

***Capitolo 7***  
***Sistemi lineari tempo-invarianti:***  
***progetto di massima del controllore***

## 1. Introduzione

In questo capitolo vedremo come si possa impostare il progetto di massima del controllore per un sistema di controllo lineare, tempo-invariante e monovariabile. Seguendo l'impostazione classica del problema, il progetto avviene *per tentativi ragionati*; per tentativi, cioè, guidati da una conoscenza non superficiale dei risultati di analisi ottenuti nel capitolo precedente.

Per conferire un'adeguata razionalità al progetto, la successione di tentativi nei quali esso si sviluppa devono essere intesi ad ottenere una soluzione soddisfacente del problema o a riconoscere che una soluzione compiutamente soddisfacente non esiste. A questo scopo, occorre innanzitutto dare una formulazione precisa ai principali obiettivi che il progettista deve perseguire. Occorre, cioè, tradurre in termini tecnicamente rispettabili ed intellettualmente onesti le esigenze di chi utilizzerà il sistema di controllo, spesso da lui stesso percepite ed espresse in modo vago e parziale, per non dire erroneo o velleitario. Il risultato di questa traduzione, che ovviamente precede il progetto condizionandolo a volte in modo determinante, consiste in un elenco di *specifiche* che non esaurisce, si badi bene, la totalità delle condizioni che caratterizzano un buon sistema di controllo, ma che, con riferimento ad un insieme consistente di *indici di prestazione*, dà una veste *quantitativa* alle principali esigenze che il sistema dovrà in definitiva soddisfare. Un insieme di indici di prestazione può dirsi consistente se, attribuendo al valore di ognuno di loro un minimo o un massimo o un opportuno intervallo di appartenenza, è possibile indicare in forma quantitativa i limiti entro i quali tutti i principali compromessi fra esigenze apparentemente contrapposte possono trovare nel progetto un'adeguata soluzione. Accanto alle esigenze principali, espresse da precise specifiche di progetto, esisterà poi una serie di esigenze addizionali, spesso formulate "a parole", in forma prevalentemente qualitativa, che abitualmente vengono prese in considerazione non tanto nell'impostazione di massima del progetto quanto nella successiva fase di messa a punto e verifica di dettaglio del progetto stesso. In questa seconda fase prevalgono, ovviamente, i connotati specifici della particolare applicazione presa in considerazione e del contesto nella quale essa s'inserisce: particolarità, queste ultime, delle quali è difficile render conto in una presentazione a carattere generale ed introduttivo. Basti qui sottolineare l'importanza, in questa seconda fase di messa a punto del progetto, degli strumenti di *simulazione* del sistema di controllo: essi consentono di non lasciare del tutto in disparte i molti aspetti che, pur non essendo propriamente irrilevanti o marginali, non possono trovare adeguata espressione nelle specifiche formali.

Dovrebbe risultare fin d'ora sufficientemente chiaro, alla luce di quanto appena delineato, che l'impostazione classica del progetto di un sistema di controllo non mira a trovare una soluzione ottima del problema (rispetto a un non ben definito indice di merito) quanto piuttosto a trovare una soluzione ammissibile: una soluzione, cioè, semplicemente rispettosa di tutti i vincoli e di tutte le specifiche (formali e non) che caratterizzano il problema. Nel descrivere gli obiettivi che il progetto si sforza di perseguire, i verbi minimizzare o massimizzare vanno dunque onestamente usati con molta cautela.

## 2. Specifiche di progetto

Alla luce dell'analisi svolta nel capitolo precedente, si comprende come (sotto le ipotesi del criterio di Bode) le principali specifiche di progetto possano essere formulate nel modo seguente.

### 2.1 Specifiche dinamiche

Una specifica essenziale riguarda il *margin di fase* per il quale si richiede spesso un valore maggiore o uguale a  $50^\circ$ , ma molto raramente maggiore di  $70^\circ$ :

$$\varphi_m \geq \varphi_{min} \quad , \quad \varphi_{min} = 45^\circ \div 80^\circ .$$

Una seconda specifica altrettanto importante riguarda l'*ampiezza minima della banda passante* (eventualmente ricavabile, come s'è visto, da una condizione sulla durata massima dei transitori):  $\omega_c \geq \omega_{min}$ . A volte, per limitare l'intensità dell'azione di controllo e degli errori prodotti da disturbi additivi in alta frequenza agenti sulla linea di retroazione, è opportuno limitare anche superiormente l'ampiezza della banda passante con una specifica del tipo:

$$\omega_{min} \leq \omega_c \leq \omega_{max} .$$

In qualche caso, i limiti superiore o inferiore che devono essere rispettati dalla pulsazione critica non sono espressi in modo esplicito, ma sono implicitamente indotti da altre clausole eventualmente presenti nelle specifiche di progetto, come verrà mostrato nel successivo sottoparagrafo 2.3.

### 2.2 Specifiche statiche

Il valore assoluto dell'errore effettivo *a transitorio esaurito* prodotto da:

$$c^\circ(t) = A^\circ \operatorname{can}(t) \quad , \quad |A^\circ| \leq A_{max}^\circ$$

$$\delta q_a(t) = A_a \operatorname{can}(t) \quad , \quad |A_a| \leq A_{amax}$$

$$\delta q_r(t) = A_r \text{can}(t) \quad , \quad |A_r| \leq A_{rmax}$$

dove con  $\text{can}(t)$  si è indicato uno dei segnali canonici (scalino, rampa, parabola), non deve superare, nel caso peggiore, un assegnato valore massimo:

$$|\varepsilon_\infty| \leq \varepsilon_{max} .$$

Questo tipo di specifica non deve essere confuso con quello, apparentemente analogo, che riguarda il comportamento a transitorio esaurito sotto l'azione di ingressi (variabile di riferimento o disturbi additivi) periodici (ad esempio, sinusoidali). Infatti, in un sistema lineare asintoticamente stabile, un ingresso periodico determina, a transitorio esaurito, un *regime periodico* strettamente legato alle risposte in frequenza, e quindi alle funzioni di trasferimento, del sistema stesso. Indissolubilmente legato, cioè, al comportamento *dinamico* del sistema stesso.

### 2.3 Altre specifiche

In aggiunta a quelle citate o, come già accennato, in sostituzione di alcune di esse, possono essere formulate, in vari casi, specifiche di diversa natura.

#### *Errore massimo in regime periodico*

Se sul sistema di controllo agisce un segnale periodico (tipicamente sinusoidale) può essere richiesto che l'ampiezza massima della risposta periodica espressa dall'errore effettivo (vale a dire del contributo dato da questo ingresso all'errore effettivo in regime periodico), sommata al valore assoluto dell'errore massimo a transitorio esaurito prodotto dagli altri segnali d'ingresso, non superi una soglia assegnata. Questo tipo di specifica induce un limite superiore sul modulo della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento del sistema di controllo, dall'ingresso periodico considerato all'errore effettivo. E' di solito interessante tradurre (magari avvalendosi di costruzioni approssimate) questo limite superiore in un limite equivalente sul modulo della risposta in frequenza d'anello.

#### *Attenuazione di un disturbo additivo sulla linea d'andata*

Può essere richiesto che, su una banda assegnata  $(\omega_1, \omega_2)$ , lo spettro del contributo di  $\tilde{\delta}_a$  all'errore effettivo sia inferiore ad  $\alpha$  volte lo spettro di  $\tilde{\delta}_a$ , con  $\alpha < 1$ . Alla luce di quanto abbiamo visto, questo si ottiene imponendo che, sulla banda  $(\omega_1, \omega_2)$ , si abbia:  $|L(j\omega)| > 1/\alpha$ . Di conseguenza,  $(\omega_1, \omega_2)$  dovrà essere compreso nella banda passante  $(\omega_2 < \omega_c)$ .

### *Attenuazione di un disturbo additivo sulla linea d'andata*

Analogamente, può essere richiesto che, sempre su una banda assegnata  $(\omega_1, \omega_2)$ , lo spettro del contributo di  $\tilde{\delta}_r$  all'errore effettivo sia inferiore ad  $\alpha$  volte lo spettro di  $\tilde{\delta}_r$ , con  $\alpha < 1$ . Alla luce di quanto abbiamo visto, questo si ottiene imponendo che, sulla banda  $(\omega_1, \omega_2)$ , si abbia:  $|L(j\omega)| < \alpha$ . Di conseguenza,  $(\omega_1, \omega_2)$  dovrà risultare esterno alla banda passante ( $\omega_1 > \omega_c$ ).

Quelle citate non sono tutte le specifiche di progetto possibili, sono tuttavia le più frequenti. Specifiche più dettagliate possono riguardare, ad esempio, la forma, o alcuni valori caratteristici, delle risposte di  $c$  o di  $u$  a variazioni a scalino dei segnali d'ingresso (riferimento o disturbi additivi).

In ogni caso, è bene tener presente che tradurre le esigenze del committente, espresse generalmente "a parole" e in modo non sempre limpido, in adeguate specifiche di progetto non è compito estraneo al progettista di sistemi di controllo. Anzi, è forse questo uno degli aspetti delicati e qualificanti della sua professione.

### **3. Struttura del controllore**

Nel capitolo precedente s'è visto che, nel caso di sistemi di controllo monovariabili, lineari e tempo-invarianti, il controllore può essere a uno o due gradi di libertà e che un controllore a due gradi di libertà è, di norma, equivalente ad un controllore a un grado di libertà con un filtro sulla variabile di riferimento. Il filtro, prevalentemente passa-basso, ha la funzione di ridurre la sollecitazione prodotta sulla variabile di controllo da una variazione brusca (a scalino) della variabile di riferimento (si veda, a questo proposito, il caso di un controllore PID a derivazione dell'uscita). La contropartita per la minor sollecitazione della variabile di controllo è naturalmente costituita da un aumento del tempo di risposta del sistema rispetto all'azione del riferimento, mentre rimane invariato il tempo di risposta rispetto all'azione dei disturbi.

Tutto ciò chiarisce bene quali siano le circostanze che rendono conveniente l'adozione di un filtro (passa-basso) da porsi sulla variabile di riferimento ovvero, equivalentemente, l'adozione di un controllore a due gradi di libertà. Indicando, come al solito, con  $\Phi(s)$  la funzione di trasferimento del filtro e con  $R(s)$  quella del controllore a un grado di libertà, sarà:

$$R_0(s) = R(s) \Phi(s) \quad , \quad R_1(s) = R(s) (1 - \Phi(s)) .$$

Si noti che la funzione di trasferimento del filtro sarà ovviamente sempre di tipo zero e avrà guadagno unitario ( $\Phi(0) = 1$ ). Di conseguenza, la funzione di trasferimento  $R_1(s)$  avrà (almeno) uno zero nell'origine; infatti:  $R_1(0) = 0$ .

Il problema si riduce dunque, in ogni caso, al progetto di un controllore a un grado di libertà con funzione di trasferimento  $R(s)$ .

Ma anche un controllore ad un solo grado di libertà può essere soggetto a vincoli di carattere strutturale. Il caso più frequente è quello in cui si richiede *a priori* che il controllore sia un PID (o un PI, o un PD ecc.):

$$R(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{s T_r} + \frac{s T_d}{1 + s T_d/N} \right) = \mu_R \frac{1 + a s + b s^2}{s (1 + c s)}.$$

In questo caso, il progetto consiste nella determinazione di un'opportuna *taratura* dei parametri che caratterizzano la funzione di trasferimento del controllore. In altri casi, il vincolo può riguardare l'ordine del controllore, che non deve superare un massimo assegnato, o altre caratteristiche della funzione di trasferimento. In tutti questi casi, si dice che il controllore è *a struttura vincolata*. In caso contrario, la struttura è *libera* e la funzione di trasferimento  $R(s)$  può essere una funzione razionale arbitraria, purché con grado relativo non negativo e tale che la corrispondente funzione di trasferimento d'anello risulti razionale propria.

#### 4. Controllore a struttura libera

L'analisi condotta nel capitolo precedente ha mostrato che la risposta in frequenza d'anello gioca un ruolo chiave nel determinare le prestazioni di un sistema di controllo (lineare, tempo-invariante e monovariabile). Per questa ragione, è spesso conveniente ricondurre la scelta della funzione di trasferimento del controllore alla scelta di un'opportuna funzione di trasferimento d'anello. Infatti, data la funzione di trasferimento  $G(s) := G_a(s) G_r(s)$  del sistema sotto controllo, si ha:  $L(s) = R(s) G(s)$ . Quindi, una volta determinata una risposta in frequenza d'anello che soddisfi a tutte le specifiche e ai vincoli posti dal problema, si potrà determinare innanzitutto, senza eccessive difficoltà, la corrispondente funzione di trasferimento d'anello e ricavare infine la funzione di trasferimento del controllore:

$$R(s) = \frac{L(s)}{G(s)}.$$

Naturalmente, per poter procedere alla scelta di un'opportuna risposta in frequenza d'anello, che assicuri il rispetto delle specifiche e dei vincoli posti dal

problema, è opportuno che vincoli e specifiche siano (ovunque possibile) formulati (o riformulati) chiamando direttamente in causa la risposta in frequenza d'anello. Vedremo come ciò sia spesso possibile discutendo, nel prossimo paragrafo, alcuni semplici esempi.

Nell'analisi delle condizioni che devono essere soddisfatte dalla funzione di trasferimento del controllore e nella loro riformulazione come condizioni riguardanti la risposta in frequenza d'anello, è conveniente cominciare a prendere in considerazione le specifiche che riguardano il comportamento *a transitorio esaurito* del sistema di controllo, sotto l'azione di *ingressi* (riferimento o disturbi) *canonici* (scalini, rampe, parabole ecc.); quelle specifiche, cioè, che propriamente riguardano la cosiddetta precisione statica del sistema di controllo. Abbiamo visto, alla fine del precedente capitolo, che la precisione statica essenzialmente dipende dal *tipo* e dal *guadagno* (dalla "componente asintotica") della funzione di trasferimento d'anello e in generale aumenta al crescere tanto dell'uno quanto dell'altro parametro. Le specifiche riguardanti la precisione statica si traducono quindi nella determinazione dei *valori minimi* da attribuire al tipo e al guadagno della funzione di trasferimento d'anello. A questa fase del progetto, nella quale si sceglie senz'altro come *tipo* della funzione di trasferimento d'anello il valore minimo compatibile con le specifiche di precisione statica e come *valore non riducibile del guadagno d'anello* il valore minimo, maggiorato per ragioni di sicurezza del 20÷50 %, si dà comunemente il nome di "*progetto statico*".

Si dà invece il nome di "*progetto dinamico*" a quella seconda fase nella quale si cerca innanzitutto di riformulare le eventuali altre specifiche di progetto, che non riguardino già direttamente la risposta in frequenza d'anello, in condizioni equivalenti che la risposta in frequenza d'anello, e in particolare il suo diagramma del modulo, dovranno rispettare. Ad esempio, se  $\gamma_G$  è il grado relativo del sistema sotto controllo descritto da  $G(s)$ , la condizione che il controllore sia causale equivale a dire che, per  $\omega \rightarrow \infty$ , la pendenza del diagramma di Bode di  $|L(j\omega)|$  dev'essere non solo negativa ma, in valore assoluto, maggiore di  $\gamma_G$ . Il "progetto dinamico" procede quindi con la ricerca di una (per quanto possibile, semplice) risposta in frequenza d'anello che rispetti tutte le specifiche esplicitamente espresse. Se, come quasi sempre accade, sussistono ulteriori margini di scelta, si procede poi (per tentativi) ad un raffinamento del progetto, in vista di obiettivi non ancora presi in considerazione o, addirittura, neppure esplicitamente presenti nella formulazione di massima del problema.

Una volta determinata una risposta in frequenza d'anello che soddisfi a tutte le specifiche e ai vincoli posti dal problema, non è difficile, come abbiamo visto, ricavare la corrispondente funzione di trasferimento del controllore. Qualora la funzione di trasferimento  $G(s)$  del sistema sotto controllo, pur non presentando

poli con parte reale positiva, fosse “*a fase non minima*” (se, cioè, una costante di tempo o un fattore di smorzamento del suo numeratore fossero negativi) occorre prestare particolare attenzione ad evitare che la procedura qui appena delineata non produca una *cancellazione illegittima*; non comporti, cioè, l’attribuzione alla funzione di trasferimento  $R(s)$  del controllore di un polo che “cancelli” uno zero di  $G(s)$  con parte reale non negativa. Una scelta di questo tipo minerebbe infatti alla radice l’intero progetto.

Si noti che la mancata presenza, nel diagramma di Bode asintotico di  $|L(j\omega)|$ , dello spigolo corrispondente ad una costante di tempo negativa ( $1 - sT$ ,  $T > 0$ ) al numeratore di  $G(s)$  può essere ottenuta anche immaginando di attribuire al denominatore di  $R(s)$  una costante di tempo uguale in valore assoluto, ma positiva (evitando così di produrre nella funzione di trasferimento d’anello  $L(s)$  una cancellazione illegittima). Non bisogna, però, dimenticare che così facendo, lungi dall’eliminare lo zero nel semipiano destro, s’introduce nella funzione di trasferimento  $L(s)$  un cosiddetto *sfasatore puro*:

$$\frac{1 - sT}{1 + sT} ,$$

la cui presenza (o la cui rimozione) non altera il modulo della risposta in frequenza d’anello, ma il cui contributo al margine di fase è negativo e pari a:

$$\delta\varphi_m = - 2 \operatorname{atan}(\omega_c T) .$$

Una volta condotto a termine anche il “progetto dinamico”, è generalmente possibile e conveniente avvalersi di adeguati strumenti di simulazione per procedere a una serie di verifiche finali dell’effettiva bontà, almeno “sulla carta”, del controllore così progettato.

