] 0 \end{bmatrix}$$

$$C := [\,1 \quad 0\,] \; ,$$

e inoltre:

$f(x, u) := A\,x + B\,u$

$g(x) := C\,x$

è facile verificare che si è pervenuti a una descrizione di S in forma normale:

$$\boldsymbol{S}: \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) & \textit{equazione di stato} \\ \\ y(t) = g(x(t)) & \textit{equazione d'uscita}\ . \end{cases}$$

Più precisamente, si può concludere che S è un sistema

- dinamico in senso proprio, perchè g non dipende da u,
- del second'ordine, perchè ha due variabili di stato scalari (x_1 e x_2),
- lineare, perchè f e g sono funzioni lineari di x e u,
- tempo-invariante, perchè le matrici A, B e C sono costanti.

In generale, stabilire le relazioni che intercorrono fra forme normali e forme ingresso-uscita di un sistema dinamico non è semplice. Solo nel caso lineare è disponibile una teoria compiuta che consente di ricavare agevolmente, in ogni circostanza, la forma più conveniente per affrontare il particolare problema che si vuole risolvere. Alcuni importanti risultati di questa teoria verranno richiamati nei capitoli successivi.

Concludiamo con un breve ***sommario delle principali definizioni*** introdotte in questo paragrafo.

Una classe molto ampia di sistemi dinamici può essere ricondotta alla *forma normale*:

$$\boldsymbol{S}: \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) & \textit{equazione di stato} \\ \\ y(t) = g(x(t), u(t), t) & \textit{equazione d'uscita}\ , \end{cases}$$

dove x è un vettore n-dimensionale, u è un vettore m-dimensionale e y è un vettore p-dimensionale; f e g sono funzioni vettoriali a n e p componenti, rispettivamente. L'equazione di stato è un'equazione differenziale vettoriale del prim'ordine, ma l'*ordine del sistema* S è n.

Se f e g non dipendono da t, S è invariante nel tempo o *tempo-invariante*. In caso contrario, è variante nel tempo o *tempo-variante*.

Se f e g sono lineari in x e u, cioè se

$$f(x, u, t) = A(t)\, x + B(t)\, u$$
$$g(x, u, t) = C(t)\, x + D(t)\, u$$

per ogni (x, u, t) e per matrici $A(\cdot)$, $B(\cdot)$, $C(\cdot)$ e $D(\cdot)$ di dimensioni opportune, il sistema S è *lineare*. Se tali matrici sono costanti, il sistema S è lineare e tempo-invariante.

Se f e g non dipendono da u, cioè in assenza di variabili d'ingresso, il sistema S è detto *libero*. Un sistema libero tempo-invariante è detto *autonomo*.

Se è presente un ingresso u, eventualmente vettoriale, ma g non dipende da u, S è un sistema *dinamico in senso proprio* (o puramente dinamico). Altrimenti, è *dinamico in senso improprio* (in quanto sede di una componente "non dinamica").

Un sistema dinamico è in *forma ingresso-uscita* se è descritto da equazioni nelle quali compaiono esclusivamente le variabili d'ingresso, d'uscita e loro derivate:

$$\boldsymbol{S}: \quad F(y(t), \dot{y}(t), \ddot{y}(t), \dots, y^{(q)}(t), u(t), \dot{u}(t), \ddot{u}(t), \dots, u^{(r)}(t), t) = 0 \quad , \quad r \le q \; ;$$

in quest'ultima equazione si è adottata, per comodità, la notazione:

$$z^{(h)}(t) := \frac{d^h z}{dt^h}(t) \; .$$

Se la funzione F non dipende da t, S è tempo-invariante; se è lineare in y, u e le loro derivate, S è lineare.

6. *Movimenti di un sistema dinamico, stati e condizioni di equilibrio*

Consideriamo un sistema dinamico S (tempo-invariante):

$$\boldsymbol{S}: \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) & \textit{equazione di stato} \\ y(t) = g(x(t), u(t)) & \textit{equazione d'uscita} \; . \end{cases}$$

L'andamento di x, a partire dall'istante iniziale t_0=0 e dallo stato iniziale $x(0)$, sotto l'azione di un particolare ingresso $u(\cdot)$, è detto *movimento* (dello stato) di S. Il corrispondente andamento dell'uscita y è detto movimento dell'uscita. Ovviamente, i movimenti possibili dello stato e dell'uscita di S sono tanti quanti sono i valori ammissibili dello stato iniziale e gli andamenti ammissibili dell'ingresso. Il movimento dell'uscita è anche detto *risposta* di S all'ingresso $u(\cdot)$, a partire dallo stato iniziale $x(0)$; se taciuto, è comunemente inteso che lo stato iniziale sia l'origine: $x(0) = 0$.

