

Capitolo 6
*Sistemi di controllo lineari,
tempo-invarianti, monovariabili*

1. Introduzione

Questo capitolo è dedicato ad alcuni dei fondamenti della cosiddetta teoria classica del controllo. Precisamente, quelli riguardanti i sistemi di controllo lineari, tempo-invarianti, monovariabili.

Benché l'obiettivo ultimo della trattazione sia l'avviamento alla progettazione del controllore, buona parte di questo capitolo sarà dedicata alla discussione di problemi di analisi; cioè alla valutazione delle prestazioni di un sistema di controllo completamente specificato. Verranno tuttavia privilegiati i metodi di analisi dotati di una particolare dote che chiameremo "trasparenza". Tanto più trasparente sarà considerato un metodo di analisi, quanto più evidente e semplice sarà il legame che, attraverso di esso, si stabilirà fra i connotati salienti del sistema da analizzare, vale a dire i dati del problema, e i risultati dell'analisi. E' questa dote, infatti, che rende un metodo di analisi prezioso in un procedimento di progetto condotto per tentativi e correzioni, qual è fondamentalmente quello suggerito dall'impostazione classica del problema. La trasparenza del metodo consente d'intravedere senza eccessiva difficoltà, quando le prestazioni non siano ancora del tutto soddisfacenti, come modificare i dati, nel nostro caso come modificare il controllore, in modo da ottenere un risultato migliore.

Gli indici di prestazione più importanti, in un sistema di controllo, sono naturalmente quelli riguardanti la stabilità e la precisione (statica e dinamica). Per i sistemi lineari e tempo-invarianti oggetto di questo capitolo verranno forniti indicatori *quantitativamente* significativi per queste proprietà fondamentali. E' bene tuttavia tener presente che la valutazione di un sistema di controllo è anche fatta, nella maggior parte dei casi, di elementi *qualitativi* (la forma dei transienti, la capacità di sopravvivere, sia pure in modo degradato, a perturbazioni inattese, l'equilibrio nel commisurare il degrado nelle prestazioni e l'intensità dell'azione di controllo alla frequenza attesa dei disturbi più insidiosi) non facilmente esprimibili in formule o vincoli di natura matematica. Su questo fronte, un ruolo straordinariamente importante è svolto dai metodi e dagli strumenti di *simulazione*. Il progetto del controllore sarà necessariamente basato su un modello semplificato (lineare, invariante nel tempo, di ordine ridotto) del sistema sotto controllo. Un'accorta simulazione può consentire non solo un'analisi più completa, sia quantitativa che qualitativa, dei sistemi di controllo lineari considerati in fase di progetto, ma anche una più convincente validazione del controllore, connesso a un simulatore accurato ed affidabile (generalmente non lineare e relativamente complesso) del sistema sotto controllo.

Anche nell'ambito della teoria classica, non tutti i metodi verranno trattati con il medesimo dettaglio. L'attenzione sarà concentrata soprattutto sui metodi nel dominio della frequenza. Per altri, ci si limiterà ad un'esposizione sommaria.

2. Controllo nell'intorno di una condizione di equilibrio e impostazione classica del problema di controllo

E' del tutto intuitivo che l'interesse per i sistemi di controllo lineari e tempo-invarianti sia connesso all'idea di progettare un controllore lineare per un sistema sotto controllo il cui comportamento possa essere descritto con sufficiente approssimazione da un sistema dinamico, lineare e tempo-invariante. D'altra parte, sappiamo che, in prossimità di una condizione di equilibrio, il comportamento di qualunque sistema tempo-invariante sufficientemente regolare è descritto con buona approssimazione dal modello lineare tangente al sistema stesso nella condizione di equilibrio considerata. Infine, è un obiettivo tipico, soprattutto in ambito industriale, di molti sistemi di controllo far sì che lo stato del sistema sotto controllo non si allontani eccessivamente da un stato di equilibrio ben specificato, eventualmente dipendente dalle condizioni operative correnti.

Tutto ciò spiega come mai i sistemi di controllo lineari svolgano un ruolo centrale nella teoria del controllo, molto superiore alla frequenza con cui i fenomeni da controllare possono ritenersi spontaneamente descrivibili da modelli dinamici lineari e invarianti nel tempo. L'intera questione merita, quindi, un leggero approfondimento.

Con riferimento a un generico problema di controllo, ricordiamo che q e (spesso) c° sono le variabili del problema affette da incertezza (Fig.2.1).

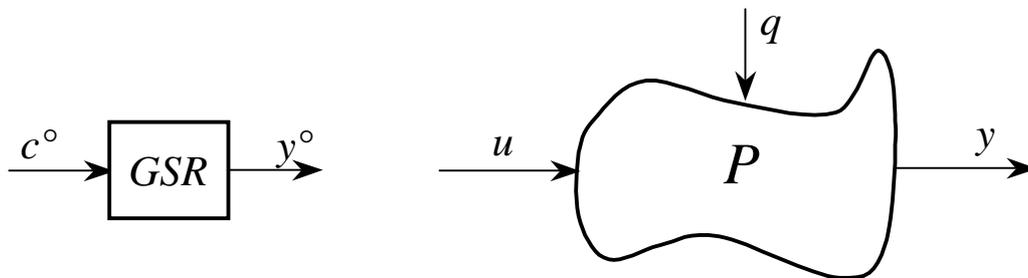


Fig. 2.1 : Problema di controllo (riferimento e sistema sotto controllo).