## 5. Controllore a struttura vincolata

Benché il progetto (o la taratura) di un controllore a struttura vincolata non presenti in molti casi difficoltà superiori a quelle da superare nel caso non vincolato, è difficile dare indicazioni a carattere generale sull’impostazione da seguire o sulle procedure più convenienti.

Ci limiteremo, quindi, a mettere in evidenza i connotati salienti di questo tipo di problema, discutendo nel seguito alcuni esempi significativi non solo di progetto del controllore in assenza di vincoli strutturali, ma anche di qualche caso in cui la struttura del controllore (ad esempio PID) è assegnata *a priori*.



## 6. Esempi

**Esempio 1.** Con riferimento al sistema di Fig.6.1, sia:  $H_{GSR}(s) = G_r(s) = 0.1$ ,

$$H_a(s) = \frac{5}{1 + 10s} \quad , \quad G_a(s) = \frac{80}{(1 + 10s)(1 + 2s)^2} \quad .$$

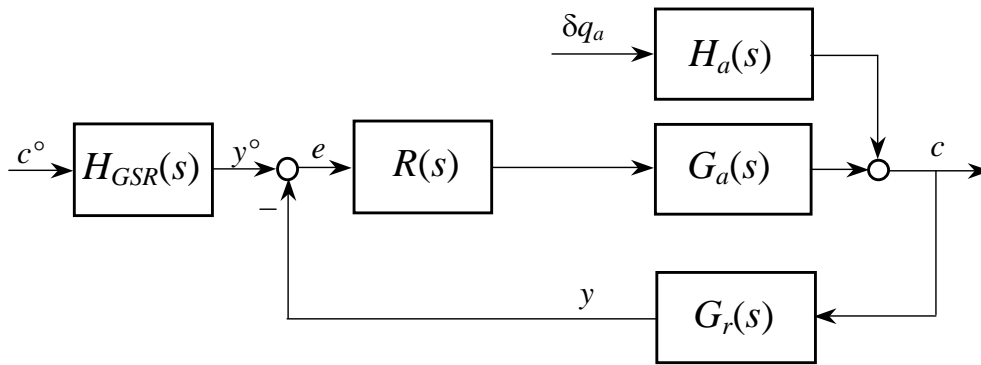


Fig. 6.1 : Esempio 1. Il sistema di controllo.

Si discuta la possibilità di determinare una funzione  $R(s)$  causale tale che:

$$\varphi_m \geq 50^\circ$$

$$\omega_c \geq 0.1 \text{ [rad/udt]}$$

$$|\varepsilon_\infty| \leq 2 \quad \text{se :} \quad \begin{aligned} c^\circ(t) &= A^\circ \text{ ram}(t) \quad , \quad |A^\circ| \leq 0.3 \quad , \\ \delta q_a(t) &= A_a \text{ sca}(t) \quad , \quad |A_a| \leq 15 \quad . \end{aligned}$$

Qualora sia stato possibile determinare una cosiffatta funzione di trasferimento, si calcoli il margine di guadagno del sistema di controllo così ottenuto.

### Progetto statico

Ricordando l'analisi svolta e le notazioni introdotte nel capitolo precedente, abbiamo:

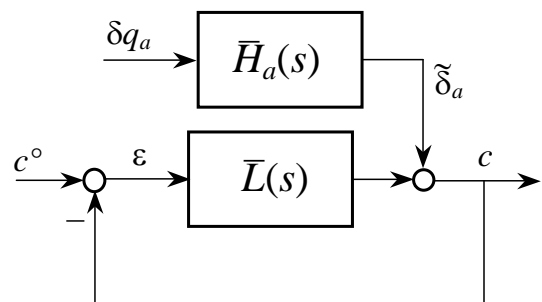
$$\bar{G}_a(s) = 80 \quad , \quad \bar{G}_r(s) = 0.1 \quad , \quad \bar{H}_a(s) = 5 \quad .$$

Quindi, ponendo:

$$\bar{R}(s) := \frac{\mu_R}{s^{g_R}} \quad ,$$

risulta (Fig.6.2):

$$\bar{L}(s) = 0.1 \times \frac{\mu_R}{s^{g_R}} \times 80 = \frac{8 \mu_R}{s^{g_R}}$$



Sotto le ipotesi di Bode, dev'essere:  
 $\mu = 8 \mu_R > 0$  (condizione necessaria), di conseguenza dovrà essere  $\mu_R > 0$ .

Fig. 6.2 : Sistema asintoticamente equivalente a quello di Fig.6.1.

Limitandoci dunque alle sole componenti asintotiche (Fig.6.2), la trasformata di Laplace dell'errore effettivo a transitorio esaurito è data da:

$$E(s) = \frac{1}{1 + \bar{L}(s)} C^\circ(s) - \frac{1}{1 + \bar{L}(s)} \bar{H}_a(s) \Delta Q_a(s) = \frac{1}{1 + \frac{8 \mu_R}{s^{g_R}}} \left[ \frac{A^\circ}{s^2} - 5 \frac{A_a}{s} \right] =$$

$$= \frac{s^{g_R}}{s^{g_R} + 8 \mu_R} \left[ \frac{A^\circ}{s^2} - \frac{A_a}{s} \right];$$

pertanto:

$$\varepsilon_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{g_R}}{s^{g_R} + 8 \mu_R} \left[ \frac{A^\circ}{s} - A_a \right] =$$

$$= \begin{cases} \infty & , & \text{se } g_R = 0 & , \\ \frac{A^\circ}{8 \mu_R} & , & \text{se } g_R = 1 & , \\ 0 & , & \text{se } g_R > 1 & . \end{cases}$$

Adottando per  $g_R$  il valore minimo compatibile con le specifiche "statiche", poniamo:

$$\boxed{g_R = 1 .}$$

A questo punto,

$$(|\varepsilon_\infty| \leq 2 , \forall A^\circ : |A^\circ| \leq 0.3) \Leftrightarrow \frac{|A^\circ|_{max}}{8 \mu_R} \leq 2 \Leftrightarrow \mu_R \geq \frac{0.3}{8 \times 2} = 0.01875 := \mu_{R-min} .$$

Per sicurezza, poniamo:

$$\boxed{\mu_R = 0.025 .}$$

Questo conclude la fase di "progetto statico".

$$\bar{R}(s) = \frac{0.025}{s}$$

*Progetto dinamico*

Se (come primo tentativo) si pone:  $R(s) = \bar{R}(s)$ , si ottiene (Fig.6.3):

$$L_1(s) := \bar{R}(s) G(s) = \frac{0.2}{s(1+10s)(1+2s)^2} ;$$

$$\omega_c = 0.14 \quad , \quad \varphi_m = 180^\circ - |-90^\circ - 52^\circ - 2 \times 16^\circ| = 6^\circ .$$

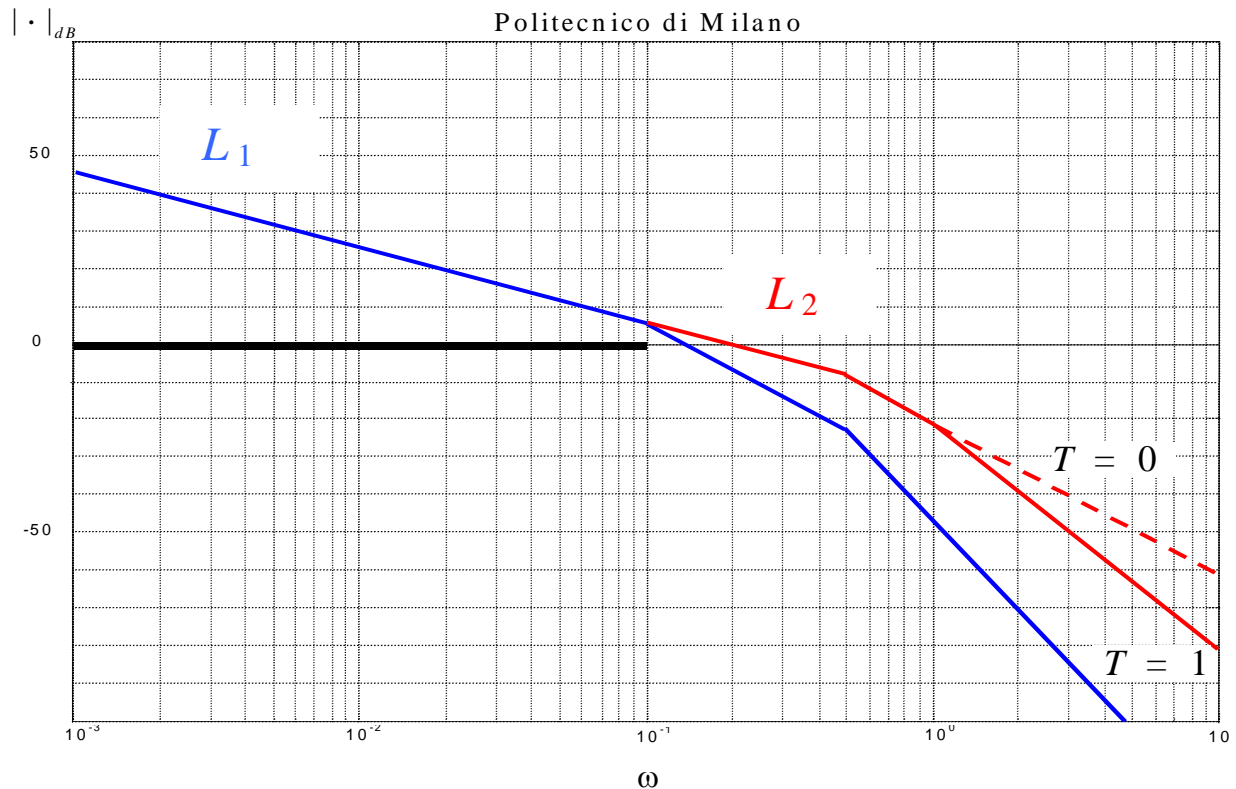


Fig. 6.3 : Esempio 1. Diagrammi di Bode asintotici del modulo.

Poiché il margine di fase è insufficiente, possiamo cercare di modificare il diagramma del modulo della risposta in frequenza d'anello in modo da far sì che il diagramma venga a tagliare l'asse delle  $\omega$  con pendenza -1, mantenendo immutati i valori del tipo e del guadagno.

Con l'aggiunta di due costanti di tempo al numeratore ( $T_1 = 10$ ,  $T_2 = 2$ ), il grado relativo del controllore risulterebbe minore di zero compromettendone la causalità ("fisica realizzabilità"). Per assicurare la causalità del controllore sarà

tuttavia sufficiente aggiungere un'ulteriore (piccola) costante di tempo al denominatore che non alteri in modo significativo le prestazioni del sistema di controllo. Così facendo, si ottiene:

$$L_2(s) = \frac{0.2}{s(1+2s)(1+Ts)} \quad , \quad R(s) = \frac{0.025(1+10s)(1+2s)}{s(1+Ts)} .$$

Si noti che, se si pone  $T = 0$ , la funzione di trasferimento  $R(s)$  del controllore corrisponde ad un PID ideale, mentre con  $T \neq 0$  corrisponde ad un PID con filtro del prim'ordine sull'azione derivativa.

Dall'analisi dei diagrammi di Bode (Fig.6.3) si ottiene:

con  $T=0$  (PID ideale):  $\omega_c = 0.2$  ,  $\varphi_m = 180^\circ - |-90^\circ - 23| = 67^\circ$  ;

con  $T=1$ :  $\omega_c = 0.2$  ,  $\varphi_m = 180^\circ - |-90^\circ - 23 - 13^\circ| = 54^\circ$  ,  
 $\omega_\pi = 0.7$  ,  $\mu_m = 18 \text{ dB} = 7.9$  .

### *Simulazioni*

Il comportamento del sistema appena progettato ( $T = 1$ ) può essere meglio messo in evidenza considerando le risposte a una variazione a rampa della variabile di riferimento seguita da una variazione a scalino del disturbo  $\delta q_a$ :

$$c^\circ(t) = 0.3 \text{ ram}(t) \quad , \quad \delta q_a(t) = 15 \text{ sca}(t - 50)$$

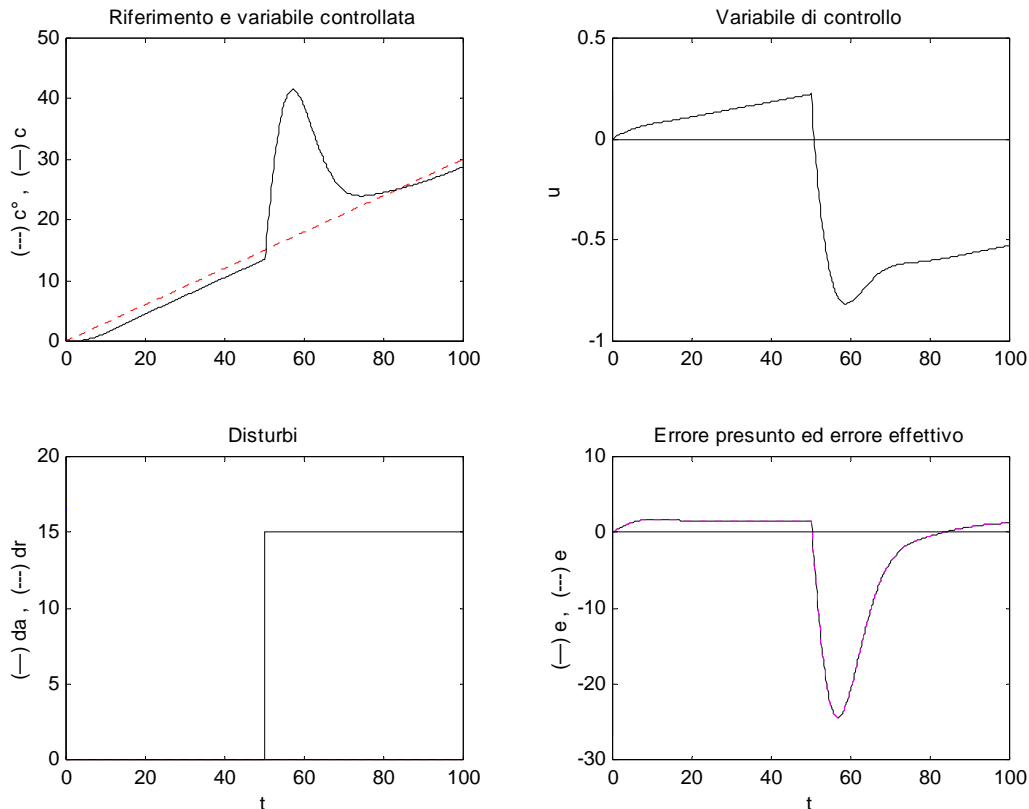


Fig. 6.4 : Esempio 1. Risposte del sistema di controllo.

Si noti che, in questo caso ( $\delta q_r = 0$ ), l'errore effettivo e il cosiddetto *errore presunto* coincidono. Per definizione, l'errore presunto si ottiene dall'errore apparente dividendolo per il guadagno di  $G_r(s)$ .

Un interessante esercizio, che può essere autonomamente svolto dal lettore, consiste nel calcolare i valori di  $K_p$ ,  $T_i$ ,  $T_d$  e  $N$  che danno luogo ad un controllore PID (con filtro del prim'ordine sull'azione derivativa) la cui funzione di trasferimento coincida con:

$$R(s) = \frac{0.025 (1 + 10 s) (1 + 2 s)}{s (1 + s)}$$

Altrettanto interessante è l'esercizio che consiste nel calcolare i valori di  $K_p$ ,  $T_i$ ,  $T_d$  che, in un PID ideale, danno luogo alla funzione di trasferimento:

$$R^*(s) = \frac{0.025 (1 + 10 s) (1 + 2 s)}{s}$$

e nel calcolare quindi, dopo aver posto  $N = 10$  (filtro del prim'ordine sull'azione derivativa), la nuova funzione di trasferimento del controllore PID così ottenuto.

### *Il metodo di Ziegler e Nichols (ad anello chiuso)*

I metodi di Ziegler e Nichols sono metodi empirici che richiedono (in assenza di qualsiasi informazione sulla dinamica del sistema sotto controllo) l'esecuzione di semplici prove sperimentali per passare quindi, attraverso formule da loro proposte, a tarature plausibili dei parametri  $K_p$ ,  $T_i$  e  $T_d$  di controllori PID.

Se tuttavia il comportamento dinamico del sistema sotto controllo è descritto da una funzione di trasferimento  $G(s)$  nota, non è difficile calcolare, ad esempio, il valore critico del guadagno proporzionale e il periodo della corrispondente oscillazione permanente (metodo ad anello chiuso) avvalendosi dei diagrammi di Bode. Una volta tracciato il diagramma di Bode di  $|G(j\omega)|$ , una breve riflessione consente di riconoscere che l'applicazione di un controllore proporzionale di guadagno  $K$  equivale a traslare in direzione perpendicolare all'asse delle  $\omega$  il diagramma suddetto. Una volta determinata la traslazione che produce un margine di fase pari a zero (oscillazione permanente) e rilevata la corrispondente pulsazione critica  $\Omega_c$ , la traslazione di diagramma di Bode di  $|G(j\omega)|$  necessaria a raggiungere il limite di stabilità coincide con il valore critico di  $K$  espresso in decibel, mentre il periodo dell'oscillazione permanente è dato da  $T_c = 2 \pi / \Omega_c$ .