Nonostante la possibile confusione indotta dall'apparente bisticcio, uno *stato di equilibrio* è un movimento costante. Più precisamente, gli stati di equilibrio di S corrispondenti all'ingresso costante $u(t) = \bar{u}$ sono le (eventuali) soluzioni costanti dell'equazione di stato; sono, cioè, le soluzioni dell'equazione:

$$f(x, \bar{u}) = 0 \quad .$$

In altre parole, un punto $\bar{x}$ dello spazio di stato è uno stato di equilibrio di S corrispondente all'ingresso costante $u(t) = \bar{u}$ se il movimento di S prodotto da $u(t) = \bar{u}$ a partire da $x(0) = \bar{x}$ è $x(t) = \bar{x}$ (per ogni $t > 0$).

Se $\bar{u}$ è un valore costante dell'ingresso e $\bar{x}$ è uno stato di equilibrio di S corrispondente all'ingresso $\bar{u}$, il valore costante dell'uscita $y(t) = \bar{y} := g(\bar{x}, \bar{u})$ può essere indicato come *uscita di equilibrio*. Con l'espressione *condizione di equilibrio* di S fa invece più genericamente riferimento alla terna $(\bar{u}, \bar{x}, \bar{y})$. La relazione esistente, in condizione di equilibrio, fra $\bar{u}$ e $\bar{y}$ è detta *caratteristica statica* di S. Essa coincide con la caratteristica ingresso-uscita del sistema "non dinamico" che si ottiene da S ponendo: $\dot{x}(t) = 0$.

Esempio

Si consideri una barra rettangolare di massa m, incernierata a un'estremità e mossa, in un piano verticale, da una coppia u (Fig.6.1). Sia J il momento d'inerzia della barra rispetto al perno e L la distanza di quest'ultimo dal baricentro della barra. Indicando con A il coefficiente d'attrito (supposto per semplicità di tipo viscoso) e con g l'accelerazione di gravità, la "legge" di Newton (per moti rotatori) porta a scrivere:

$$J\,\ddot{\vartheta}(t) + A\,\dot{\vartheta}(t) + m\,g\,L\,sin(\vartheta(t)) = u(t) \,.$$

Questa è un'equazione differenziale non lineare a coefficienti costanti del second'ordine. In particolare, se consideriamo l'angolo ϑ come variabile di uscita ($y := \vartheta$), possiamo concludere che si tratta di un sistema dinamico S tempo-invariante, non lineare, in forma ingresso-uscita, del second'ordine.

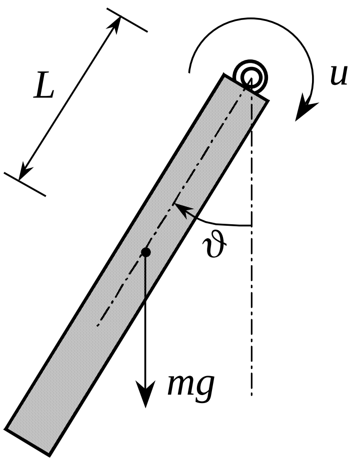


Fig. 6.1 : Pendolo.

Almeno nel caso in esame, è facile tuttavia passare alla forma normale adottando come variabili di stato la posizione angolare ϑ e la sua derivata rispetto al tempo. Infatti, se poniamo: $x_1 := \vartheta$, $x_2 := \dot\vartheta$, e $x := [x_1 \quad x_2]'$, si ha:

$$\dot x(t) = \begin{bmatrix} \dot x_1(t) \\ \dot x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot\vartheta(t) \\ \ddot\vartheta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot\vartheta(t) \\ -\frac{A}{J}\dot\vartheta(t) - \frac{m\,g\,L}{J}\,sin(\vartheta(t)) + \frac{1}{J}u(t) \end{bmatrix}$$

poiché l'equazione: $J\,\ddot\vartheta(t) + A\,\dot\vartheta(t) + m\,g\,L\,sin(\vartheta(t)) = u(t)$ equivale a:

$$\ddot\vartheta(t) = -\frac{A}{J}\dot\vartheta(t) - \frac{m\,g\,L}{J}\,sin(\vartheta(t)) + \frac{1}{J}u(t)\,.$$