In ogni caso, dati \bar{c}° e \bar{q} costanti, sia \bar{y}° il valore di y° corrispondente a \bar{c}° e sia \bar{u} un valore costante di u tale che P ammetta, in risposta agli ingressi \bar{u} e \bar{q} , un'uscita di equilibrio $\bar{y} = \bar{y}^\circ$ corrispondente a $\bar{c} = \bar{c}^\circ$. Formalmente, se

$$P : \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), q(t)) \\ y(t) = g(x(t), q(t)) \end{cases}$$

allora \bar{x} e \bar{u} , entrambi funzioni di \bar{c}° e \bar{q} , sono soluzioni delle equazioni:

$$\begin{cases} f(x, u, \bar{q}) = 0 \\ g(x, \bar{q}) = \bar{y}^\circ \end{cases} .$$

Diremo che $(\bar{u}, \bar{q}, \bar{x}, \bar{y})$ è una condizione di equilibrio di P indotta da (\bar{c}°, \bar{q}) . Sia quindi:

$$\delta c^\circ(t) := c^\circ(t) - \bar{c}^\circ \quad , \quad \delta y^\circ(t) := y^\circ(t) - \bar{y}^\circ$$

$$\delta u(t) := u(t) - \bar{u} \quad , \quad \delta q(t) := q(t) - \bar{q} \quad , \quad \delta c(t) := c(t) - \bar{c},$$

$$\delta y(t) := y(t) - \bar{y} = y(t) - \bar{y}^\circ ;$$

(si noti che $\bar{y} = \bar{y}^\circ$) allora sappiamo che, in prossimità della condizione di equilibrio $(\bar{u}, \bar{q}, \bar{x}, \bar{y})$, il legame fra δu , δq , e δy è descritto con buona approssimazione da un modello $\delta P(\bar{c}^\circ, \bar{q})$ lineare e tempo-invariante, con ingressi δu , δq e uscita δy . Naturalmente, $\delta P(\bar{c}^\circ, \bar{q})$ è il modello lineare tangente a P nella condizione di equilibrio considerata (Fig.2.2).

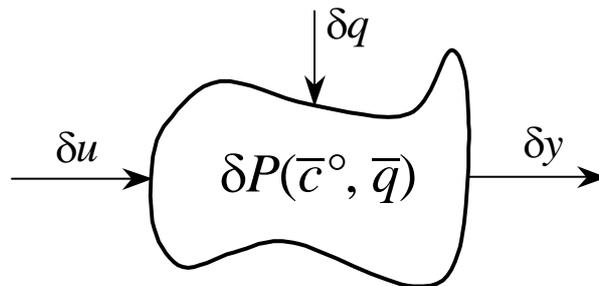


Fig. 2.2 : Sistema lineare tangente a P in una condizione di equilibrio indotta da \bar{c}° e \bar{q} .

Si possono ora indicare, sia pure per grandi linee, i tratti essenziali dell'*impostazione classica*. Poiché l'obiettivo primario del controllore consiste nel mantenere sufficientemente piccolo l'*errore effettivo*

$$\varepsilon(t) := c^\circ(t) - c(t)$$

qualunque sia (fra quelli ammissibili) l'andamento del riferimento e dei disturbi, è naturale che *l'azione di controllo sia fatta primariamente dipendere dall'andamento dell'errore* (Fig.2.3). Ma l'unico errore disponibile al controllore è quello, basato su una misura y di c , che abbiamo chiamato *errore apparente*

$$e(t) := y^\circ(t) - y(t) = \delta y^\circ(t) - \delta y(t)$$

(dal momento che $\bar{y} = \bar{y}^\circ$) e che è una rappresentazione tanto più fedele dell'errore effettivo quanto più piccola è l'incertezza connessa alla misura di c e alla trasmissione di tale misura al controllore.

Si noti come la struttura dei controllori standard, comunemente impiegati nelle applicazioni industriali correnti, sia coerente con l'impostazione classica.

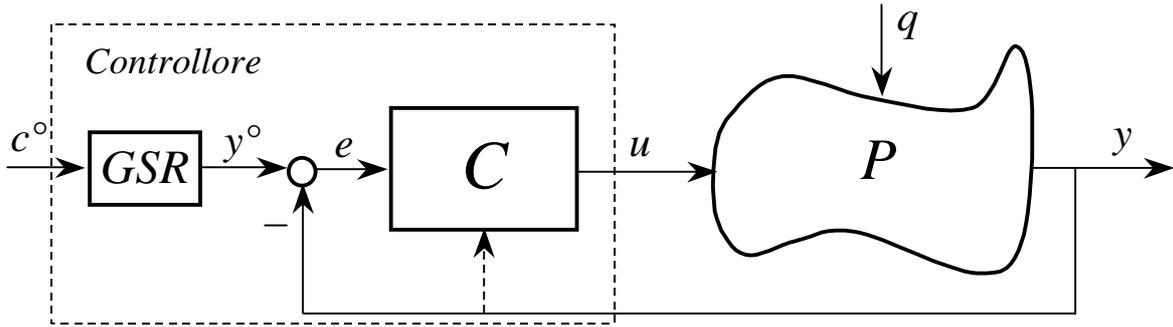


Fig. 2.3 : Sistema di controllo coerente con l'impostazione classica.