Nel caso in esame,

$$G(s) = G_a(s) G_r(s) = \frac{8}{(1 + 10 s)(1 + 2 s)^2}$$

e, a conti fatti,  $K_c = 8 \text{ dB} = 2.5$ ,  $\Omega_c = 0.6$ ,  $T_c = 10.5$ . Applicando le formula di Ziegler e Nichols, si ottiene:  $K_p = 0.6 K_c = 1.5$ ,  $T_i = T_c/2 = 5.25$ ,  $T_d = T_c/8 = 1.31$ . La funzione di trasferimento del corrispondente controllore PID con filtro del prim'ordine sull'azione derivativa ( $N = 10$ ) è data da:

$$R_{ZN}(s) = \frac{2.1617 s^2 + 1.5390 s + 0.2860}{s (1 + 0.131 s)} = 0.2860 \frac{1 + 5.3811 s + 7.5584 s^2}{s (1 + 0.131 s)}$$

Si noti che  $\mu_R = 0.286 \gg \mu_{R-min} = 0.0187$ . Per altro, i due zeri, benché complessi coniugati, sono quasi reali e coincidenti ( $\omega_n = 2.9346$ ,  $\zeta = 0.9787$ ). Con questo controllore, si ottiene:

$$\omega_c = 0.6 \quad , \quad \phi_m = 23^\circ .$$

In Fig.6.5 è mostrato il risultato del medesimo esperimento simulato in Fig.6.4.

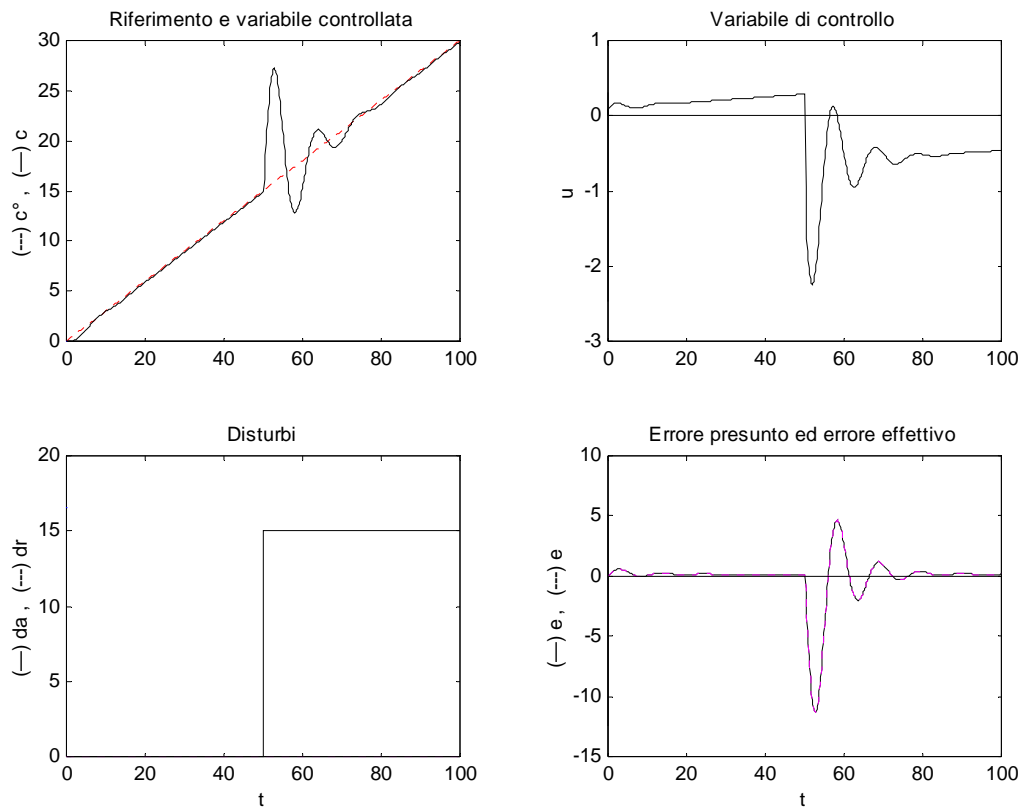


Fig. 6.5 : Risposte del sistema di controllo (controllore di Ziegler e Nichols).

Nel caso di Ziegler e Nichols, il modulo, in  $dB$ , della risposta in frequenza d'anello è molto maggiore di 0 su una banda 3 volte più ampia di quella richiesta dalle specifiche, il guadagno del controllore è di un ordine di grandezza più elevato del minimo necessario a soddisfare le specifiche; il margine di fase è decisamente scarso. Questo produce transitori di forma scadente e di durata non inferiore a quelli di Fig.6.4 (nonostante l'aumento di  $\omega_c$ ); l'errore massimo prodotto dal disturbo è diminuito, ma la sollecitazione impressa all'azione di controllo è più che raddoppiata.

In Fig.6.6 sono mostrate le risposte del sistema di controllo da noi tentativamente progettato a una variazione a scalino della variabile di riferimento. Vale a dire del sistema con:

$$R(s) = \frac{0.025 (1 + 10 s) (1 + 2 s)}{s (1 + T s)}$$

e con  $T = 1$ .

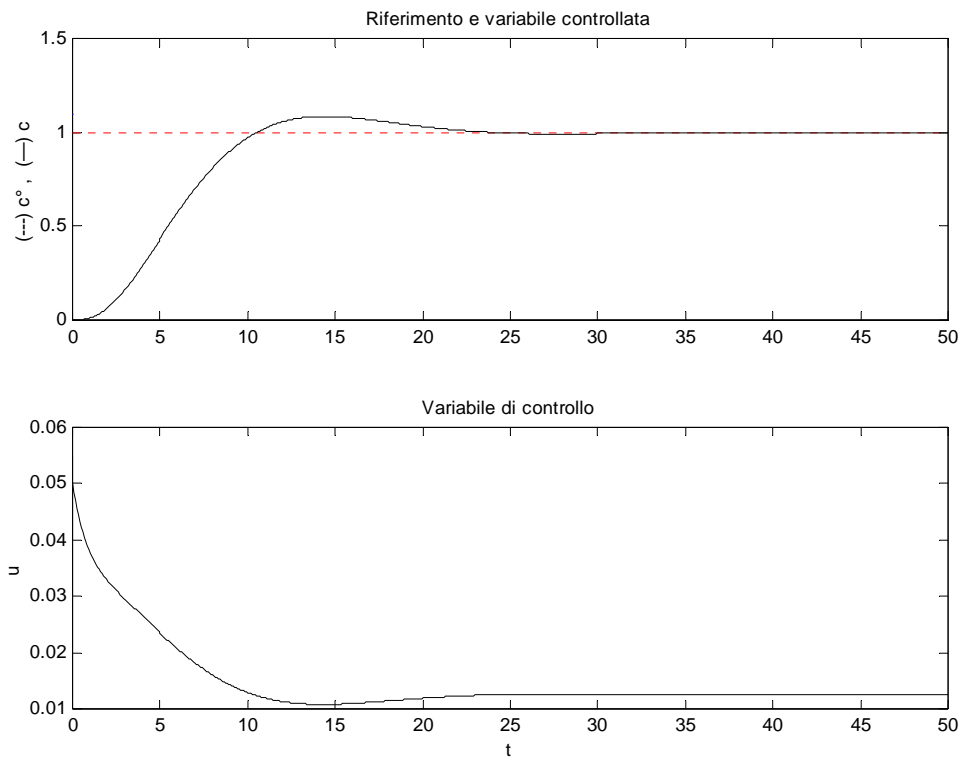


Fig. 6.6 : Risposte del sistema di controllo a una variazione a scalino del riferimento

Si noti infine come la formula  $t_a = 5/\omega_c = 25 [udt]$  consenta di prevedere con buona accuratezza la durata del transitorio. Qualora si adottasse il controllore  $R_{ZN}(s)$ , le risposte del sistema di controllo sarebbero quelle mostrate in Fig.6.7.



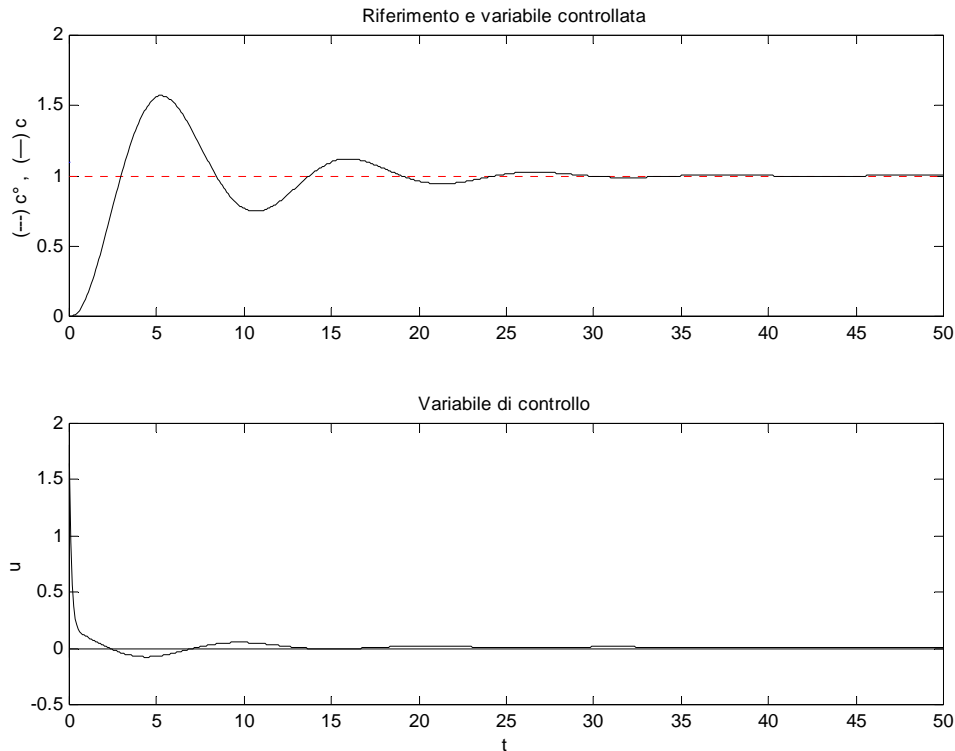


Fig. 6.7 : Risposte del sistema di controllo a una variazione a scalino del riferimento. Taratura di Ziegler e Nichols.

Nel complesso, com'è legittimo aspettarsi, la taratura di Ziegler e Nichols non fornisce un compromesso equilibrato fra le varie esigenze espresse dalle specifiche; particolarmente negativi sono il carattere oscillatorio (a basso smorzamento) e la notevole sovraelongazione della variabile controllata nonché l'elevata intensità dell'azione di controllo. Per il basso margine di fase, l'aumento di  $\omega_c$  non si traduce in un transitorio più rapido. Non va dimenticato, però, che questa taratura può essere ottenuta eseguendo una semplice ricetta, senza conoscere a priori alcun modello del sistema sotto controllo (e anche senza avere alcuna nozione seria di teoria del controllo!).

Quando le variazioni da effettuare sulla variabile di riferimento siano rare, o relativamente sporadiche, e in quelle occasioni non sia nociva un'eventuale leggera diminuzione della rapidità di risposta (un leggero allungamento, cioè, del tempo necessario perché la variabile controllata si assesti sul nuovo valore desiderato) è possibile attenuare l'intensità dell'azione di controllo escludendo dall'azione derivativa la variabile di riferimento (assetto "a derivazione dell'uscita").

In questo caso, gli andamenti delle risposte ad una variazione a scalino della variabile di riferimento si modificano come mostrato in Fig.6.8.

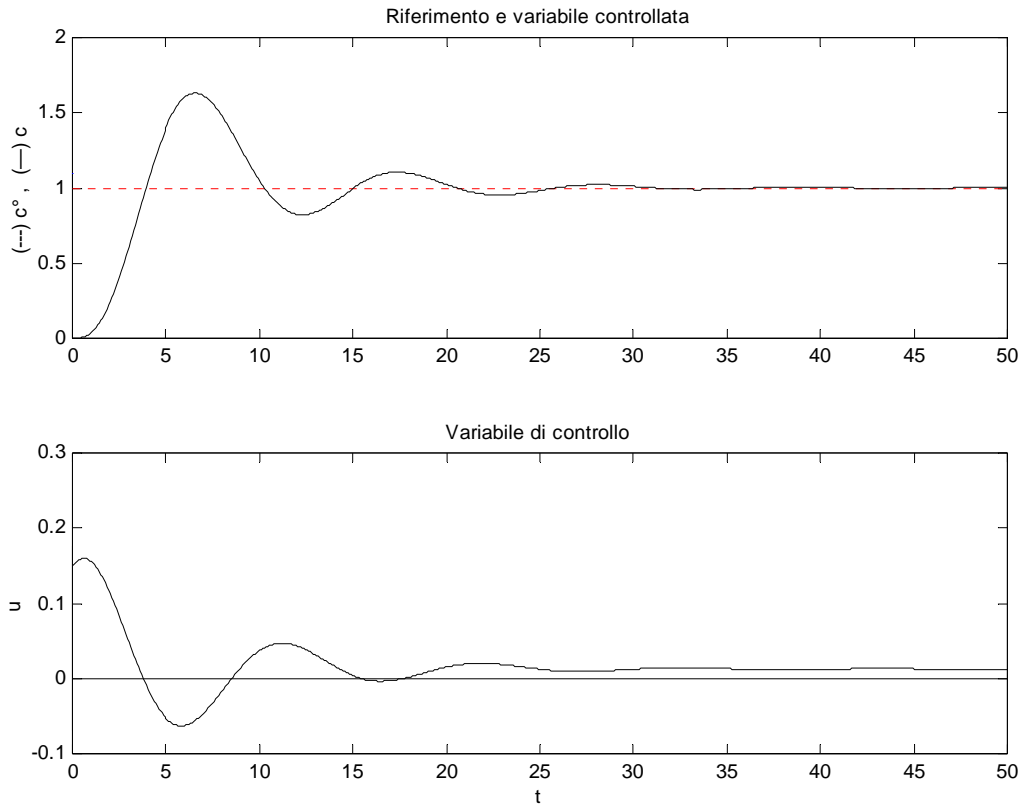


Fig. 6.7 : Risposte del sistema di controllo a una variazione a scalino del riferimento. Taratura di Ziegler e Nichols. Assetto a derivazione dell'uscita.

Come si può notare, la qualità della risposta (durata del transitorio e sovravelongazione) è cambiata poco. Si è invece sensibilmente ridotta l'intensità dell'azione di controllo (che però è ancora circa tre volte più grande di quella richiesta dal controllore  $R(s)$ ).

**Esempio 2.** Con riferimento al sistema in Fig.6.8, sia ancora:

$$H_{GSR}(s) = G_r(s) = 0.1 \quad , \quad G_a(s) = \frac{80}{(1 + 10s)(1 + 2s)^2} \quad , \quad \Gamma_r(s) = 10 \quad .$$

Indicando con  $E_r(s)$  la trasformata del contributo all'errore effettivo  $\varepsilon$  dovuto a  $\delta q_r$ , si discuta la possibilità di determinare una  $R(s)$  causale tale che:

$$\varphi_m \geq 55^\circ$$

$$\omega_c \geq 0.05 \quad [rad/udt]$$

$$|E_r(j\omega)| \leq 0.1 |\Delta Q_r(j\omega)| \quad , \quad \forall \omega \geq 1.5 \text{ [rad/udt]} \quad ;$$

$$|\varepsilon_\infty| \leq 0.8 \quad \text{se :} \quad c^\circ(t) = A^\circ \text{sca}(t) \quad , \quad |A^\circ| \leq 30$$

$$|\delta u_0| \leq 0.4$$

$$\delta q_r(t) = A_r \text{sca}(t) \quad , \quad |A_r| \leq 0.05$$

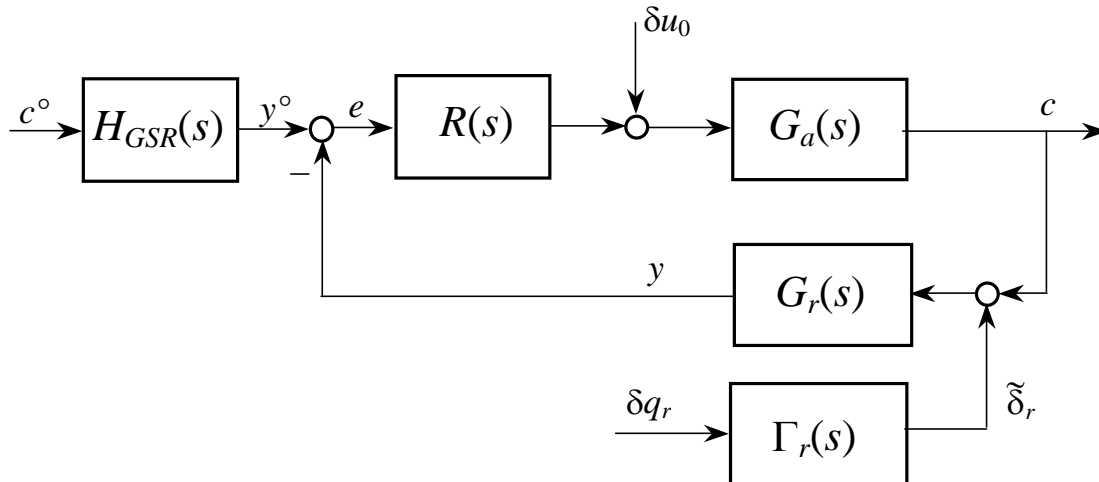


Fig. 6.8 : Esempio 2. Il sistema di controllo.