Pertanto, ricordando che $x_1 := \vartheta$ e $x_2 := \dot\vartheta$, si ha:

$$\dot x(t) = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -\frac{A}{J}x_2(t) - \frac{m\,g\,L}{J}\,sin(x_1(t)) + \frac{1}{J}u(t) \end{bmatrix} \quad , \qquad y(t) = x_1(t) \qquad ;$$

infine, ponendo:

$$f_1(x, u) := x_2 \quad , \quad f_2(x, u) := -\frac{A}{J}x_2 - \frac{m\,g\,L}{J}\,sin(x_1) + \frac{1}{J}u \quad ,$$

$$f(x, u) := [\, f_1(x, u) \quad f_2(x, u)\,]' \quad , \quad g(x) := x_1$$

perveniamo alla conclusione che il pendolo di Fig.5.1 può anche essere descritto dal sistema in forma normale

$$\boldsymbol{S}: \begin{cases} \dot x(t) = f(x(t), u(t)) & \textit{equazione di stato} \\ y(t) = g(x(t)) & \textit{equazione d'uscita}\ . \end{cases}$$

Gli stati di equilibrio di S corrispondenti a un valore costante $\bar u$ della coppia motrice sono le eventuali soluzioni dell'equazione $f(x, \bar u) = 0$; cioè:

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ -\frac{A}{J}x_2 - \frac{m\,g\,L}{J}\,sin(x_1) + \frac{1}{J}\bar u = 0 \end{cases} .$$

In vista della prima, la seconda equazione diventa: $sin(x_1) = \bar u/(m\ g\ L)$ e ha soluzione se e solo se $|\bar u/(m\,g\,L)| \le 1$; cioè, se e solo se $|\bar u| \le m\,g\,L$.

Se questa condizione è soddisfatta, l'equazione $sin(x_1) = \bar{u}/(m\ g\ L)$ ha infinite soluzioni. Una breve riflessione dovrebbe tuttavia convincere che tutte le soluzioni differiscono da quelle che cadono nell'intervallo $(-\pi, \pi]$ di un multiplo di 2π, sicché solo queste ultime sono effettivamente interessanti. In ogni caso, esse sono date da:

$$\bar{x}_1 = \bar{y} := arcsin(\bar{u}/(m\ g\ L))$$

$$\bar{x}_2 = 0\ .$$

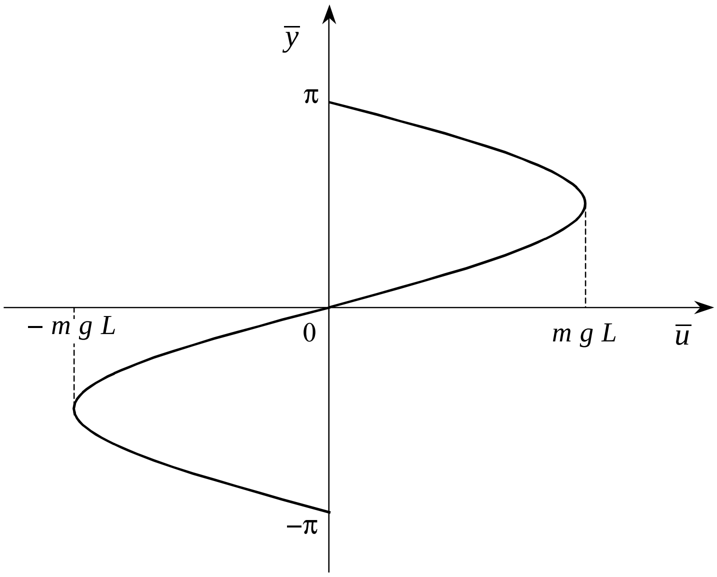


Fig. 6.2 : Caratteristica statica ($\bar{y}\in(-\pi, \pi]$).

La parte significativa, quella cioè con $\bar{y}\in(-\pi, \pi]$, della caratteristica statica del pendolo è mostrata in Fig.6.2. Possiamo ora chiederci se tale caratteristica poteva essere ricavata analizzando direttamente la forma ingresso-uscita del sistema, senza ottenerne preliminarmente una forma normale come fatto fin qui.