Se l'elemento C in Fig.2.3 è scelto nella classe dei sistemi lineari e tempo-invarianti, il controllore assumerà (nel caso più generale) la struttura mostrata in Fig.2.4.

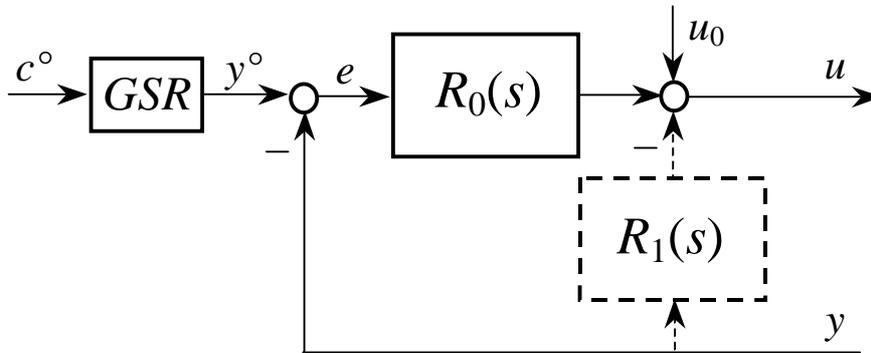


Fig. 2.4 : Controllore lineare coerente con l'impostazione classica.

In prossimità di una condizione di equilibrio di P indotta da \bar{c}^o e \bar{q} il comportamento del sistema di controllo di Fig.2.3 può ritenersi *descritto* con buona approssimazione dal sistema mostrato in Fig.2.5 e in Fig.2.6 (nel caso di controllore lineare).

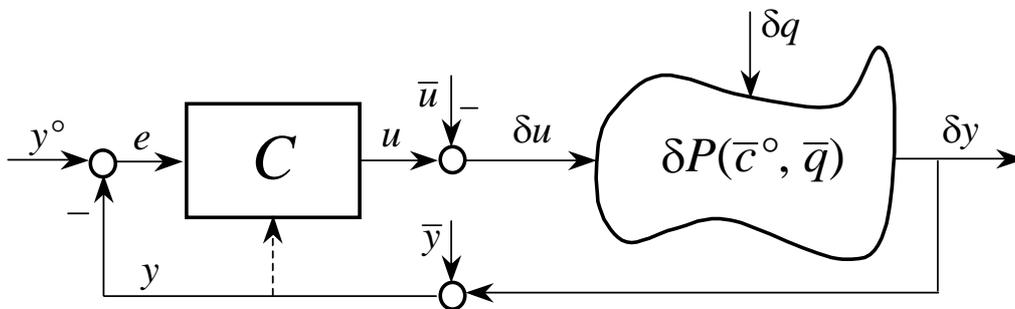


Fig. 2.5 : Descrizione del sistema di controllo in prossimità di una condizione di equilibrio.

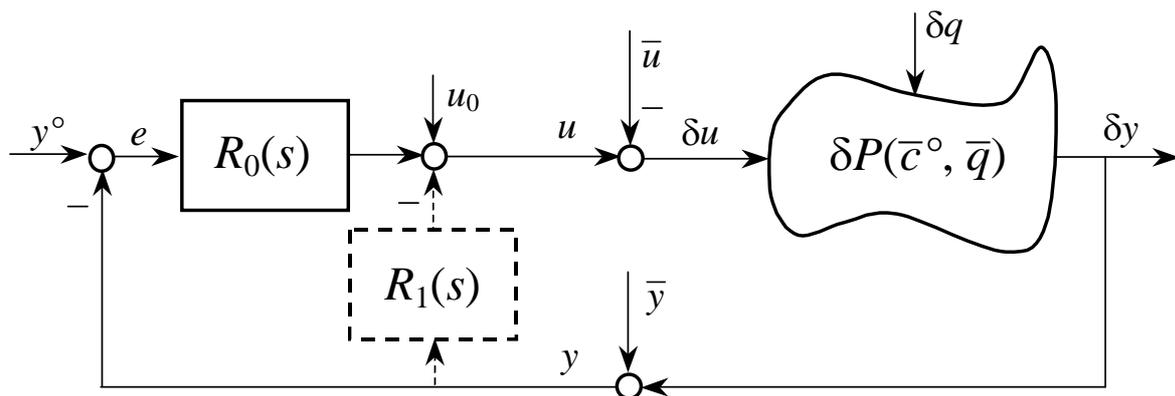


Fig. 2.6 : Descrizione del sistema di controllo in prossimità di una condizione di equilibrio, nel caso di controllore lineare.