---

### Progetto statico

In questo caso, abbiamo:

$$\bar{R}(s) := \frac{\mu_R}{s^{g_R}} \quad ; \quad \bar{G}_a(s) = 80 \quad , \quad \bar{G}_r(s) = 0.1 \quad , \quad \bar{H}_a(s) = 5 \quad .$$

Ai fini dell'analisi della precisione statica, possiamo limitarci a considerare il sistema di Fig.6.9-a, nel quale compaiono solo le componenti asintotiche delle varie funzioni di trasferimento. E' per altro immediato riconoscere che il sistema di Fig.6.9-a è equivalente a quello di Fig.6.9-b

Nel calcolo di  $\varepsilon_\infty$  possiamo considerare la costante  $\delta u_0$  come uno scalino di ampiezza  $\delta u_0$ . Allora,

$$E(s) = \frac{1}{1 + \bar{L}(s)} C^\circ(s) - \frac{80}{1 + \bar{L}(s)} \frac{\delta u_0}{s} + \frac{10 \bar{L}(s)}{1 + \bar{L}(s)} \Delta Q_r(s)$$

dove:  $\bar{L}(s) := 8 \mu_R / s^{g_R}$ .

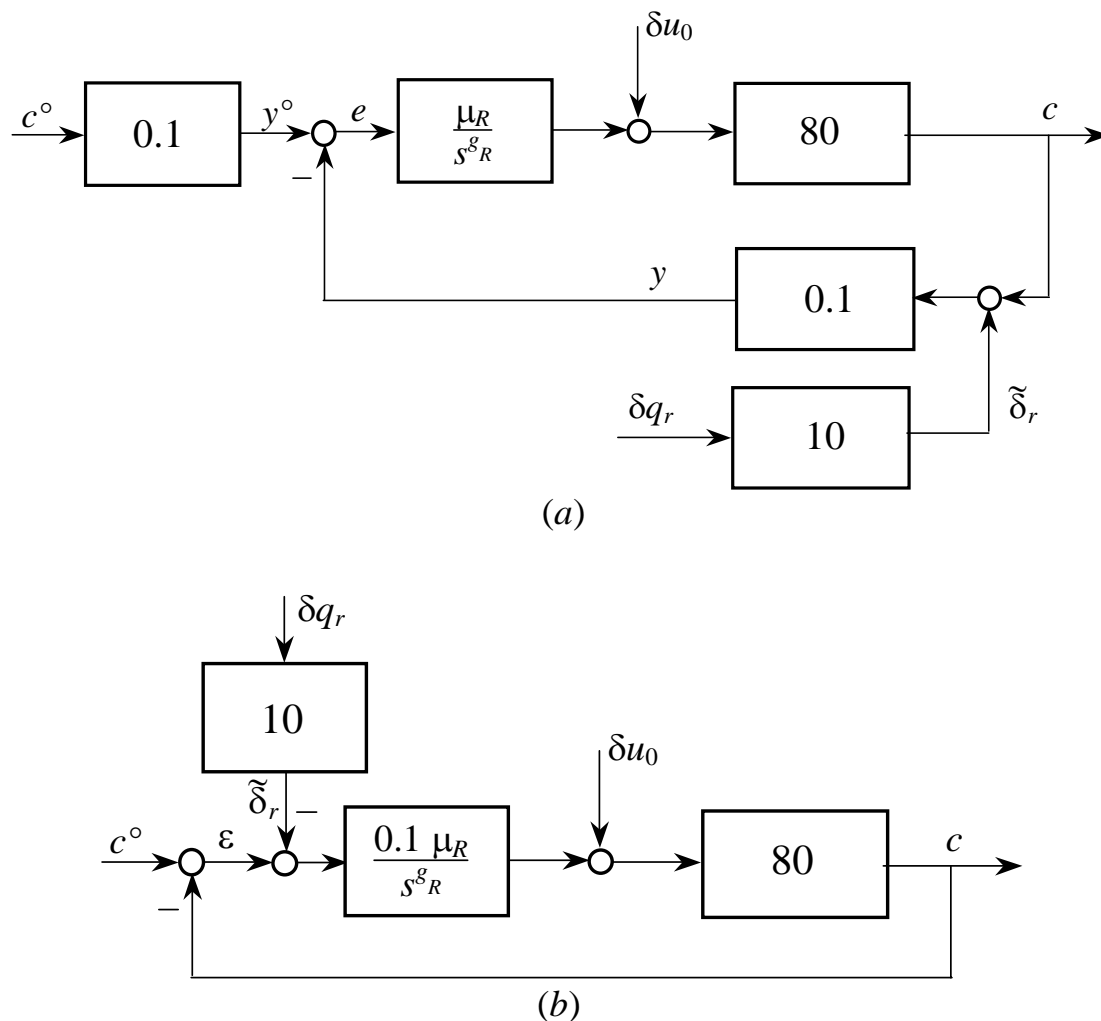


Fig. 6.9 : Esempio 2. Il sistema di controllo ridotto alle sole componenti asintotiche.

Quindi, se  $c^\circ(t) = A^\circ sca(t)$  e  $\delta q_r(t) = A_r sca(t)$ ,

$$E(s) = \frac{s^{g_R}}{s^{g_R} + 8 \mu_R} \frac{A^\circ}{s} - \frac{80 s^{g_R}}{s^{g_R} + 8 \mu_R} \frac{\delta u_0}{s} + \frac{80 \mu_R}{s^{g_R} + 8 \mu_R} \frac{A_r}{s}.$$

$$\varepsilon_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = \begin{cases} \frac{1}{1 + 8 \mu_R} (A^\circ - 80 \delta u_0 + 80 \mu_r A_r) & , \text{ se } g_R = 0 \\ 10 A_r & , \text{ se } g_R > 0 \end{cases}$$

Il valore minimo di  $g_R$  che può consentire di soddisfare la specifica relativa alla precisione statica è  $g_R = 0$ . Poiché:  $|A^\circ| \leq 30$ ,  $|\delta u_0| \leq 0.4$ ,  $|A_r| \leq 0.05$  e  $\mu_R > 0$  (sotto le ipotesi di Bode  $\mu > 0$  è una condizione necessaria, e  $\mu = 8 \mu_R$ ), se si pone  $g_R = 0$ , si ha:

$$|\varepsilon_\infty| = \frac{1}{1 + 8 \mu_R} |A^\circ - 80 \delta u_0 + 80 \mu_r A_r| \leq \frac{1}{1 + 8 \mu_R} (|A^\circ| + 80 |\delta u_0| + 80 \mu_r |A_r|) .$$

Quindi,

$$|\varepsilon_\infty| \leq \frac{1}{1 + 8 \mu_R} (|A^\circ|_{max} + 80 |\delta u_0|_{max} + 80 \mu_r |A_r|_{max}) .$$

Allora la condizione  $|\varepsilon_\infty| \leq 0.8$  è verificata se:

$$\frac{1}{1 + 8 \mu_R} (30 + 80 \times 0.4 + 80 \mu_r 0.05) \leq 0.8$$

cioè se:

$$30 + 32 + 4 \mu_R \leq 0.8 (1 + 8 \mu_R) \quad \Leftrightarrow \quad \mu_R \geq \frac{62 - 0.8}{8 \times 0.8 - 4} = 25.50 .$$

Con (non molta) prudenza, poniamo:  $\mu_R = 30$ . Pertanto,  $\bar{R}(s) = 30$ .

*Osservazione.* Poichè nei sistemi di controllo di tipo zero il guadagno della funzione di trasferimento d'anello ( $\mu = 8 \mu_R$ ) dev'essere maggiore di 10 per assicurare un minimo di precisione statica a fronte di variazioni del riferimento o a disturbi sulla linea d'andata, si poteva notare che comunque:

$$1 + 8 \mu_R \cong 8 \mu_R \quad , \quad \frac{80 \mu_R}{1 + 8 \mu_R} 0.05 \cong 10 \times 0.05 = 0.5 ,$$

e imporre:

$$\frac{1}{8 \mu_R} 30 + \frac{80}{8 \mu_R} 0.4 + 0.5 \leq 0.8 \quad \Leftrightarrow \quad \mu_R \geq \frac{62}{8 \times 0.3} = 25.83 .$$

### *Progetto dinamico*

Il primo passo da compiere è ricondurre la specifica:

$$|E_r(j\omega)| \leq 0.1 |\Delta Q_r(j\omega)| \quad , \quad \forall \omega \geq 1.5 \text{ [rad/udt]}$$

ad un'equivalente condizione su  $|L(j\omega)|$ . Per questo, ricordiamo che

$$|E_r(j\omega)| = \frac{|L(j\omega)|}{1 + |L(j\omega)|} |\tilde{\Delta}_r(j\omega)| \quad , \quad |\tilde{\Delta}_r(j\omega)| = |\Gamma_r(j\omega)| |\Delta Q_r(j\omega)| = 10 |\Delta Q_r(j\omega)| .$$

Dunque, la condizione  $|E_r(j\omega)| \leq 0.1 |\Delta Q_r(j\omega)|$  è equivalente a:

$$\frac{|L(j\omega)|}{1 + |L(j\omega)|} 10 |\Delta Q_r(j\omega)| \leq 0.1 |\Delta Q_r(j\omega)| \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|L(j\omega)|}{1 + |L(j\omega)|} \leq 0.01 \quad ;$$

ma ciò è possibile solo per  $\omega \geq \omega_c$ , infatti ricordiamo che

$$\frac{|L(j\omega)|}{1 + |L(j\omega)|} \cong \begin{cases} 1 & , \quad \omega \leq \omega_c \\ |L(j\omega)| & , \quad \omega \geq \omega_c \end{cases} .$$

In conclusione, la condizione  $|E_r(j\omega)| \leq 0.1 |\Delta Q_r(j\omega)|, \forall \omega \geq 1.5$ , è equivalente a:

$$|L(j\omega)| \leq 0.01 \quad \Leftrightarrow \quad |L(j\omega)|_{dB} \leq -40 \quad , \quad \forall \omega \geq 1.5 \text{ [rad/udt]} \quad .$$

Tenuto conto dei risultati del progetto statico, a questo punto si ha:

$$L_1(s) = \frac{30 \times 80 \times 0.1}{(1 + 10s)(1 + 2s)^2} = \frac{240}{(1 + 10s)(1 + 2s)^2} .$$

La corrispondente risposta in frequenza d'anello (Fig.6.10) viola sia la specifica sul margine di fase che quella su  $|E_r(j\omega)|$ . Una correzione plausibile è mostrata in figura (linea rossa) e corrisponde alla funzione di trasferimento d'anello

$$L_2(s) = 240 \frac{1 + 50s}{(1 + 500s)^2(1 + 1.4s)^2}$$

che palesemente rispetta la specifica su  $\omega_c$  e quella su  $|E_r(j\omega)|$ . Per quanto riguarda il margine di fase, si ha:

$$\varphi_m = 180^\circ - |-2 \times 88 + 75 - 2 \times 8| = 62^\circ > 55^\circ .$$

Si noti che, per passare da  $L_1(s)$  a  $L_2(s)$ , occorre introdurre le seguenti costanti di tempo:

$$\frac{(1 + 50s)(1 + 10s)(1 + 2s)^2}{(1 + 500s)^2(1 + 1.4s)^2} := \Psi(s) .$$

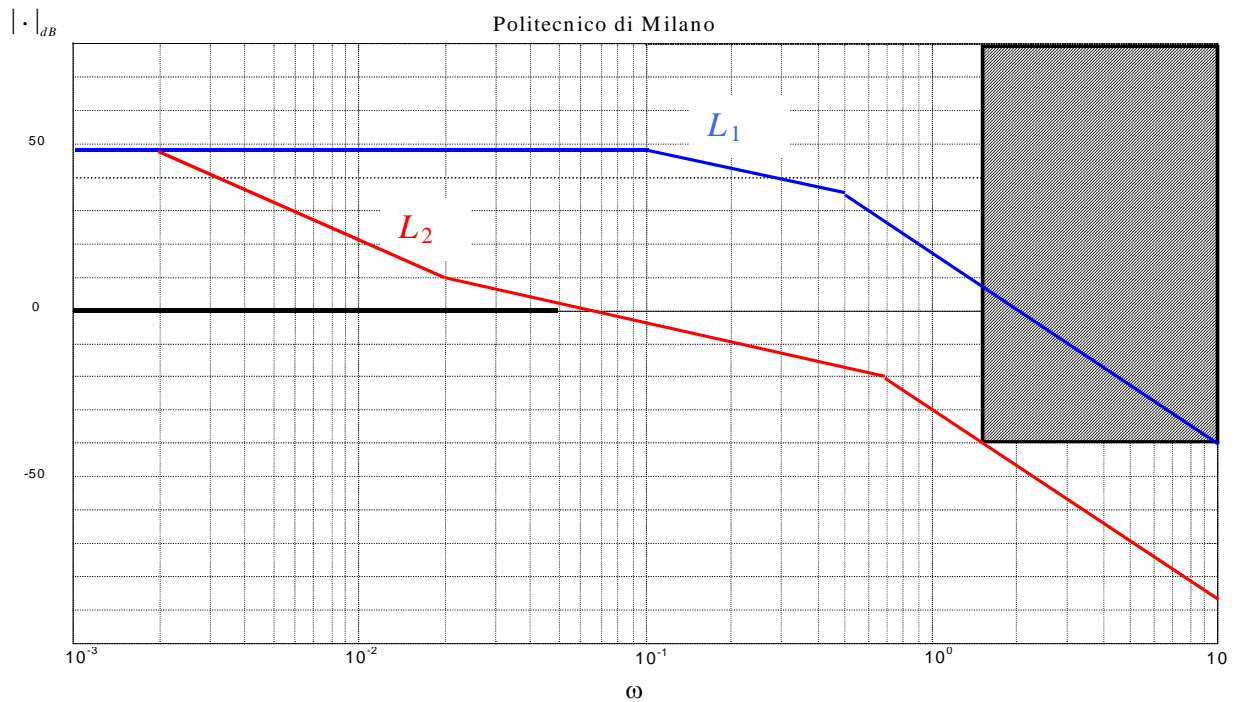


Fig. 6.10 : Esempio 2. Diagrammi di Bode asintotici del modulo.

Pertanto, la funzione di trasferimento del controllore così progettato è:

$$R(s) = \frac{L_2(s)}{G_a(s) G_r(s)} = \bar{R}(s) \Psi(s) = 30 \frac{(1 + 50 s)(1 + 10 s)(1 + 2 s)^2}{(1 + 500 s)^2(1 + 1.4 s)^2} .$$

### Simulazioni

Per saggiare più direttamente il comportamento del sistema appena progettato può essere conveniente esaminare (Fig.6.11) le risposte a una variazione a scalino della variabile di riferimento seguita, a partire dall'istante  $t = 100$ , dall'innesco di un disturbo sinusoidale sulla linea di retroazione:

$$c^\circ(t) = 30 \operatorname{sca}(t) \quad , \quad q_r(t) = 0.5 \sin(2 t) \operatorname{sca}(t - 100) .$$

Si noti come la sinusoide “in alta frequenza” sulla linea di retroazione sia stata filtrata: la variabile controllata  $c$  e quindi l'errore effettivo (linea tratteggiata rossa) non ne risentono. Poiché il controllore non è un sistema dinamico in senso proprio, il disturbo sinusoidale in retroazione si ripercuote non solo sull'andamento dell'errore presunto (proporzionale all'errore apparente; più precisamente, pari all'errore apparente diviso per il guadagno di  $G_r(s)$ ) ma anche sulla variabile di controllo, con il rischio, alla lunga, di danneggiare l'attuatore.

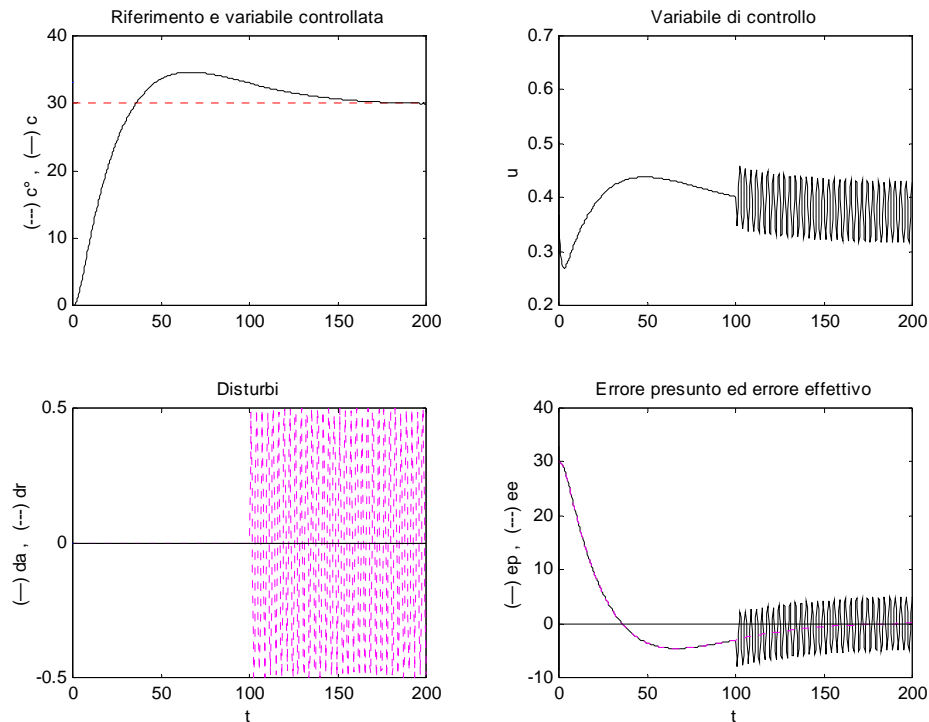


Fig. 6.11 : Esempio 2. Risposte del sistema di controllo.

Se la pulsazione del disturbo è costante e nota, un rimedio potrebbe consistere nell’inserire nel controllore un “filtro a spillo” con pulsazione d’interdizione uguale alla pulsazione del disturbo sinusoidale, cioè  $2 \text{ [rad/udt]}$ . Ad esempio, un filtro con funzione di trasferimento

$$\frac{1 + 0.05 s + 0.25 s^2}{1 + s + 0.25 s^2}$$

altera in modo insignificante la banda passante e il margine di fase del sistema di controllo (la pulsazione naturale  $\omega_n = 2$  è molto maggiore della pulsazione critica), ma attenua sensibilmente l’ampiezza della “vibrazione” presente sulla variabile di controllo.