Con la posizione $y := \vartheta$, la forma ingresso-uscita di S diventa:

$$\textbf{\textit{S}}\ \textbf{:} \qquad J\,\ddot{y}(t) + A\,\dot{y}(t) + m\ g\ L\ sin(y(t)) = u(t)\ .$$

Se definiamo :

$$F(y, \dot{y}, \ddot{y}, u) := J\,\ddot{y} + A\,\dot{y} + m\ g\ L\ sin(y) - u$$

è evidente che

$$\textbf{\textit{S}}\ \textbf{:} \qquad F(y(t), \dot{y}(t), \ddot{y}(t), u(t)) = 0\ .$$

Gli andamenti costanti di y che, in condizione di equilibrio, corrispondono all'ingresso costante $u(t) = \bar{u}$ sono evidentemente le soluzioni dell'equazione:

$$F(y, 0, 0, \bar{u}) = 0$$

nell'incognita y.

Sono cioè le soluzioni dell'equazione:

$m\, g\, L\, sin(y) - \overline{u} = 0$.

Come abbiamo già visto, questa equazione ammette soluzioni se e solo se è verificata la condizione $|\overline{u}| \leq m\, g\, L$, e nell'intervallo $(-\pi, \pi]$ le soluzioni $\overline{y}$ sono date dalla caratteristica statica di Fig.6.2.

7. *Modello lineare tangente a un sistema dinamico S in una condizione di equilibrio*

Sia $(\overline{u}, \overline{x}, \overline{y})$ una particolare condizione di equilibrio del sistema dinamico, non lineare e tempo-invariante

$$\boldsymbol{S:} \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) & \textit{equazione di stato} \\ y(t) = g(x(t), u(t)) & \textit{equazione d'uscita}\ ; \end{cases}$$

sia cioè $\overline{u}$ un valore costante dell'ingresso, $\overline{x}$ uno stato di equilibrio di S corrispondente a $\overline{u}$, e $\overline{y}$ il valore costante assunto dall'uscita nello stato di equilibrio considerato. Pertanto sarà: $f(\overline{x}, \overline{u}) = 0$, $\overline{y} = g(\overline{x}, \overline{u})$.

In analogia con quanto visto per sistemi non dinamici, ci chiediamo se, almeno in prossimità della condizione di equilibrio considerata, il comportamento di S possa essere descritto con buona approssimazione da un modello lineare. Per questo, poniamo:

$$\delta u(t) := u(t) - \overline{u} \quad , \quad \delta x(t) := x(t) - \overline{x} \quad , \quad \delta y(t) := y(t) - \overline{y}$$

e osserviamo che

1) $\delta\dot{x}(t) = \dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$

2) $\delta y(t) := y(t) - \overline{y} = g(x(t), u(t)) - g(\overline{x}, \overline{u})$

dopodiché, sviluppando f e g con la formula di Taylor attorno al punto $(\overline{x}, \overline{u})$ e troncando lo sviluppo ai soli termini di ordine non superiore al primo, abbiamo:

$$f(x, u) \cong f(\overline{x}, \overline{u}) + \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}, \overline{u})\ \delta x + \frac{\partial f}{\partial u}(\overline{x}, \overline{u})\ \delta u = \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}, \overline{u})\ \delta x + \frac{\partial f}{\partial u}(\overline{x}, \overline{u})\ \delta u$$

$$g(x, u) \cong g(\bar{x}, \bar{u}) + \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x}, \bar{u})\ \delta x + \frac{\partial g}{\partial u}(\bar{x}, \bar{u})\ \delta u$$

$$\Rightarrow \qquad g(x, u) - g(\bar{x}, \bar{u}) \cong \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x}, \bar{u})\ \delta x + \frac{\partial g}{\partial u}(\bar{x}, \bar{u})\ \delta u\ .$$

In prossimità della condizione di equilibrio considerata, il comportamento del sistema S può quindi essere adeguatamente descritto da:

$$\delta S : \qquad \begin{cases} \delta\dot{x}(t) = A\ \delta x(t) + B\ \delta u(t) \\ \delta y(t) = C\ \delta x(t) + D\ \delta u(t) \end{cases}$$

dove :

$$A := \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{u}) \quad , \quad B := \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x}, \bar{u}) \quad , \quad C := \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x}, \bar{u}) \quad , \quad D := \frac{\partial g}{\partial u}(\bar{x}, \bar{u})\ .$$

Il sistema dinamico lineare e tempo-invariante δS è detto *modello lineare tangente a S in* $(\bar{u}, \bar{x})$ *o, più in generale, nella condizione di equilibrio* $(\bar{u}, \bar{x}, \bar{y})$.