Ora, per definizione, $\bar{y} = \bar{y}^\circ$ (e \bar{y}° dipende da \bar{c}°) mentre \bar{u} dipende dalla condizione di equilibrio in prossimità della quale si ritiene debba operare il sistema sotto controllo; \bar{u} dipende, quindi, da \bar{c}° e da \bar{q} . Ricordando che

$$y^\circ(t) - \bar{y}^\circ(t) := \delta y^\circ(t) ,$$

ponendo:

$$\delta u_0 := u_0 - \bar{u}$$

e facendo l'ipotesi che $R_1(s)$, se presente, contenga almeno un derivatore, vale a dire presenti almeno uno zero nell'origine (filtro "passa banda" o "passa alto"), si può concludere che, nel caso di controllore lineare, il comportamento del sistema di controllo complessivo possa essere *studiato* analizzando il sistema dinamico lineare e tempo-invariante descritto dallo schema a blocchi di Fig.2.7.

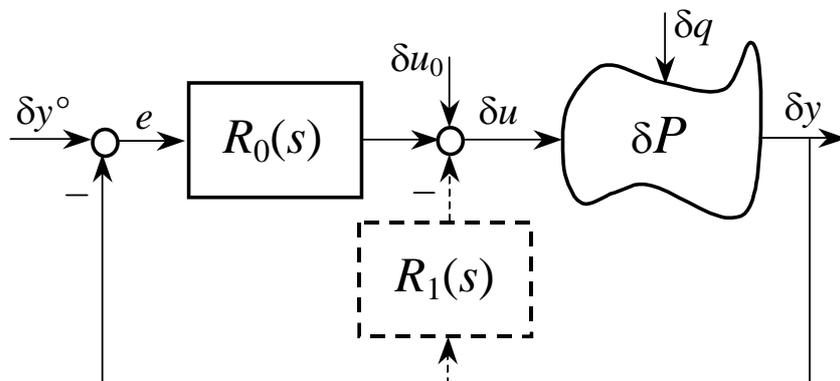


Fig. 2.7 : Sistema di controllo lineare tempo-invariante

Il sistema di Fig.2.7 sarà, infatti, l'oggetto della nostra attenzione per tutto il seguito di questo capitolo, anche se, per alleggerire la notazione, useremo quasi

sempre d'ora in poi (ovunque non vi sia rischio di confusione) i simboli y° , u e y al posto di δy° , δu e δy , rispettivamente.

E' da sottolineare che quest'ultimo schema a blocchi non descrive propriamente (o necessariamente) la *struttura fisica* del sistema di controllo reale oggetto di studio, bensì un modello matematico atto, nella maggior parte dei casi, a valutarne le prestazioni di carattere tecnico. In realtà, non va dimenticato che i segnali d'ingresso e d'uscita del sistema fisico impegnato nel ruolo di controllore non sono, in generale, δy , δy° e δu , ma, rispettivamente: y , c° e u (Fig.2.3). Infatti, \bar{q} (come \bar{c}°), e quindi anche la particolare condizione di equilibrio $(\bar{u}, \bar{q}, \bar{x}, \bar{y})$ indotta da (\bar{c}°, \bar{q}) , sono, nella maggior parte dei casi, da ritenersi ignote al controllore, il quale non è pertanto in grado di valutare δy o di porre $u_0 = \bar{u}$ in modo da annullare δu_0 . Sarà pertanto di particolare interesse comprendere sotto quali condizioni un controllore lineare sia in grado di rendere l'errore (effettivo) indipendente dal valore dell'ingresso costante δu_0 .

Il sistema di controllo di Fig.2.7 può essere effettivamente ritenuto una rappresentazione corretta del sistema reale (e quindi le conclusioni risultanti dalla sua analisi possono ritenersi affidabili) *solo se*, in tutte le condizioni di funzionamento possibili (per tutti i valori o gli andamenti ammissibili delle variabili indipendenti incerte: \bar{c}° , \bar{q} , $\delta c^\circ(\cdot)$ e $\delta q(\cdot)$), le variabili $\delta u(\cdot)$ e $\delta q(\cdot)$ risultino sufficientemente piccole perchè il legame fra loro e $\delta y(\cdot)$ possa essere descritto con buona approssimazione dal modello δP . Affinchè ciò accada, è naturalmente necessario che anche $\delta y^\circ(\cdot)$ sia abbastanza piccolo, ma non basta. Infatti, pur ammettendo che $\delta y^\circ(\cdot)$ e $\delta q(\cdot)$ siano relativamente piccoli, il fatto che $\delta u(\cdot)$ si mantenga sufficientemente piccolo dipende in modo essenziale da come è stato progettato il controllore; dipende, cioè, dalle funzioni di trasferimento $R_0(s)$ ed eventualmente $R_1(s)$. Oltre a quella di salvaguardare l'integrità fisica del sistema sotto controllo, c'è quindi una seconda e più elusiva, ma non meno importante, ragione per assicurarsi, durante l'intera fase di progetto del controllore, che l'intensità dell'azione di controllo si mantenga adeguatamente limitata anche nelle condizioni peggiori.

Concludiamo questo paragrafo mostrando come la presenza, in un controllore lineare, di un eventuale blocco "sull'uscita" ($R_1(s)$), in aggiunta al blocco "sull'errore" ($R_0(s)$), sia del tutto equivalente, da un punto di vista *concettuale*, alla presenza di un filtro posto sul segnale di riferimento.