Si noti come, anche in questo caso, la formula  $t_a = 5 \div 10 / \omega_c = 80 \div 167 \text{ [udt]}$  consenta di prevedere con discreta accuratezza la durata del transitorio.

Le figure che seguono mostrano la risposta in frequenza del “filtro a spillo” (Fig.6.12) e come si modificano, grazie ad esso, (Fig.6.13) le risposte di Fig.6.11.



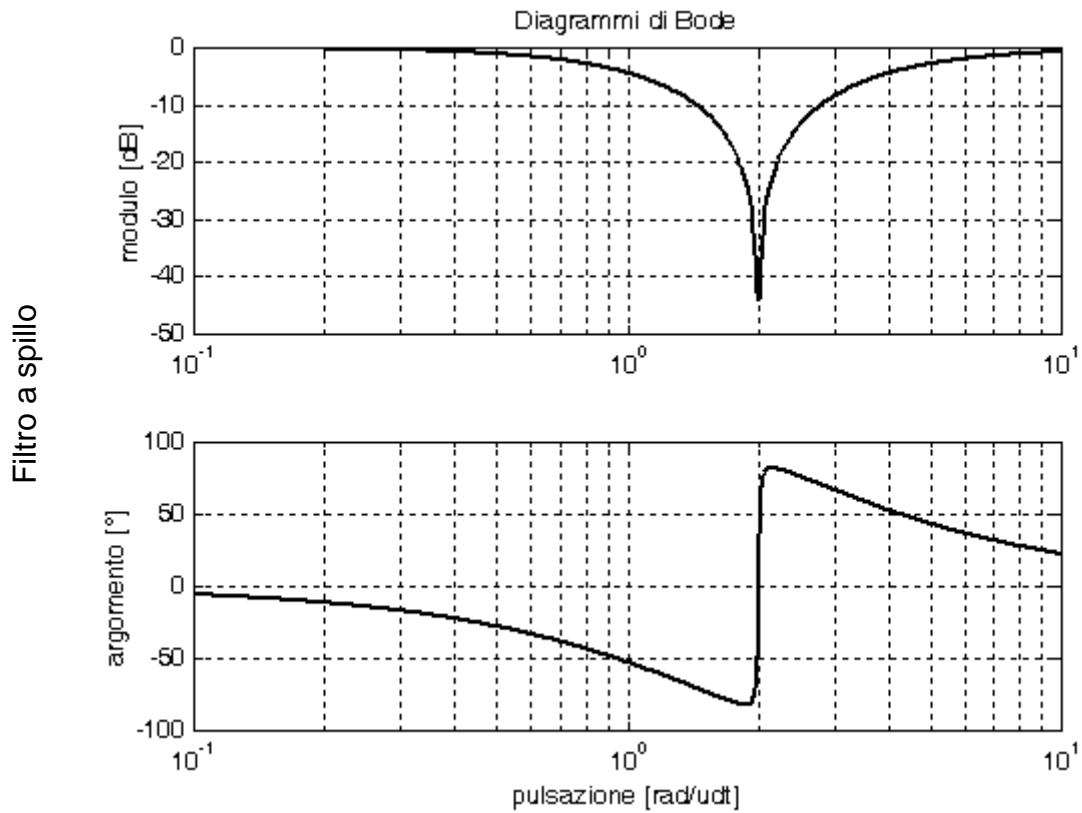


Fig. 6.12 : Risposta in frequenza del “filtro a spillo”.

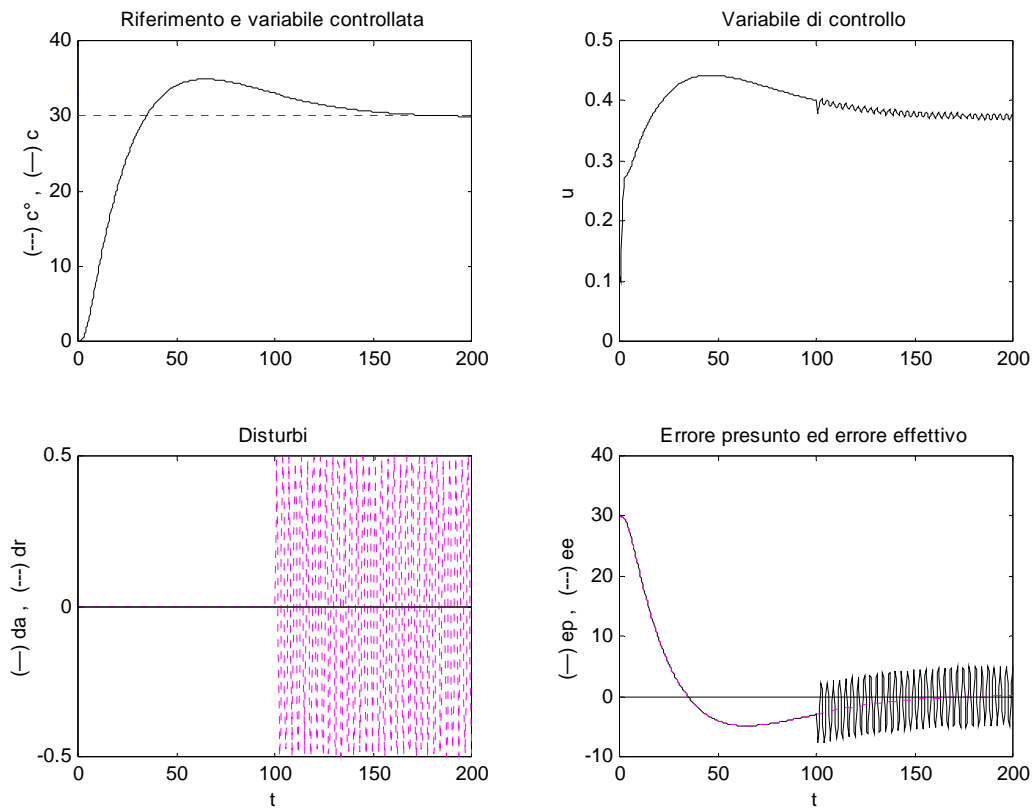


Fig. 6.13 : Esempio 2. Risposte del sistema di controllo (controllore con “filtro a spillo”).

**Esempio 3.** Con riferimento al sistema in Fig.6.14, sia:

$$G_a(s; \tau) = \frac{10 e^{-\tau s}}{s} \quad , \quad G_r(s) = \frac{0.02}{1 + 0.8 s} \quad , \quad H_{GSR}(s) = 0.02 \quad .$$

a) Indicando con  $E_{a2}(s)$  il contributo all'errore effettivo dovuto a  $\delta_{a2}$ , determinare una  $R(s)$  causale tale che, con  $\tau = 0$ , risulti:

$$\varphi_m \geq 55^\circ$$

$$0.1 \leq \omega_c \leq 1 \quad [rad/udt]$$

$$|E_{a2}(j\omega)| \leq 0.025 |\Delta_{a2}(j\omega)| \quad , \quad \forall \omega \in [0.005, 0.05] \quad [rad/udt]$$

$$|\varepsilon_\infty| \leq 1.25 \quad \text{se :} \quad c^\circ(t) = A^\circ sca(t) \quad , \quad |A^\circ| \leq 30$$

$$\delta_{a1}(t) = A_1 sca(t) \quad , \quad |A_1| \leq 0.05$$

b) Valutare come si modificano le prestazioni del sistema di controllo per la presenza di un ritardo  $\tau = 0.2$  [udt].

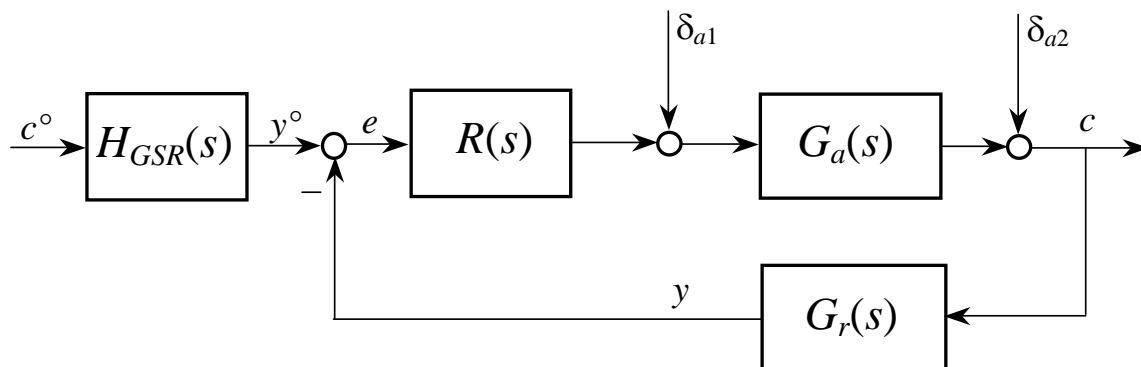


Fig. 6.14 : Esempio 3. Il sistema di controllo.

a) *Progetto statico*

Considerando solo le componenti asintotiche delle varie funzioni di trasferimento (Fig.6.15), la trasformata di Laplace dell'effetto su  $\varepsilon$  del riferimento  $c^\circ(t) = A^\circ sca(t)$  e del disturbo  $\delta_{a1}(t) = A_1 sca(t)$  è data da:

$$E(s) = \frac{1}{1 + \frac{0.2 \mu_R}{s(g_R + 1)}} \left[ \frac{A^\circ}{s} - \frac{10 A_1}{s^2} \right] \quad .$$

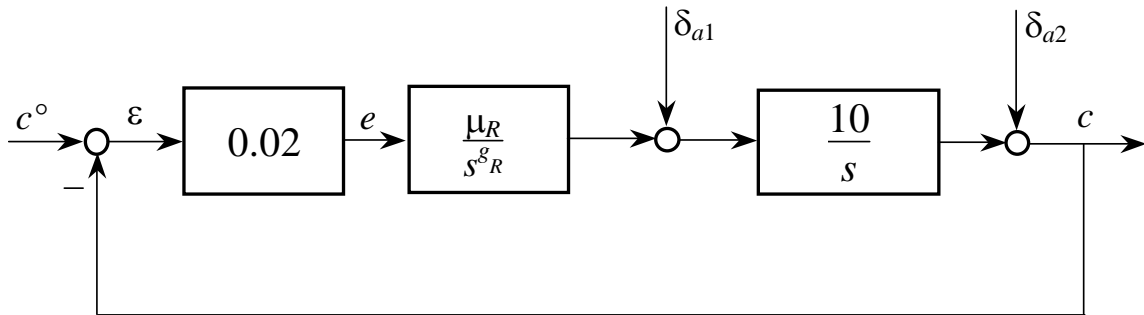


Fig. 6.15 : Esempio 3. Il sistema di controllo ridotto alle sole componenti asintotiche.

Pertanto,

$$\varepsilon_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = \begin{cases} \frac{-10 A_1}{0.2 \mu_R} & , \text{ se } g_R = 0 \\ 0 & , \text{ se } g_R > 0 . \end{cases}$$

Poniamo:  $g_R = 0$ . Allora, poiché  $|A^o| \leq 30$ ,  $|A_1| \leq 0.05$  e  $\mu_R > 0$ , la condizione  $|\varepsilon_\infty| \leq 1.25$  diventa:

$$\frac{50 |A_1|_{max}}{\mu_R} = \frac{2.5}{\mu_R} \leq 1.25 \quad \Leftrightarrow \quad \mu_R \geq \frac{2.5}{1.25} = 2$$

Per prudenza, poniamo:  $\mu_R = 3 = \bar{R}(s)$ .

### Progetto dinamico

Vediamo innanzitutto come si possa riformulare la specifica:

$$|E_{a2}(j\omega)| \leq 0.025 |\Delta_{a2}(j\omega)| \quad , \quad \forall \omega \in [0.005, 0.05] \text{ [rad/udt]}$$

mediante un'equivalente condizione su  $|L(j\omega)|$ . Ricordando che  $\varepsilon := c^o - c$  e facendo riferimento allo schema a blocchi di Fig.6.16, si riconosce facilmente che la funzione di trasferimento da  $\delta_{a2}$  a  $\varepsilon$  è data da:

$$F_{a2}(s) = \frac{-1}{1 + L(s)} = -S(s) \quad , \quad L(s) := R(s) G_a(s) G_r(s) .$$

Inoltre, la banda  $[0.005, 0.05]$  è sicuramente compresa nella banda passante ( $\omega_c \geq 0.1$ ) e sappiamo che, sulla banda passante ( $|L(j\omega)| \gg 1$ ),  $|S(j\omega)| \cong 1/|L(j\omega)|$ .

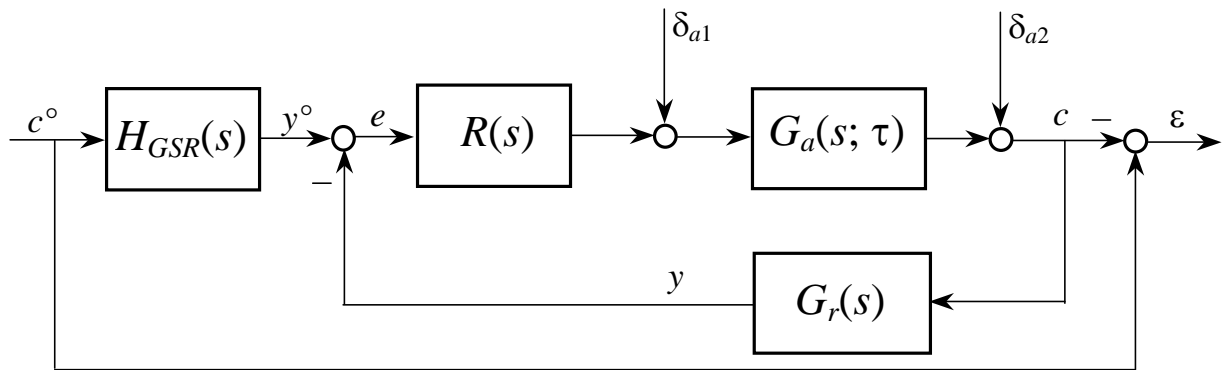


Fig. 6.16 : Esempio 3. Il sistema di controllo con l'errore effettivo in evidenza.

Poiché  $|E_{a2}(j\omega)| = |F_{a2}(j\omega)| |\Delta_{a2}(j\omega)|$ , la condizione:  $|E_{a2}(j\omega)| \leq 0.025 |\Delta_{a2}(j\omega)|$  equivale a  $|F_{a2}(j\omega)| \leq 0.025$ . Ma  $|F_{a2}(j\omega)| = |S(j\omega)| \cong 1/|L(j\omega)|$ , sulla banda passante. Quindi, la specifica:  $|E_{a2}(j\omega)| \leq 0.025 |\Delta_{a2}(j\omega)|, \forall \omega \in [0.005, 0.05] [rad/udt]$ , è (con buona approssimazione) equivalente a:

$$|L(j\omega)| \geq \frac{1}{0.025} = 40 \Leftrightarrow |L(j\omega)|_{dB} \geq 32, \quad \forall \omega \in [0.005, 0.05] [rad/udt].$$

Si noti che, se questa condizione è verificata, la banda  $[0.005, 0.05]$  è sicuramente compresa nella banda passante.

Tenendo conto del progetto statico, a questo punto si ha:

$$L_1(s; \tau) = \frac{0.6 e^{-\tau s}}{s(1 + 0.8s)}.$$

Il modulo della risposta in frequenza d'anello corrispondente a  $\tau = 0$  ha l'andamento mostrato in Fig.6.17. In particolare, si ha:

$$\omega_c = 0.6 [rad/udt], \quad \varphi_m = 180^\circ - |-90^\circ - 28^\circ| = 62^\circ.$$

Ma il diagramma invade la zona interdotta. Occorre, quindi modificarne l'andamento in bassa frequenza; ad esempio, come indicato in figura (linea rossa). In questo modo, la banda passante resta invariata, ma il margine di fase diventa:

$$\varphi_m = 180^\circ - |-90^\circ - 88^\circ + 71^\circ - 28^\circ| = 45^\circ.$$

Per aumentare il margine di fase, possiamo ampliare la zona in cui il diagramma ha pendenza  $-1$  attorno alla pulsazione critica. Ciò comporta una modifica del diagramma anche in alta frequenza (Fig.6.17, linea rossa).