***Esempio* 1**

Consideriamo di nuovo il pendolo di Fig.5.1 e supponiamo che sia: $u(t) = \bar{u} = 0$. Abbiamo visto nel paragrafo precedente che, nell'intervallo $(-\pi, \pi]$, esistono due stati di equilibrio del sistema non lineare S con il quale abbiamo descritto il comportamento del pendolo:

$$\bar{x}_a := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad , \qquad \bar{x}_b := \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix} \qquad ;$$

corrispondentemente: $\bar{y}_a = 0$, $\bar{y}_b = \pi$. Vogliamo costruire i modelli lineari δS_a e δS_b tangenti a S nelle due condizioni di equilibrio $(0, \bar{x}_a, \bar{y}_a)$ e $(0, \bar{x}_b, \bar{y}_b)$.

Per questo, ricordiamo che:

$$f_1(x, u) := x_2 \quad , \quad f_2(x, u) := -\frac{A}{J}\,x_2 - \frac{m\,g\,L}{J}\,sin(x_1) + \frac{1}{J}\,u \quad ; \quad g(x) := x_1 \quad .$$

Quindi,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,u) := \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x,u) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x,u) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x,u) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x,u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{m\,g\,L}{J}\,cos(x_1) & -\frac{A}{J} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x,u) := \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}(x,u) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}(x,u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,u) := \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1}(x,u) & \frac{\partial g}{\partial x_2}(x,u) \end{bmatrix} = [\,1 \quad 0\,] \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial u}(x,u) = 0 \ .$$

e pertanto:

$$A_a := \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}_a, \bar{u}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{m\,g\,L}{J} & -\frac{A}{J} \end{bmatrix} \quad , \quad A_b := \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}_b, \bar{u}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{m\,g\,L}{J} & -\frac{A}{J} \end{bmatrix}$$

$$B_a := \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x}_a, \bar{u}) = B_b := \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x}_b, \bar{u}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix}$$

$$C_a := \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x}_a, \bar{u}) = C_b := \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x}_b, \bar{u}) = [\,1 \quad 0\,]$$

$$D_a := \frac{\partial g}{\partial u}(\bar{x}_a, \bar{u}) = D_b := \frac{\partial g}{\partial u}(\bar{x}_b, \bar{u}) = 0 \ .$$

In definitiva, i sistemi δS_a e δS_b differiscono soltanto per il segno del primo elemento della seconda riga della matrice A. Vedremo tuttavia nel prossimo capitolo come questa differenza sia tutt'altro che insignificante.

Prima di concludere, ci chiediamo se per costruire il modello lineare tangente a un sistema dinamico S non lineare e tempo-invariante ma in forma ingresso uscita sia necessario porre preventivamente S in forma normale.

La risposta è negativa: il passaggio per la forma normale non è necessario. Lo mostriamo con un esempio, lasciando al lettore di cogliere la generalità del procedimento.

***Esempio* 2**

Consideriamo ancora una volta il pendolo di Fig.5.1 per il quale abbiamo già ricavato (Paragrafo 5) il seguente modello in forma ingresso-uscita:

$$\boldsymbol{S} : \qquad F(y(t), \dot{y}(t), \ddot{y}(t), u(t)) = 0 \qquad ,$$

con

$$F(y, \dot{y}, \ddot{y}, u) := J\,\ddot{y} + A\,\dot{y} + m\,g\,L\,sin(y) - u \ .$$

Sia ora $(\bar{y}, 0, 0, \bar{u})$ una condizione di equilibrio di S; sia, cioè, $\bar{y}$ una soluzione dell'equazione $F(y, 0, 0, \bar{u}) = 0$. Sviluppando F con la formula di Taylor attorno al punto $(\bar{y}, 0, 0, \bar{u})$ e troncando lo sviluppo ai soli termini di ordine non superiore al primo, abbiamo:

$$\begin{aligned} F(y, \dot{y}, \ddot{y}, u) &\cong F(\bar{y}, 0, 0, \bar{u}) + \frac{\partial F}{\partial y}(\bar{y}, 0, 0, \bar{u})\,\delta y + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}(\bar{y}, 0, 0, \bar{u})\,\delta\dot{y} + \\ &\quad + \frac{\partial F}{\partial \ddot{y}}(\bar{y}, 0, 0, \bar{u})\,\delta\ddot{y} + \frac{\partial F}{\partial u}(\bar{y}, 0, 0, \bar{u})\,\delta u = \\ &= \frac{\partial F}{\partial y}(\bar{y}, 0, 0, \bar{u})\,\delta y + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}(\bar{y}, 0, 0, \bar{u})\,\delta\dot{y} + \frac{\partial F}{\partial \ddot{y}}(\bar{y}, 0, 0, \bar{u})\,\delta\ddot{y} + \frac{\partial F}{\partial u}(\bar{y}, 0, 0, \bar{u})\,\delta u. \end{aligned}$$