Infatti è facile verificare che le funzioni di trasferimento fra gli ingressi (y° e y) e l'uscita u (o w) dei due schemi a blocchi di Fig.2.8 sono identiche pur di porre:

$$R(s) := R_0(s) + R_1(s) \quad , \quad \Phi(s) := \frac{R_0(s)}{R_0(s) + R_1(s)} ;$$

inoltre, poiché per ipotesi $R_1(s)$ ha almeno uno zero nell'origine, si ha: $R_1(0) = 0$, pertanto:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \Phi(s) = 1 .$$

Si ha, cioè, che $\Phi(s)$ è di tipo zero e ha guadagno unitario (filtro).

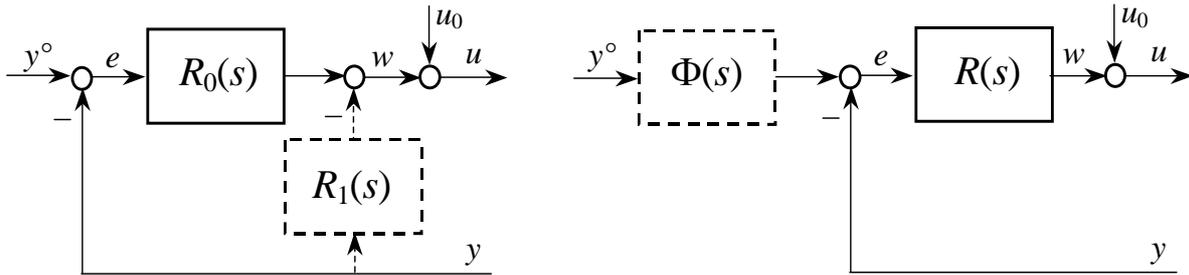


Fig. 2.8 : Schemi a blocchi equivalenti.

In pratica, la realizzazione *fisica* di $R_0(s)$ e $R_1(s)$ è meno critica, dal punto di vista delle conseguenze di piccole imprecisioni, di quanto non sia quella di $\Phi(s)$.

3. Sistemi di controllo lineari, tempo-invarianti, monovariabili

L'obiettivo che ci proponiamo è ora quello di valutare le prestazioni di un sistema descritto dallo schema a blocchi di Fig.3.1, che supponiamo completamente specificato (analisi).

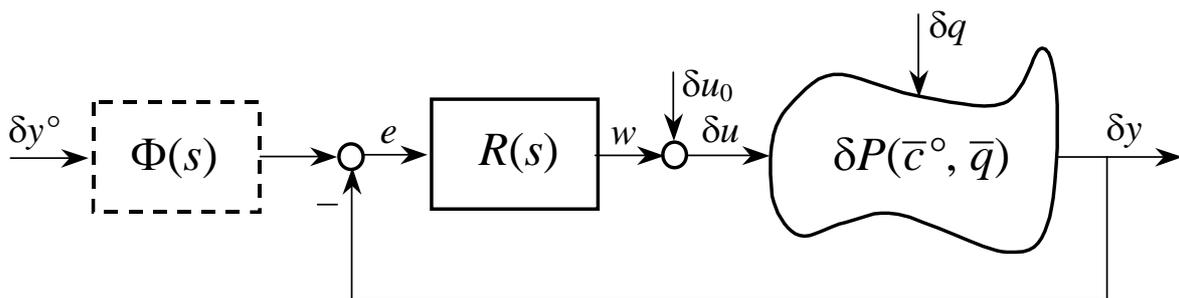


Fig. 3.1 : Sistema di controllo lineare.

In particolare, è conveniente supporre che il modello δP del sistema sotto controllo possa essere a sua volta descritto da un più articolato *schema a blocchi*, che magari ne rifletta in qualche misura la struttura fisica interna. A titolo di semplice illustrazione, fisseremo l'attenzione sulla situazione illustrata in Fig.3.2, dove G_a e H_a sono funzioni di trasferimento di quella parte di sistema sotto controllo che comprende l'attuatore e si trova, come suol dirsi, sulla "linea

d'andata” (dalla variabile di controllo alla variabile controllata), mentre G_r e H_r sono funzioni di trasferimento che descrivono la cosiddetta “*linea di retroazione*” (dalla variabile controllata a quella che ne esprime una misura trasmessa al controllore). La “*linea di retroazione*” è dunque costituita dal

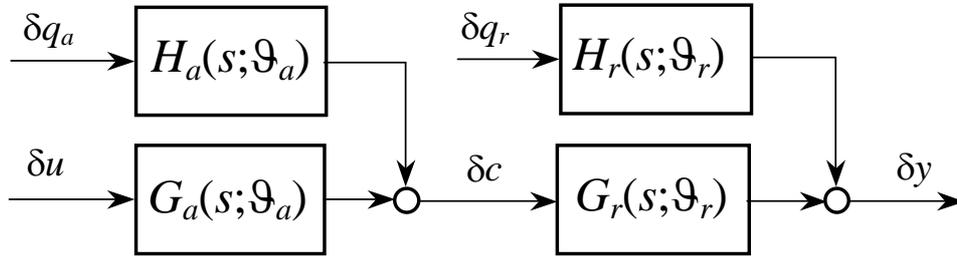


Fig. 3.2 : Struttura tipica del sistema sotto controllo (strumentazione compresa).

trasduttore e dal canale di trasmissione che connette quest'ultimo al controllore. Naturalmente, faremo l'ipotesi che lo schema a blocchi in questione costituisca una descrizione corretta del sistema sotto controllo, anche dal punto di vista dell'analisi di stabilità. Se $H_a=G_a$, ovvero se δq_a si somma a δu , δq_a è detto *disturbo di carico*.