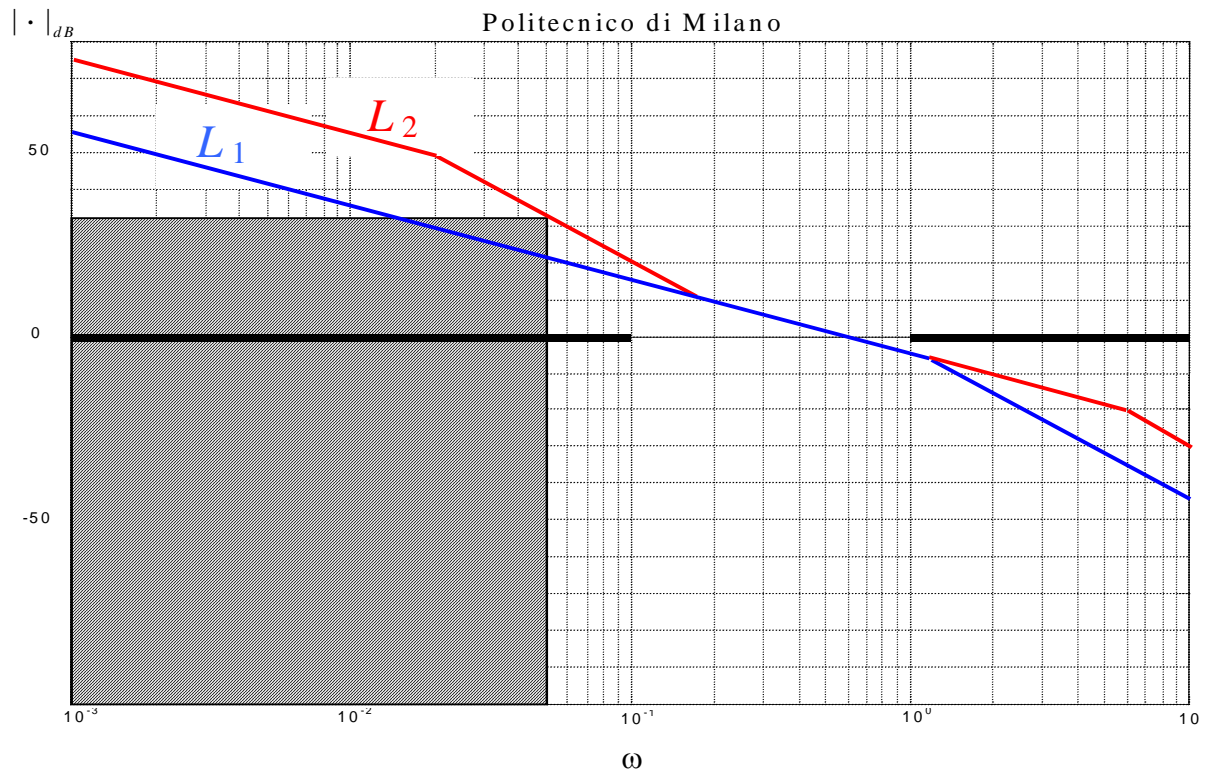


Fig. 6.17 : Esempio 3. Diagrammi di Bode asintotici del modulo.

In questo modo si ha:

$$L_2(s; 0) = 6 \frac{(1 + 5.882 s)}{s (1 + 50 s)(1 + 0.167 s)}$$

$$\varphi_m = 180^\circ - |-90^\circ - 88^\circ + 71^\circ - 6^\circ| = 67^\circ$$

$$R(s) = \frac{L_2(s; 0)}{G_a(s; 0) G_r(s)} = 30 \frac{(1 + 5.882 s)(1 + 0.8 s)}{(1 + 50 s)(1 + 0.167 s)} \cdot$$

**b)** Un ritardo di 0.2 [udt] produce una riduzione del margine di fase pari a:

$$\delta\varphi_m = -\tau \omega_c \frac{180}{\pi} = -\frac{0.2 \times 0.6 \times 180}{\pi} = -6.88 \quad \rightarrow \quad \varphi_m = 60^\circ$$

mentre la pulsazione critica (la banda passante) e la precisione statica rimangono invariate.

**Esempio 4.** Si consideri il sistema di controllo di Fig.6.18, dove:

$$G(s) = \frac{0.5}{(1 + 0.25 s)(1 + 0.012 s)}$$

(le costanti di tempo sono espresse in secondi), e si discuta la possibilità di tarare un controllore PID (con filtro del prim'ordine sull'azione derivativa) in modo tale che:

- la pulsazione critica  $\omega_c$  risulti maggiore o uguale a 1.5 e, possibilmente, non superiore a 6;
- il margine di fase sia maggiore di  $50^\circ$ ;
- sia nullo l'errore a transitorio esaurito prodotto da una variazione a scalino del riferimento o del disturbo  $\delta_a$ ;
- l'effetto prodotto su  $c$  dalle componenti spettrali di  $\delta_a$  che insistono sulla banda (0.01, 0.05) [rad/sec] risultino attenuate, rispetto alla situazione ad anello aperto, di almeno 100 volte.

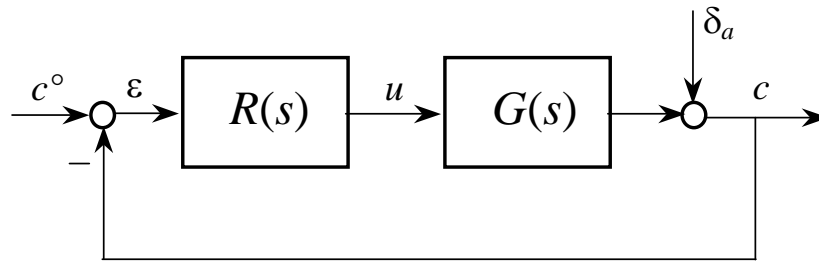


Fig. 6.18 : Sistema di controllo.

Osserviamo innanzitutto che il requisito (c) riguardante la precisione statica è soddisfatto se il tipo del sistema di controllo (il numero di poli nell'origine della funzione di trasferimento d'anello) è maggiore o uguale a 1. Poiché, grazie all'azione integrale, la funzione di trasferimento di un controllore PID (o anche PI) ha un polo nell'origine, il requisito suddetto è senz'altro soddisfatto.

Vediamo ora come il requisito (d) possa essere equivalentemente riformulato sotto forma di vincolo per la risposta in frequenza d'anello  $L(j\omega)$  del sistema di controllo. Indicando con  $C_a(s)$  la trasformata di Laplace dell'effetto prodotto da  $\delta_a$  su  $c$  e con  $F_{ca}(s)$  la funzione di trasferimento (ad anello chiuso) da  $\delta_a$  a  $c$ , il requisito (d) equivale a richiedere che sia:

$$|C_a(j\omega)| = |F_{ca}(j\omega)| |\Delta_a(j\omega)| \leq 0.01 |\Delta_a(j\omega)|, \quad \forall \omega \in (0.01, 0.05);$$

cioè:

$$|F_{ca}(j\omega)| \leq 0.01 \quad , \quad \forall \omega \in (0.01, 0.05) .$$

Per questo, l'intervallo (0.01, 0.05) dovrà necessariamente appartenere alla banda passante del sistema di controllo e, *sulla banda passante*:

$$|F_{ca}(j\omega)| = \frac{1}{|1 + L(j\omega)|} \cong \frac{1}{|L(j\omega)|} .$$

Accettando questa approssimazione, la specifica ( $d$ ) equivale ad imporre:

$$|L(j\omega)| \geq 100 \quad \Leftrightarrow \quad |L(j\omega)|_{dB} \geq 40 \quad , \quad \forall \omega \in (0.01, 0.05) .$$

Per la scelta dei parametri di un controllore PID (o PI), è spesso conveniente procedere come segue.

1) Supporre di adottare un PID ideale:

$$R(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{s T_i} + s T_d \right) := \mu_{PID} \frac{(1 + s T_1)(1 + s T_2)}{s}$$

e determinare (se possibile) un valore dei parametri  $\mu_{PID}$ ,  $T_1$  e  $T_2$  che rispetti le specifiche (con un leggero margine di sicurezza).

2) Calcolare quindi i corrispondenti valori di  $K_p$ ,  $T_i$  e  $T_d$

$$K_p = \mu_{PID} (T_1 + T_2) \quad , \quad T_i = T_1 + T_2 \quad , \quad T_d = \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}$$

e supporre che il filtro sull'azione derivativa sia caratterizzato da un valore di  $N$  pari, ad esempio, a 10.

3) Verificare infine che le prestazioni offerte dal controllore risultante, la cui funzione di trasferimento è data da:

$$R(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{s T_i} + \frac{s T_d}{1 + s T_d/N} \right) := \mu_{PID} \frac{(1 + s T_1^*)(1 + s T_2^*)}{s (1 + s T)}$$

$$\mu_{PID} = \frac{K_p}{T_i} \quad , \quad T = \frac{T_d}{N} \quad , \quad T_{1,2}^* = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \quad , \quad a := T_i + \frac{T_d}{N} \quad , \quad b := T_i T_d \frac{N+1}{N} \quad ,$$

non differiscano troppo da quelle del PID ideale. Si noti che qualora risultasse  $a^2 < 4b$ , allora si avrebbe:  $(1 + s T_1^*)(1 + s T_2^*) = 1 + 2 \zeta s/\omega_n + (s/\omega_n)^2$ , con:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{N}{T_i T_d (N+1)}} \quad , \quad \zeta = \frac{N T_i + T_d}{2 N} \sqrt{\frac{N}{T_i T_d (N+1)}} \quad .$$

**N.B.:** Se una sola costante di tempo  $T_1$  al numeratore fosse sufficiente a conseguire il risultato richiesto ( $T_2 = 0$ ), la soluzione potrebbe consistere in un semplice controllore PI con funzione di trasferimento:

$$R(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{s T_i} \right) := \mu_{PI} \frac{1 + s T_1}{s} \quad ; \quad K_p = \mu_{PI} T_i \quad , \quad T_i = T_1 \quad .$$

Vediamo quindi, nel caso in esame, se è possibile tarare un PID ideale in modo che tutte le specifiche risultino soddisfatte. Come primo tentativo, attribuiamo a  $L_1(s)$  il polo nell'origine presente nella funzione di trasferimento del PID e attribuiamo per il momento al guadagno d'anello il valore 0.5 ( $\mu_{PID} = 1$ ).

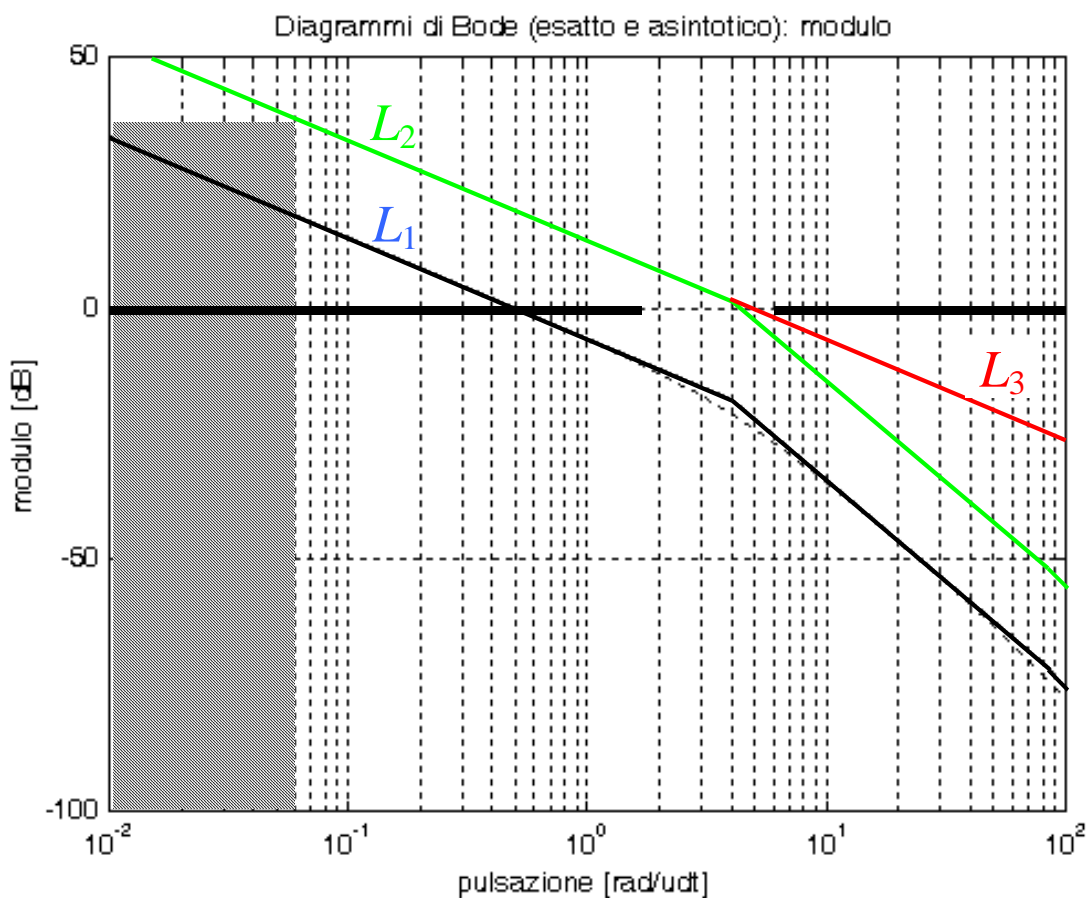


Fig. 6.19 : Esempio 4. Diagrammi di Bode asintotici del modulo.



Poniamo cioè:

$$L_1(s) = \frac{0.5}{s(1 + 0.25s)(1 + 0.012s)} ;$$

il corrispondente diagramma di Bode asintotico del modulo è mostrato in Fig.6.19 (linea blu). Le condizioni (a) e (d) risultano evidentemente violate.

Possiamo innanzitutto alzare di 22 dB il diagramma  $L_1$ :

$$\mu_{PID}|_{dB} = 22 \quad \Rightarrow \quad \mu_{PID} = 12.5893 ,$$

ottenendo così  $L_2$  (linea verde). A questo punto, si ha:

$$\omega_c \cong 4.3 \text{ [rad/sec]} , \quad \varphi_m \cong 180^\circ - |-90^\circ - 47^\circ - 3^\circ| = 40^\circ .$$

Il margine di fase è insufficiente, ma sono ancora da utilizzare le due costanti di tempo al numeratore. Se si utilizzano queste due costanti di tempo per cancellare quelle al denominatore di  $L_1(s)$ , uguali a quelle di  $L_2(s)$ , il diagramma risultante è una retta con pendenza -1 (linea rossa):

$$T_1 = 0.25 , \quad T_2 = 0.012 , \quad \omega_c \cong 5 \text{ [rad/sec]} , \quad \varphi_m \cong 180^\circ - |-90^\circ| = 90^\circ .$$

I corrispondenti parametri di un PID ideale sono:

$$K_p = \mu_{PID} (T_1 + T_2) \cong 3.3 \quad , \quad T_i = T_1 + T_2 = 0.262 \quad , \quad T_d = \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} = 0.0115 .$$

Aggiungendo un filtro sull'azione derivativa con  $N = 10$ , si ottiene:

$$T = \frac{T_d}{N} = 0.00115 ; \quad a := T_i + \frac{T_d}{N} = 0.2631 , \quad b := T_i T_d \frac{N+1}{N} = 0.0033$$

$$T_{1,2}^* = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \quad \Rightarrow \quad T_1^* = 0.2499 \quad , \quad T_2^* = 0.0132 .$$

La costante di tempo  $T_1$  resta sostanzialmente invariata;  $T_2$  si dimezza ed è quasi cancellata dalla costante di tempo  $T$  al denominatore. La seconda costante di tempo gioca dunque un ruolo quasi insignificante; un risultato sostanzialmente equivalente si può ottenere con un semplice PI ( $T_2 = 0$ ,  $\mu_{PI} = \mu_{PID} = 12.5893$ ):

$$T_1 = 0.25 , \quad \omega_c \cong 5 \text{ [rad/sec]} , \quad \varphi_m \cong 180^\circ - |-90^\circ - 3^\circ| = 87^\circ .$$

## 7. Controllo ad anello aperto

Si è visto, nel Capitolo 5, quale differenza caratterizzi i sistemi di controllo *ad anello aperto*, o *ad azione diretta in avanti* (“feed-forward control”), da quelli *ad anello chiuso*, o *a retroazione* (“feed-back control”).

Come naturale conseguenza dell’impostazione classica, i sistemi di controllo finora considerati in questo capitolo sono essenzialmente ad anello chiuso. E’ tuttavia interessante, nel caso dei sistemi lineari e tempo-invarianti, riprendere brevemente ed esaminare più da vicino il concetto di controllo ad anello aperto per metterne ulteriormente in evidenza i connotati salienti: positivi e negativi.

Per cominciare, distingueremo ancora una volta un *problema d’inseguimento* da quello di *reagire all’azione di un disturbo* (additivo).

### *Inseguimento di $c^\circ$ (segnale di riferimento)*

Se  $G(s)$  è la funzione di trasferimento del sistema sotto controllo e  $R(s)$  quella del controllore d’inseguimento (Fig.7.1), il calcolo di  $R(s)$  è elementare.

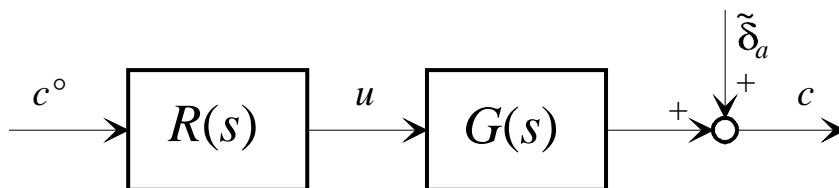


Fig. 7.1 : Inseguimento ad anello aperto.

Infatti, per imporre che (almeno in assenza di disturbi) l’andamento effettivo della variabile controllata coincida con quello desiderato basta fare in modo che sia uguale a 1 la funzione di trasferimento da  $c^\circ$  a  $c$ :

$$F^\circ(s) = 1 \quad \Rightarrow \quad R(s) G(s) = 1 \quad \Rightarrow \quad R(s) = \frac{1}{G(s)} .$$

La disarmante semplicità del risultato non deve trarre in inganno. Saranno sufficienti, a questo scopo, alcune osservazioni.

- a) Se il sistema sotto controllo non è asintoticamente stabile (almeno un polo di  $G(s)$  ha parte reale non negativa),  $R(s)$  produce cancellazioni illegittime. In questo caso, nessun sistema di controllo ad anello aperto può essere asintoticamente stabile.

- b) L'azione di controllo, che ignora i disturbi (tanto additivi quanto strutturali), non ha alcuna possibilità di attenuarne le conseguenze negative.
- c) Si noti che: *i)* se zeri di  $G(s)$  hanno parte reale non negativa,  $R(s)$  produce cancellazioni illegittime; *ii)* se il grado relativo  $\gamma$  di  $G(s)$  è maggiore di zero,  $R(s)$  non è causale.