Si noti che le differenze delle derivate ($\delta\dot{y}$ e $\delta\ddot{y}$) sono uguali alle derivate delle differenze ($\dot{\delta y}$ e $\ddot{\delta y}$). Pertanto, in prossimità della condizione di equilibrio considerata, il comportamento di S può essere descritto dal modello:

$$\boldsymbol{\delta S} : \qquad \alpha_0\,\ddot{\delta y}(t) + \alpha_1\,\dot{\delta y}(t) + \alpha_2\,\delta y(t) + \beta\,\delta u(t) = 0$$

dove:

$$\alpha_0 := \frac{\partial F}{\partial \ddot{y}}(\bar{y}, 0, 0, \bar{u}) = J \quad , \quad \alpha_1 := \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}(\bar{y}, 0, 0, \bar{u}) = A$$

$$\alpha_2 := \frac{\partial F}{\partial y}(\bar{y}, 0, 0, \bar{u}) = m\,g\,L\,cos(\bar{y}) \quad , \quad \beta := \frac{\partial F}{\partial u}(\bar{y}, 0, 0, \bar{u}) = -1 \ .$$

Il modello lineare δS tangente a S nella condizione di equilibrio $(\bar{y}, 0, 0, \bar{u})$ è un sistema dinamico lineare, tempo-invariante, in forma ingresso-uscita.

In particolare, sappiamo che le uscite di equilibrio di S nell'intervallo $(-\pi, \pi]$ corrispondenti a $u(t) = \bar{u} = 0$ sono due: $\bar{y}_a = 0$ e $\bar{y}_b = \pi$. Nelle due condizioni di equilibrio: $(\bar{y}_a, 0, 0, \bar{u})$ e $(\bar{y}_b, 0, 0, \bar{u})$ si ha:

$$\boldsymbol{\delta S_a :} \qquad J\, \delta\ddot{y}(t) + A\, \delta\dot{y}(t) + m\, g\, L\, \delta y(t) - \delta u(t) = 0$$

$$\boldsymbol{\delta S_b :} \qquad J\, \delta\ddot{y}(t) + A\, \delta\dot{y}(t) - m\, g\, L\, \delta y(t) - \delta u(t) = 0$$

I due sistemi differiscono solo per il segno di uno dei coefficienti che compaiono nell'equazione. Vedremo nel seguito come questa differenza sia, ancora una volta, tutt'altro che insignificante.

8. *Il problema della stabilità*

Nel linguaggio naturale, la parola *stabilità* e tutti gli aggettivi e gli avverbi che ne derivano hanno una notevole ampiezza, varietà e densità di significati, difficili da definire e dai confini incerti.

In ambito tecnico-scientifico questo stato di cose, questa naturale e spesso suggestiva ambiguità, connessa all'accavallarsi di significati diversi e al mutevole potere evocativo delle parole, non è accettabile. Per impossessarsi di un sapere affidabile e cercare di ampliarne i confini, occorre sforzarsi di essere precisi; persino nel descrivere l'incertezza.

In passato, ci sono stati numerosi tentativi di rendere inequivoca ed efficace, nel contesto dei problemi che riguardano sistemi dinamici, la nozione di stabilità; e nulla fa pensare che tali tentativi non debbano continuare. Tuttavia, l'impostazione che finora ha riscosso, nel mondo, la più ampia adesione e ha consentito di ottenere i risultati migliori è quella proposta oltre un secolo fa, nella sua tesi di laurea, dal matematico russo Alexander Mikhailovich Liapunov. In termini contemporanei, essa consiste nell'applicare la nozione di stabilità ai *movimenti dello stato* di un sistema dinamico, concentrando quindi l'attenzione sulla sola equazione di stato. Prima di dare le definizioni di Liapunov relative alla stabilità, o instabilità, del movimento, vediamo di coglierne in modo informale l'idea di fondo. Per farlo, concentriamo l'attenzione su un sistema dinamico tempo-invariante:

$$\boldsymbol{S :} \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) & \textit{equazione di stato} \\[2ex] y(t) = g(x(t), u(t)) & \textit{equazione d'uscita .} \end{cases}$$

generalmente non lineare. Poiché S è tempo-invariante, possiamo (senza ledere la generalità) far coincidere l'origine dell'asse dei tempi con l'inizio delle nostre osservazioni (t_0=0).