In un particolare sistema possono ovviamente esserci diversi disturbi ad agire sulla linea d'andata; e diversi altri sulla linea di retroazione. Nel seguito, ci limiteremo tuttavia a considerare il caso di un solo disturbo scalare δq_a e di un solo disturbo scalare δq_r (Fig.3.2), in quanto sufficientemente rappresentativo del caso più generale.

Le funzioni di trasferimento G_a , H_a , G_r e H_r dipendono, in linea di principio, dalla condizione di equilibrio di P indotta dalle costanti (incerte) \bar{c}° e \bar{q} . I parametri (vettoriali) ϑ_a e ϑ_r (comprendenti, ad esempio, guadagni e costanti di tempo) servono a descrivere l'incertezza che connota le suddette funzioni di trasferimento; incertezza che, quanto meno, rappresenta dunque il riflesso sulle funzioni di trasferimento dell'incertezza relativa al punto centrale della regione di funzionamento corrente. Tipicamente, si avrà:

$$\begin{aligned} \vartheta_a &= \vartheta_{an} + \delta\vartheta_a & , & \quad \delta\vartheta_a \in \Delta\Theta_a \\ \vartheta_r &= \vartheta_{rn} + \delta\vartheta_r & , & \quad \delta\vartheta_r \in \Delta\Theta_r \end{aligned}$$

dove ϑ_{an} e ϑ_{rn} sono i valori nominali dei parametri; in molti casi si può ritenere:

$$\delta\vartheta_{am} \leq \delta\vartheta_a \leq \delta\vartheta_{aM} \quad , \quad \delta\vartheta_{rm} \leq \delta\vartheta_r \leq \delta\vartheta_{rM}$$

con $\delta\vartheta_{am}$, $\delta\vartheta_{aM}$, $\delta\vartheta_{rm}$ e $\delta\vartheta_{rM}$ noti (si può ritenere, cioè, che $\Delta\Theta_a$ e $\Delta\Theta_r$ siano degli iper-parallelepipedi). Useremo inoltre la seguente notazione:

$$G_a(s; \vartheta_{an}) := G_a(s) \quad , \quad G_r(s; \vartheta_{rn}) := G_r(s) .$$

In definitiva, usando per semplicità (come già anticipato) i simboli y° , u , c e y al posto di δy° , δu , δc e δy , siamo interessati a valutare le prestazioni di un sistema di controllo descritto dallo schema a blocchi di Fig.3.3. I segnali $\delta q_a(\cdot)$, $\delta q_r(\cdot)$ e la costante δu_0 , che influenzano linearmente il sistema (sovrapposizione degli effetti) sono detti *disturbi additivi*, mentre $\delta \vartheta_a$ e $\delta \vartheta_r$ sono detti *disturbi parametrici*.

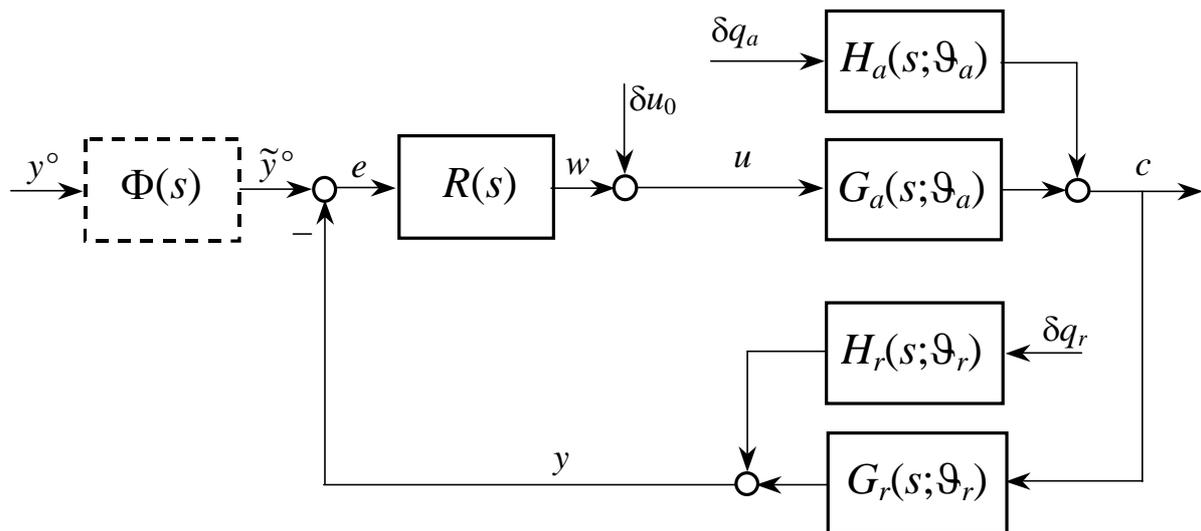


Fig. 3.3 : Sistema di controllo particolare, ma emblematico.