A questi due ultimi inconvenienti si può mettere parziale rimedio se si rinuncia ad imporre che sia unitaria la funzione di trasferimento  $F^\circ(s)$  da  $c^\circ$  a  $c$ . Infatti, se  $F^\circ(s)$  fosse invece (più realisticamente) un'arbitraria funzione di trasferimento comprendente tutti gli zeri di  $G(s)$  che abbiano parte reale non negativa e avente grado relativo non inferiore a  $\gamma$ , allora perchè risulti  $R(s) G(s) = F^\circ(s)$  basta porre:

$$R(s) = \frac{F^\circ(s)}{G(s)}$$

che è causale e non produce cancellazioni illegittime di zeri di  $G(s)$ . Naturalmente, il problema consiste ora nello scegliere (se esiste) un'*accettabile* funzione di trasferimento  $F^\circ(s)$ ; una funzione di trasferimento, cioè, che abbia le caratteristiche richieste e che, nel medesimo tempo, descriva un legame fra  $c^\circ$  e  $c$  tale da non smentire l'obiettivo essenziale di ogni buon sistema di controllo: vale a dire che  $c$  insegua  $c^\circ$  con sufficiente precisione.

### **Compensazione di un disturbo**

Compensare un disturbo  $\delta_a$  significa esercitare un'azione di controllo intesa a rendere la variabile controllata  $c$  indipendente da  $\delta_a$ . Nel caso di sistemi lineari e tempo-invarianti, ciò equivale ad annullare la funzione di trasferimento da  $\delta_a$  a  $c$ . Se è possibile misurare  $\delta_a$ , o una variabile  $z$  del sistema sotto controllo che dipenda da  $\delta_a$  ma sia indipendente dalla variabile di controllo  $u$  disponibile per la compensazione di  $\delta_a$ , allora è possibile che si riesca a conseguire l'obiettivo con un controllore ad anello aperto.

Con riferimento al sistema di Fig.7.2, si riconosce immediatamente che la funzione di trasferimento da  $\delta_a$  a  $c$ , data da:  $H(s) + K(s) T(s) R(s) G(s)$ , si annulla semplicemente ponendo:

$$R(s) = - \frac{H(s)}{K(s) T(s) G(s)} \cdot$$

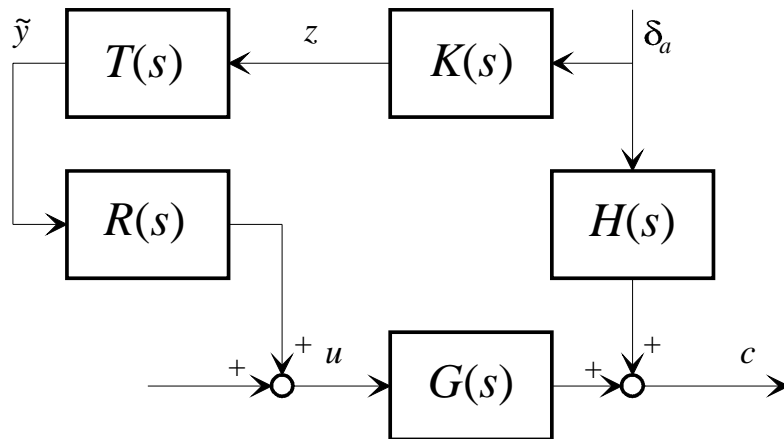


Fig. 7.2 : Compensazione di un disturbo (ad anello aperto).

Anche in questo caso occorre considerare con attenzione i limiti del procedimento appena descritto. A questo scopo, possono essere utili le seguenti osservazioni.

- a) Se il sistema sotto controllo non è asintoticamente stabile (almeno un polo di  $G(s)$ , o di  $H(s)$  o di  $K(s)$ , ha parte reale non negativa), il sistema risultante non sarà asintoticamente stabile. Un controllore ad anello aperto può solo aggiungere autovalori al sistema senza modificare i preesistenti.
- b) Se  $G(s)$  o  $K(s)$  hanno zeri con parte reale non negativa che non siano anche zeri di  $H(s)$ , il controllore (e quindi il sistema risultante) non sarà asintoticamente stabile.
- c) Il grado relativo di  $R(s)$  potrebbe risultare negativo (controllore non causale). In tal caso, la compensazione sarebbe ancora possibile solo se il disturbo  $\delta_a$  potesse essere ritenuto, almeno in prima approssimazione, un segnale a banda limitata; indicando infatti con  $\mathbf{B}_\delta := \{\omega: \Delta_a(j\omega) \neq 0\}$  la banda di  $\delta_a$ , la compensazione sarebbe assicurata da qualsiasi  $R(s)$  causale tale che

$$R(j\omega) = -\frac{H(j\omega)}{K(j\omega) T(j\omega) G(j\omega)} \quad , \quad \forall \omega \in \mathbf{B}_\delta .$$

- d) Anche in questo caso, in presenza di eventuali disturbi (additivi o strutturali), l'azione di controllo non ha alcuna possibilità di attenuarne le conseguenze negative. Naturalmente, se ne sussistono le condizioni, ogni altro disturbo additivo potrebbe essere fatto oggetto di compensazione. La compensazione di un ulteriore disturbo comporta però l'adozione di un

nuovo trasduttore e la realizzazione di un controllore addizionale, con quale incidenza sui costi è facile immaginare.

*Compensazione ad anello chiuso (cenno)*

Se non c'è modo di evitare che la variabile misurata  $z$  dipenda, oltre che da  $\delta_a$ , anche da  $u$  allora la compensazione di  $\delta_a$  è ancora teoricamente possibile (Fig.7.3), ma il controllore che la realizza viene ad operare ad anello chiuso e richiede pertanto la verifica di un'ulteriore e non banale condizione di stabilità.

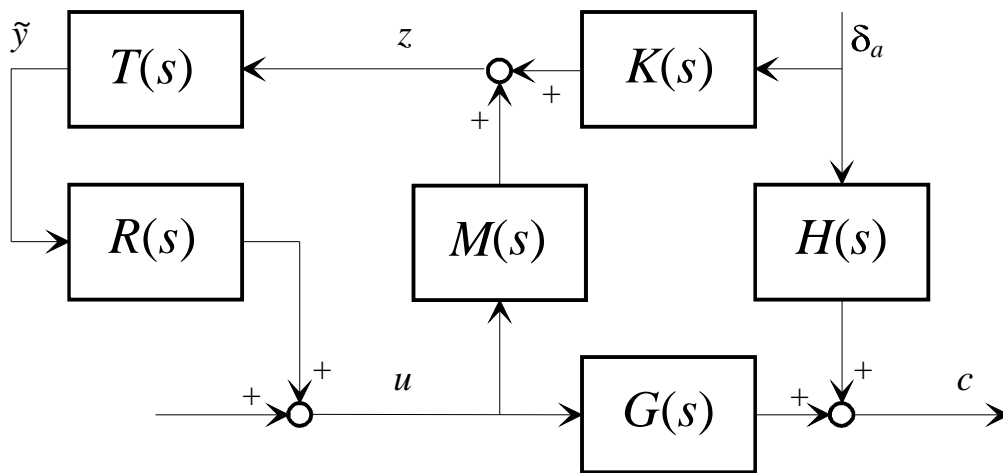


Fig. 7.3 : Compensazione di un disturbo (ad anello chiuso).

In questo caso, la condizione di compensazione diventa:

$$H(s) + \frac{K(s) T(s) R(s) G(s)}{1 - T(s) R(s) M(s)} = 0$$

da cui:

$$R(s) = \frac{H(s)}{T(s) [H(s) M(s) - K(s) G(s)]} .$$

Anche nel caso di sistema sotto controllo asintoticamente stabile con funzioni di trasferimento aventi zeri a parte reale negativa, il sistema di Fig.7.3 può risultare non asintoticamente stabile (se non tutti gli zeri di  $1 - T(s) R(s) M(s)$  hanno parte reale negativa). Non deve sorprendere, quindi, che questo tipo di compensazione sia assai raramente utilizzato in pratica.

## Schemi misti

Un controllore ad anello aperto può fornire una soluzione soddisfacente di un assegnato problema di controllo, se l'incertezza relativa al comportamento del sistema da controllare è, o può essere resa, piccola rispetto alla precisione richiesta. Cioè, se i disturbi strutturali presenti nel sistema sotto controllo sono trascurabili e quelli additivi di qualche rilevanza sono pochi e tutti direttamente o indirettamente misurabili a costi contenuti.

In ambito industriale, è assai raro che queste condizioni siano verificate: l'incertezza tipica dei processi industriali (disturbi strutturali non trascurabili accompagnati da una varietà indefinita di disturbi additivi di entità almeno occasionalmente rilevante) rende quasi sempre inevitabile il ricorso a un controllore ad anello chiuso che, operando primariamente in base all'errore, non ha bisogno di distinguere fra le innumerevoli cause che possono averlo prodotto; l'unica attività di "misura e trasmissione" effettivamente necessaria, e quindi l'unico trasduttore ineliminabile, riguardano, in questo caso, la variabile controllata (ovvero, nei casi meno fortunati, una variabile che ne faccia in qualche modo le veci).

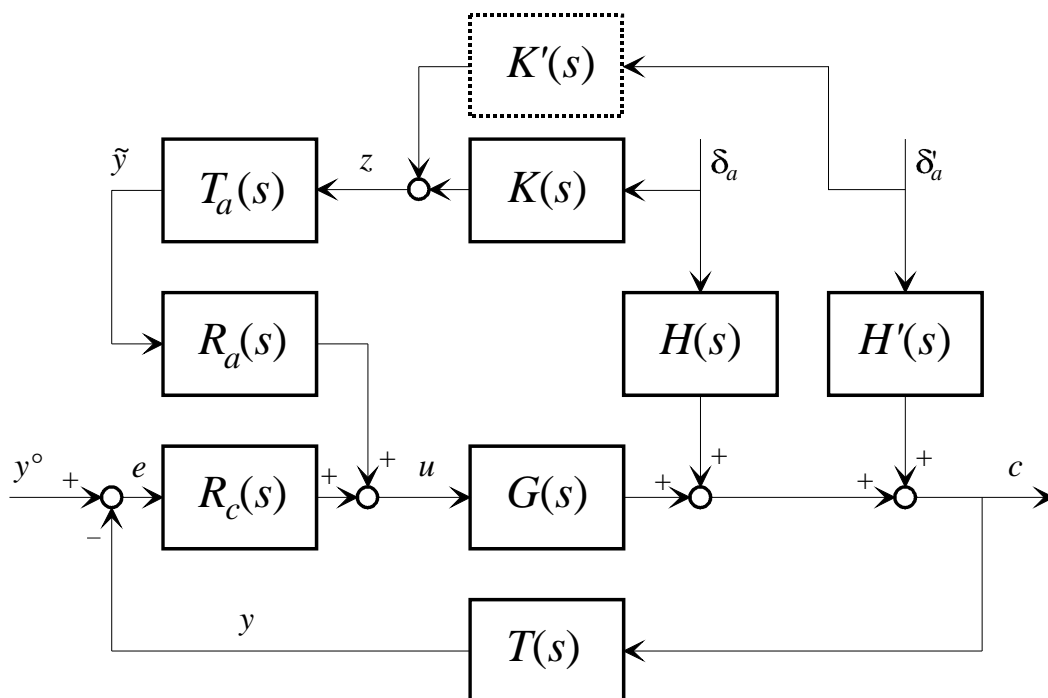


Fig. 7.4 : Schema di controllo misto (anello aperto - anello chiuso).

Si noti, tuttavia, che "per definizione" l'azione di un controllore ad anello chiuso del tipo considerato nei capitoli precedenti si esercita soltanto dopo che l'errore prodotto dal disturbo si sia manifestato e la sua intensità dipende dall'entità

dell'errore. E quindi non è infrequente che, in presenza di pochissimi (uno o due) disturbi additivi particolarmente rilevanti e "facilmente misurabili", risulti conveniente, in pratica, aumentare la tempestività dell'azione di controllo con l'aggiunta di un compensatore ad anello aperto che (almeno in condizioni nominali) annulla l'errore prodotto da ogni disturbo compensato.

In questo modo, si perviene ad esempio allo schema misto (anello aperto - anello chiuso) mostrato in Fig.7.4, dove:

$$R_a(s) = - \frac{H(s)}{K(s) T_a(s) G(s)} \cdot$$

La compensazione, anche se imperfetta, di  $\delta_a$  rende assai tempestiva la reazione del sistema di controllo a questo disturbo, e alleggerisce il lavoro del controllore ad anello chiuso  $R_c$ , che deve reagire a tutte le altre cause d'errore (variabili indipendenti incerte) presenti nel sistema; compresi gli eventuali effetti residui di  $\delta_a$ , quando la compensazione fosse risultata imperfetta.

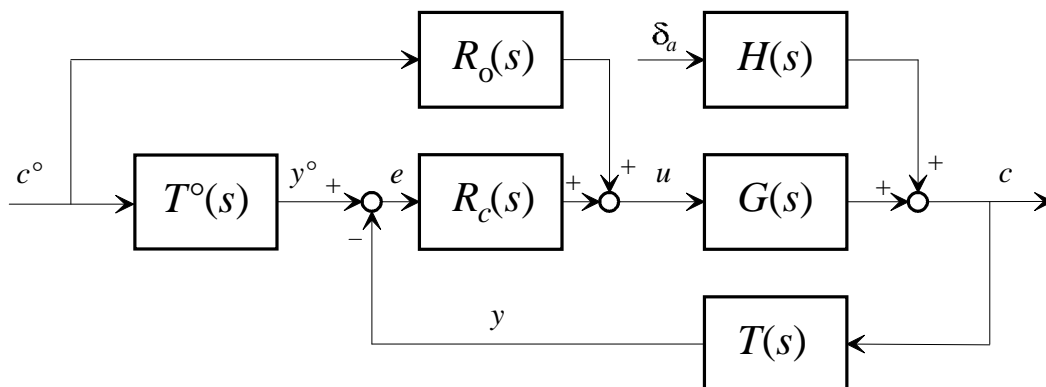


Fig. 7.5 : Schema di controllo misto (anello aperto - anello chiuso).

Un secondo esempio (meno interessante) di schema misto (Fig.7.5) presenta una componente ad anello aperto sul riferimento (controllore d'inseguimento), con:

$$R_0(s) = \frac{F^o(s)}{G(s)} \cdot$$

Naturalmente, esistono anche casi piuttosto sofisticati nei quali la componente ad anello aperto del controllore effettua contemporaneamente sia la compensazione di qualche disturbo additivo, sia l'immediato inseguimento di  $c^o$ .

## 8. Controllo "in cascata"

Come nel caso della compensazione di un disturbo, quando la parte terminale (verso  $c$ ) del sistema sotto controllo risponde con relativa lentezza, aspettare che l'azione di disturbi entranti negli elementi a monte si manifestino con valori significativi dell'errore apparente può rivelarsi controproducente. Può, cioè, essere problematico il progetto di un unico controllore in grado di esprimere un'efficace (rapida) ed equilibrata (non eccessivamente intensa) azione di controllo. In questi casi, una soluzione soddisfacente è spesso costituita dal cosiddetto controllo "in cascata"; vale a dire dall'adozione di due controllori monovariabili connessi come mostrato in Fig.8.1.

Se nel sistema sotto controllo è possibile e non eccessivamente costoso "misurare e trasmettere" (con opportuni trasduttori), oltre alla variabile controllata  $c$ , anche una variabile intermedia  $c''$  della linea d'andata, può essere infatti conveniente il ricorso a due controllori connessi in cascata (Fig.7.6). Il controllore  $R''$  può aumentare la rapidità di risposta e, nello stesso tempo, l'immunità ai disturbi della variabile  $c''$ , adottata come *variabile controllata secondaria*; la variabile  $v$  "di riferimento dell'anello secondario" ( $v = y''^o$ ) assume il ruolo di *variabile di controllo ausiliaria*, direttamente mossa dal controllore primario  $R$ . La presenza dell'anello di controllo secondario (o interno) può semplificare grandemente, se non addirittura rendere semplicemente possibile, il progetto (o la taratura) di un controllore primario  $R$  ad elevata precisione (dinamica). Il progetto può essere sommariamente strutturato come segue.

- Viene innanzitutto determinato il controllore secondario  $R''$ , con l'obiettivo di modificare opportunamente la risposta in frequenza ad anello chiuso da  $v$  a  $c''$  (banda passante) e di ridurre la vulnerabilità di  $c''$  a disturbi sulla linea d'andata dell'anello secondario. Una volta assicurati un buon margine di fase e di guadagno, le risposte in frequenza ad anello chiuso si possono approssimativamente valutare con il metodo del diagramma a massima attenuazione fra il modulo della risposta in frequenza relativo alla linea d'andata e quello relativo alla funzione di trasferimento inversa della linea di retroazione. La precisione statica è generalmente poco rilevante in questa parte del sistema.
- Una volta determinato  $R''$  e un'affidabile rappresentazione equivalente dell'anello secondario chiuso, si può passare alla soluzione del problema primario, generalmente caratterizzato da stringenti specifiche sia statiche che dinamiche. Specifiche che la presenza del controllore secondario può rendere meno critiche, per la significativa attenuazione degli effetti di alcuni disturbi su  $c''$  e per la migliorata risposta in frequenza dalla nuova variabile di controllo  $v$  a  $c''$ , e quindi a  $c$ .