Seguendo l'impostazione di Liapunov, concentriamo l'attenzione sull'equazione di stato. Precisamente, sia $\tilde{x}(\cdot)$ un particolare movimento di S, prodotto da un particolare andamento $\tilde{u}(\cdot)$ dell'ingresso, a partire da un particolare stato iniziale $x(0) = \tilde{x}_0$. Sia cioè, per ogni t:

$$\tilde{x}(t) = \varphi(t; \tilde{x}_0, \tilde{u}_{[0,\, t)}(\cdot)) \quad .$$

Supponiamo ora che *lo stato iniziale* (**non** l'ingresso!) subisca una perturbazione δx_0 e consideriamo il *movimento perturbato* $x_p(\cdot)$ che ne consegue; per ogni t:

$$x_p(t) = \varphi(t; \tilde{x}_0 + \delta x_0, \tilde{u}_{[0,\, t)}(\cdot)) \quad .$$

Diremo che il movimento $\tilde{x}(\cdot)$ è *stabile* se, qualunque sia la "direzione" di δx_0, è possibile, pur di ridurne quanto basta la "grandezza", far sì che la differenza fra il movimento perturbato e il movimento originario risulti piccola a piacere. Altrimenti, è *instabile*.

Il movimento $\tilde{x}(\cdot)$ è *asintoticamente stabile* se è stabile e se, qualunque sia la "direzione" di δx_0, accade che, almeno per perturbazioni δx_0 sufficientemente piccole (ma non nulle), la differenza fra il movimento perturbato e quello originario svanisce al tendere di t all'infinito.

Per dare una definizione compatta e sufficientemente rigorosa di stabilità del movimento, poniamo:

$$\delta x(t) := x_p(t) - \tilde{x}(t)$$

e ricordiamo che la "grandezza" di un vettore $z \in \mathbf{R}^n$ è ben espressa dalla sua norma $||z|| := \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2}$. La definizione che segue riecheggia, per così dire, quella di continuità di una funzione; essa mette in luce come la stabilità equivalga a una specie di continuità in $\tilde{x}_0$ del modo in cui il movimento dipende dallo stato iniziale. Il simbolo "$\Rightarrow$" è da leggersi come "implica".

Definizione (*Stabilità del movimento*)

- Il movimento $\tilde{x}(\cdot)$ è ***stabile*** se, dato $\varepsilon > 0$ (da pensarsi arbitrariamente piccolo), è possibile determinare $\delta > 0$ (da pensarsi minore di ε) tale che:

$$\|\delta x_0\| < \delta \quad \Rightarrow \quad (\|\delta x(t)\| < \varepsilon \quad , \quad \forall t \geq 0) \; ;$$

in altri termini, $\tilde{x}(\cdot)$ è stabile se la sua distanza dal movimento perturbato risulta permanentemente minore di ε ogni volta che la perturbazione dello stato iniziale è di grandezza inferiore a δ (Fig.8.1).

- Se non è stabile, il movimento $\tilde{x}(\cdot)$ si dice ***instabile***.
- Il movimento $\tilde{x}(\cdot)$ è ***asintoticamente stabile*** se è stabile e se:

$$\lim_{t \to \infty} \delta x(t) = 0 \quad , \quad \forall \delta x_0 : \|\delta x_0\| < \delta \; ;$$

cioè se la differenza fra moto perturbato e moto originario si annulla all'infinito, qualunque sia stata la perturbazione dello stato iniziale, purché sufficientemente piccola.

- Se $\tilde{x}(\cdot)$ è un movimento *asintoticamente stabile* di S, si chiama *bacino di attrazione* di $\tilde{x}(\cdot)$ l'insieme dei punti dello spazio di stato che, presi come stato iniziale, producono un movimento perturbato $x_p(t)$ la cui distanza da $x(t)$ tende a zero per t che tende all'infinito. Se il bacino di attrazione coincide con l'intero spazio di stato, il movimento $\tilde{x}(\cdot)$ si dice *globalmente stabile*.