Precisamente, supponendo note tutte le funzioni di trasferimento e gli insiemi dei valori o degli andamenti ammissibili di tutte le variabili incerte (riferimento e disturbi), siamo interessati a trovare metodi efficaci e “trasparenti” per valutare la *stabilità asintotica* e la *precisione, dinamica e statica*, (robuste rispetto ai disturbi parametrici) del sistema di controllo in esame.

4. Stabilità

Ricordiamo innanzitutto che un sistema (lineare tempo-invariante) costituito da due elementi *in cascata* è asintoticamente stabile se e solo se sono asintoticamente stabili i sottosistemi che lo compongono.

Nello schema a blocchi di Fig.3.3, i blocchi descritti dalle funzioni di trasferimento H_a , H_r e Φ sono, ognuno, in cascata a tutto il resto. Quindi il sistema descritto dallo schema a blocchi è asintoticamente stabile *solo se* i poli di H_a , H_r e Φ hanno parte reale negativa. In caso contrario, l’analisi potrebbe dunque fermarsi qui, con la conclusione che il sistema di Fig.3.3 non è asintoticamente stabile.

Se, invece, i poli di H_a , H_r e Φ hanno parte reale negativa, resta da valutare la stabilità del sistema di Fig.4.1.

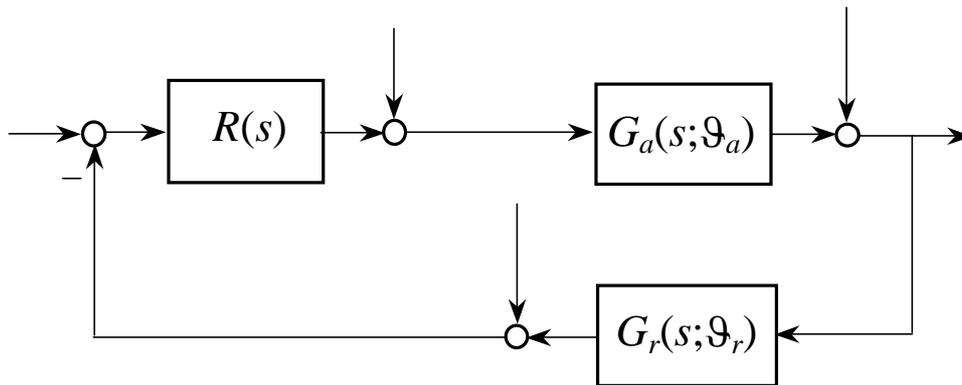


Fig. 4.1 : Sottosistema comprendente l'anello di retroazione.

Ora ricordiamo che la stabilità (alla Liapunov) di un sistema dinamico lineare non dipende né dall'azione degli ingressi né da quali variabili siano state scelte come variabili d'uscita. Eliminiamo quindi, per comodità, tutti gli ingressi associati a frecce verticali e consideriamo come variabile d'uscita quella che torna al nodo sommatore "d'ingresso" (Fig.4.2).

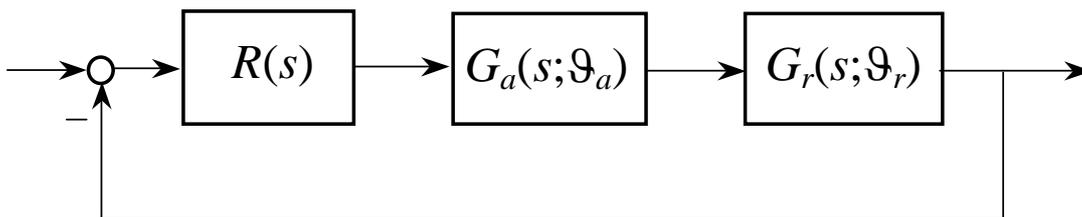


Fig. 4.2 : Sottosistema reazionato, in forma semplificata.

Se, per nessun valore ammissibile dei parametri ϑ_a e ϑ_r , tra le funzioni di trasferimento R , G_a e G_r si verifica una cancellazione illegittima, cioè se nessuno degli zeri di una di queste funzioni cancella un polo di altra con parte reale maggiore o uguale a zero, allora i tre blocchi in cascata sono equivalenti ad un unico blocco la cui funzione di trasferimento

$$L(s; \vartheta) := R(s) G_a(s; \vartheta_a) G_r(s; \vartheta_r) \quad , \quad \vartheta := [\vartheta_a' \ \vartheta_r']'$$

è detta *funzione di trasferimento d'anello*. Altrimenti, indicando con Θ l'insieme dei valori ammissibili di ϑ , si può concludere che il sistema non è robustamente stabilizzabile relativamente a $\vartheta \in \Theta$, e l'analisi può arrestarsi qui.