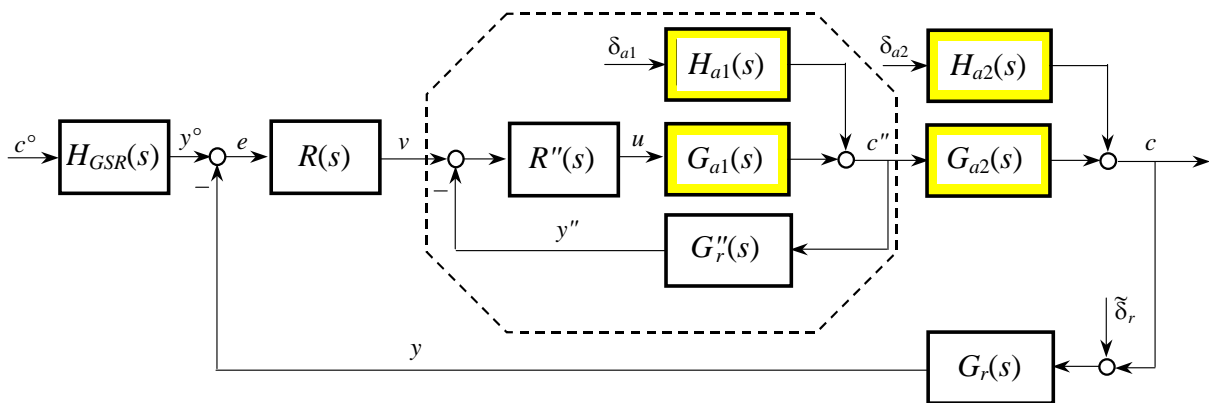


Fig. 8.1 : Sistema di controllo con due controllori connessi “in cascata”.

## 9. Controllo di sistemi instabili

Le ipotesi di Bode escludono i casi in cui la funzione di trasferimento da  $u$  a  $c$  del sistema sotto controllo abbia almeno un polo con parte reale positiva e sia quindi instabile. In questi casi, e quasi sempre quando il sistema sotto controllo non sia asintoticamente stabile, è conveniente adottare una strategia analoga a quella del controllo in cascata (Fig.9.1).

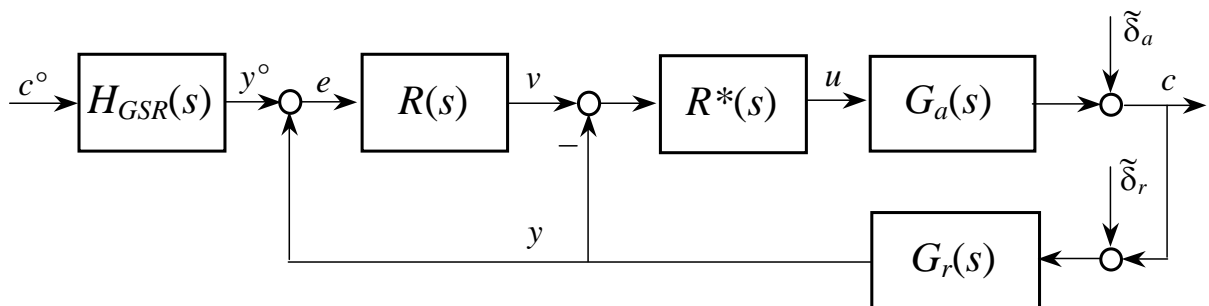


Fig. 9.1 : Controllore a due gradi di libertà.

Il controllore  $R^*(s)$  ha come obiettivo primario quello di “stabilizzare l’anello interno”; di far in modo, cioè, che la funzione di trasferimento  $F^*(s)$ , dove:

$$F^*(s) = \frac{R^*(s) G_a(s)}{1 + L^*(s)} \quad , \quad L^*(s) := R^*(s) G_a(s) G_r(s) \quad ,$$

non abbia poli con parte reale positiva e, possibilmente, neppure con parte reale nulla. La funzione  $R^*(s)$  può essere (faticosamente) determinata per tentativi ricorrendo, ad esempio, al criterio di Nyquist. Oppure, sempre per tentativi, al metodo del Luogo delle radici, per il quale si rimanda a trattazioni complementari di approfondimento. La linea di attacco più sistematica ed

efficace per risolvere problemi di stabilizzazione è tuttavia offerta dai cosiddetti metodi nello spazio di stato, anch'essi oggetto di trattazioni più approfondite alle quali il lettore può fare riferimento.

Una volta determinata la funzione  $R^*(s)$ , il progetto del controllore primario  $R(s)$  può essere impostato nel modo consueto, come mostrato in Fig.9.2, dove:

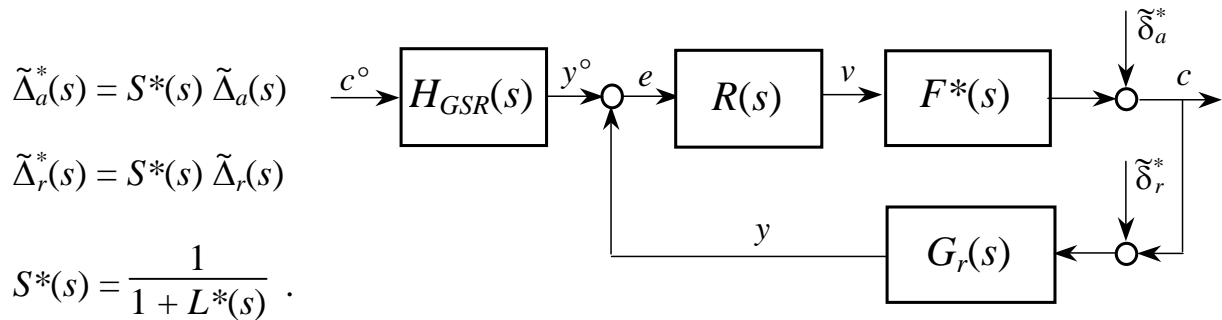


Fig. 9.2 : Sistema di controllo primario.

## 10. Sistemi di controllo multivariabili (cenno)

Un problema di controllo multivariabile è caratterizzato dalla presenza di più variabili controllate (almeno 2) e più variabili di controllo. Nei processi industriali, questa è una situazione frequente; tuttavia, la maggior parte dei sistemi di controllo dei processi industriali viene concepita, progettata e realizzata facendo primariamente ricorso ai concetti, ai paradigmi e ai metodi del controllo monovariabile, piuttosto che a quelli più specificamente pertinenti alla teoria dei sistemi di controllo multivariabili (o teoria multivariabile, come si dirà, per esser brevi, di qui in avanti).

Le ragioni di questo stato di cose, per altro non necessariamente destinato a durare per sempre, sono molteplici e non tutte facilmente apprezzabili senza un'adeguata conoscenza della teoria multivariabile. Esse sono per la maggior parte riconducibili all'intrinseca difficoltà di quest'ultima a fornire strumenti di analisi e di progetto capaci d'incorporare con naturalezza e semplicità alcuni vincoli ed obiettivi percepiti come particolarmente importanti nei sistemi di controllo multivariabili, primo fra tutti quello di una forte modularità, o compartimentazione, o articolazione del sistema di controllo in architetture complesse, variamente connotate da tendenze alla decentralizzazione, da una parte, e all'integrazione dall'altra, al fine di garantire a un tempo sicurezza ed efficienza, robustezza e flessibilità, trasparenza e tempestività.

Senza entrare a fondo in questa tematica complessa, l'obiettivo che qui ci si propone è quello di far apprezzare il ruolo, tuttora sorprendentemente importante, giocato in questo contesto dalla teoria monovariabile; di mostrare,

cioè, quali argomentazioni o quali tecniche possano consentire di spezzare un problema di controllo multivariabile in una sequenza (o un insieme) di problemi di controllo monovariabili. L'impostazione di gran lunga più frequente nelle applicazioni industriali è quella qui indicata come *scomposizione euristica*. Essa si articola in una successione di passi sommariamente descritti nel seguito.

*a) Scelta e attribuzione delle variabili di controllo*

Ad ogni variabile controllata viene associata una variabile manipolata con il generico criterio di far sì che, per quanto possibile, ognuna delle variabili controllate risulti fortemente influenzata dalla "sua" variabile manipolata e il meno possibile da tutte le altre.

Una volta fatta tale attribuzione, indichiamo con  $m_i$  la variabile manipolata associata alla variabile controllata  $c_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ . Tale attribuzione produce, ovviamente, un accoppiamento indotto fra la variabile di controllo  $u_i$ , che comanda  $m_i$  attraverso un opportuno attuatore, e la variabile d'uscita  $y_i$ , che esprime una misura di  $c_i$ .

*b) Ordinamento delle coppie  $(u_i, y_i)$*

Per ordinare le coppie formate al punto precedente, uno dei criteri ai quali più comunemente si ricorre fa riferimento ai tempi di risposta; esso comporta che la coppia  $(u_i, y_i)$  preceda la coppia  $(u_k, y_k)$  se la durata massima ammissibile dei transitori su  $y_i$  è minore di quella su  $y_k$ . Infine, si possono ridenominare le variabili in modo che, nell'ordinamento suddetto, l' $i$ -esima coppia preceda la  $k$ -esima se  $i < k$ .

*c) Progetto (o taratura empirica) del controllore*

In un sistema di controllo multivariabile, è importante specificare da quali delle variabili d'ingresso del controllore può dipendere ognuna delle variabili di controllo; è importante cioè specificare la *struttura informativa* del sistema di controllo. Un controllore multivariabile è infatti generalmente costituito da varie unità (*controllori locali*), fisicamente distinte e spesso dislocate in punti diversi del sistema sotto controllo, ognuna delle quali riceve al suo ingresso un sottoinsieme soltanto delle informazioni disponibili (tipicamente, alcune delle misure effettuate sull'impianto) e ha il compito di esprimere, come variabili di uscita, un sottoinsieme delle variabili di controllo, e precisamente l'elemento ad essa pertinente di una partizione di  $u$ . Se ognuna delle variabili di controllo effettivamente dipende da tutte le variabili d'ingresso del controllore, si ha una struttura informativa *centralizzata*. In tutti gli altri casi, la struttura informativa del controllore si dice *decentralizzata*.

La scomposizione euristica di un problema di controllo multivariabile in una sequenza di problemi monovariabili è basata sull'ipotesi (euristica) che il problema possa essere soddisfacentemente risolto adottando per il controllore una struttura informativa *totalmente decentralizzata*; una struttura informativa, cioè, secondo la quale il controllore  $i$ -esimo  $C_i$  esprime la singola variabile di controllo  $u_i$  facendola dipendere esclusivamente dalla variabile di uscita  $y_i$  ad essa associata, oltre che, ovviamente, dal valore desiderato di quest'ultima. In altri termini, si adotta *a priori*, per il sistema di controllo multivariabile, la struttura mostrata in Fig.10.1.

I controllori locali  $C_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ , possono infine essere determinati in sequenza (con metodi empirici o con metodi razionali) incorporando ad ogni passo (nel progetto, cioè, del controllore  $C_i$ ) i controllori già determinati ( $C_1, C_2, \dots, C_{i-1}$ ) nel sistema sotto controllo ( $P_i$ ) e considerando  $y_1^{\circ}, y_2^{\circ}, \dots, y_{i-1}^{\circ}, u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_p$  come variabili indipendenti incerte (Fig.10.2).

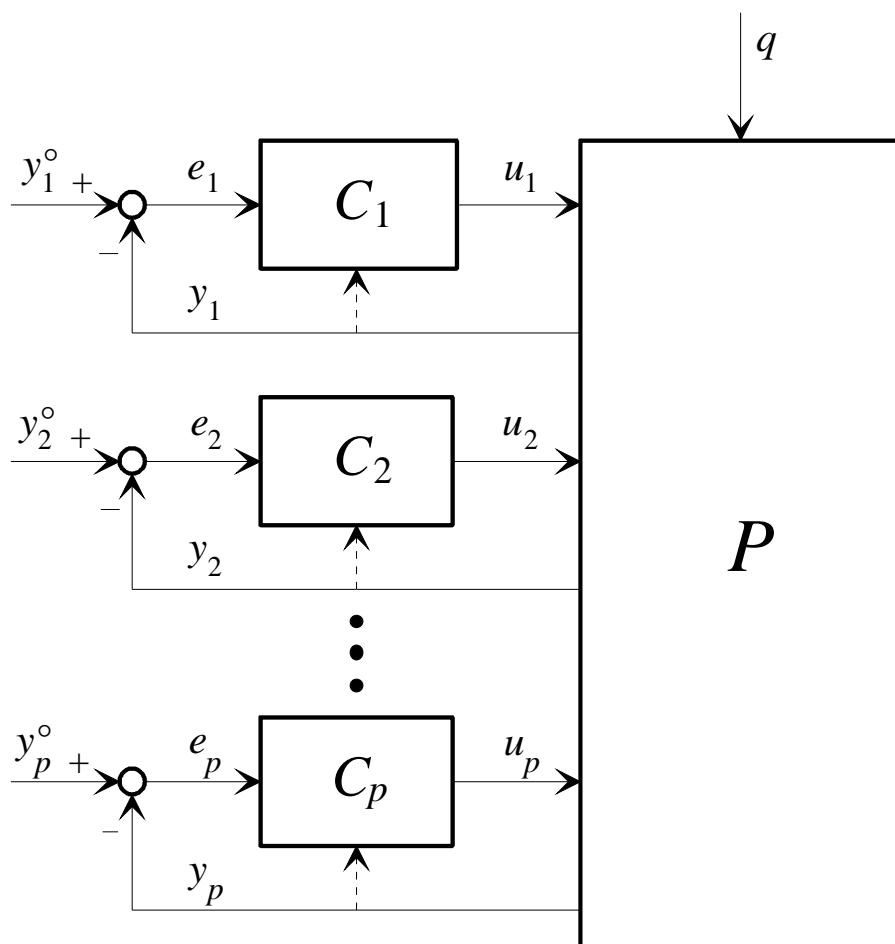


Fig. 10.1 : Sistema di controllo totalmente decentralizzato.

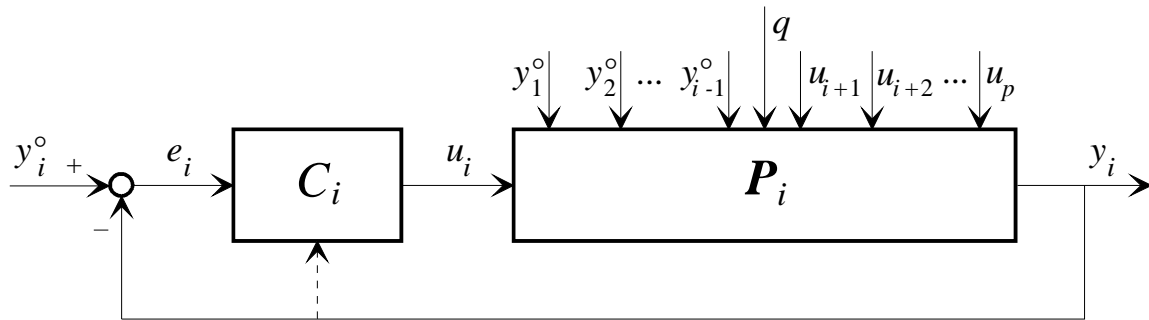


Fig. 10.2 : Progetto (o taratura) del controllore  $C_i$ .

**Esempio**

Nel caso semplice di due sole variabili controllate ( $p=2$ ), la sequenza di due progetti (o tarature) monovariabili in cui si articola il progetto del controllore multivariabile (totalmente decentralizzato) è mostrata in Fig.10.3.

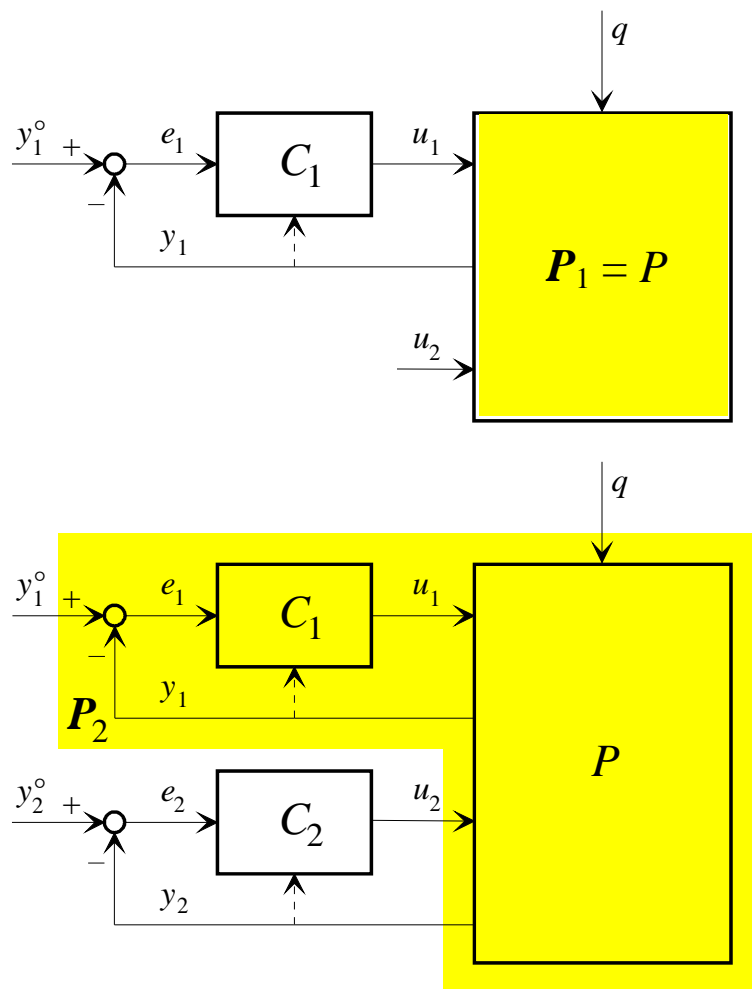


Fig. 10.3 : Progetto (taratura) di  $C_1$  e di  $C_2$ .