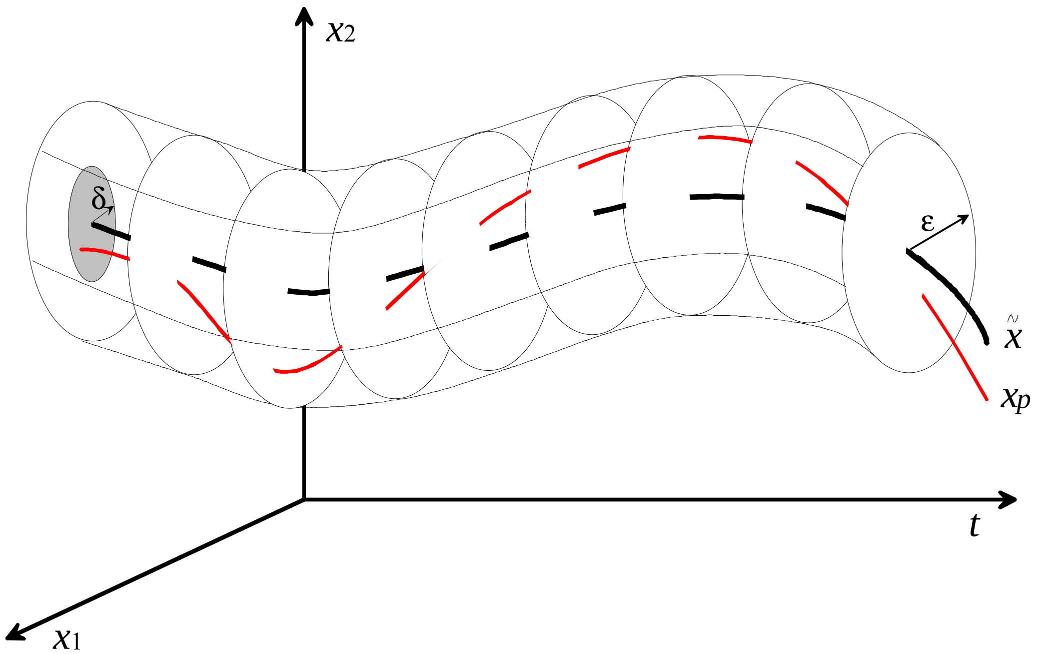


Fig. 8.1 : Stabilità del movimento (n=2).

Concludiamo questo paragrafo con due osservazioni.

Osservazione* 1.** Fra i possibili movimenti dello stato di un sistema, sono particolarmente interessanti i *movimenti costanti*, cioè gli stati di ***equilibrio, corrispondenti a un ingresso costante $\bar{u}$. Questa osservazione suggerisce immediatamente come, dalle definizioni generali di stabilità del movimento, ne discendano di più particolari (ma concettualmente identiche) riguardanti la ***stabilità dell'equilibrio***.

Osservazione* 2.** Nel medesimo sistema possono coesistere movimenti stabili (asintoticamente) e movimenti instabili. Ad esempio, il pendolo considerato nel Paragrafo 5 del Capitolo 1 ha due (insiemi di) stati di equilibrio: uno stabile (asintoticamente, se $A > 0$) e uno instabile (si faccia, per semplicità, riferimento al caso in cui la coppia u è nulla). Se in un sistema coesistono movimenti stabili e movimenti instabili, non ha senso parlare di stabilità (o instabilità) *del sistema*. Un ***sistema può dirsi *stabile* (*asintoticamente stabile*) solo se ***tutti*** i suoi possibili movimenti sono stabili (asintoticamente stabili).

9. *Considerazioni conclusive*

Il punto di partenza di questo primo capitolo è la nozione di modello matematico, inteso come strumento per descrivere, approssimativamente, alcuni aspetti significativi dei comportamenti ricorrenti in un particolare settore del mondo reale (sistema fisico). I modelli matematici sono anche detti sistemi. Per utilizzarli con efficacia, occorre conoscerne le principali rappresentazioni (forma canonica e forma ingresso-uscita) e le proprietà caratterizzanti. Occorre, cioè, acquisire familiarità con i connotati che ne determinano le classificazioni primarie: sistemi dinamici (in senso proprio o improprio) o non dinamici, varianti o invarianti nel tempo, lineari o non lineari, liberi (autonomi) o forzati. Per introdurre questi ed altri concetti, ci siamo avvalsi di un ampio ventaglio di esempi (Paragrafi 2, 3 e 5). Le principali definizioni sono ricordate in un breve sommario al termine del Paragrafo 5. Il sesto paragrafo è stato dedicato alle nozioni di movimento, risposta ed equilibrio, mentre il quarto e il settimo hanno affrontato l'importante questione della costruzione di un'approssimazione lineare, valida in vicinanza di un punto di lavoro o di una condizione di equilibrio. L'ultimo paragrafo è dedicato al problema della stabilità.