Se non ci sono cancellazioni illegittime, lo schema a blocchi di Fig.4.2 può ridursi ad un unico blocco (Fig.4.3) e si può valutare la stabilità del semplice sistema reazionato risultante esaminando i poli della funzione di trasferimento:

$$F(s; \mathfrak{G}) := \frac{L(s; \mathfrak{G})}{1 + L(s; \mathfrak{G})} .$$

Se indichiamo con $a(s; \mathfrak{G})$ e $b(s; \mathfrak{G})$, rispettivamente, il denominatore e il numeratore di $L(s; \mathfrak{G})$, allora:

$$L(s; \mathfrak{G}) = \frac{b(s; \mathfrak{G})}{a(s; \mathfrak{G})} , \quad F(s; \mathfrak{G}) = \frac{b(s; \mathfrak{G})}{a(s; \mathfrak{G}) + b(s; \mathfrak{G})} .$$

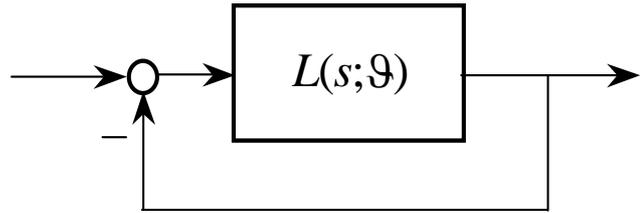


Fig. 4.3 : Sistema reazionato elementare S .

e naturalmente il sistema S di Fig.4.3 è asintoticamente stabile in modo robusto (relativamente a \mathfrak{G}) in Θ , se e solo se le radici del polinomio

$$p(s; \mathfrak{G}) := a(s; \mathfrak{G}) + b(s; \mathfrak{G})$$

hanno parte reale negativa per ogni $\mathfrak{G} \in \Theta$.

Come abbiamo già visto, è possibile, mediante il Criterio di Routh, determinare due insiemi di disequazioni che implicitamente definiscono, nello spazio dei parametri, la *regione di asintotica stabilità* Θ_{as} , vale a dire l'insieme dei valori di \mathfrak{G} in corrispondenza dei quali S è asintoticamente stabile. Allora, in linea di principio, S è asintoticamente robustamente stabile in Θ se e solo se risulta: $\Theta \subseteq \Theta_{as}$. Va tuttavia tenuto presente che, quando la dimensione di \mathfrak{G} (il numero dei parametri scalari di S) è maggiore di due, verificare se la suddetta condizione sia soddisfatta o meno è, in generale, tutt'altro che semplice.

Inoltre, quando l'analisi di stabilità dà esito negativo, il criterio di Routh non fornisce alcuna indicazione su quali modifiche (di $R(s)$) potrebbero risultare efficaci per recuperare gradualmente l'asintotica stabilità (robusta) del sistema.

Analisi nel dominio della frequenza: il criterio di Nyquist

Esaminiamo innanzitutto il caso $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_n$ (assenza di disturbi parametrici), poniamo $L(s) := L(s; \mathfrak{G}_n)$, facciamo l'ipotesi che $L(s)$ sia strettamente propria, e diamo alcune definizioni preliminari relative al sistema reazionato S di Fig.4.3.

Chiamiamo *risposta in frequenza d'anello* la risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento d'anello di S ; l'immagine, quindi, attraverso $L(\cdot)$, del semiasse immaginario positivo. Se $L(s)$ ha poli sull'asse immaginario, chiamiamo risposta in frequenza d'anello *generalizzata* l'immagine attraverso

$L(\cdot)$ di un percorso (si veda un esempio in Fig.4.4) costituito da quasi tutto il semiasse immaginario positivo più alcuni archi di circonferenza di raggio infinitesimo intesi ad aggirare gli eventuali poli di L aventi parte reale nulla.

Chiamiamo quindi *diagramma di Nyquist* di L (o relativo a L) la linea chiusa orientata che si ottiene aggiungendo al diagramma polare (orientato) della risposta in frequenza d'anello il suo simmetrico rispetto all'asse reale (orientato in senso inverso).

Indichiamo infine con P il numero di poli di L aventi parte reale positiva e con N il numero di giri, positivo se i giri sono in senso antiorario e negativo in caso contrario, che il diagramma di Nyquist di L compie attorno al punto -1 . Se il diagramma di Nyquist passa per il punto -1 , il numero N non è definito.

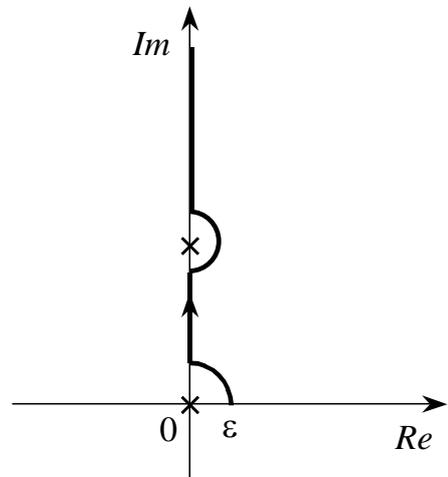


Fig. 4.4 : Percorso con deviazioni.

Criterio di Nyquist

Il sistema S è asintoticamente stabile se e solo se risulta: $N = P$. Se $N \neq P$, S è instabile. Se N è indefinito, S può essere stabile (ma non asintoticamente).

Esempio 4.1

$$L(s) = \frac{10}{(1+s)(1+0.5s)(1+0.08s)}, \quad P = 0$$

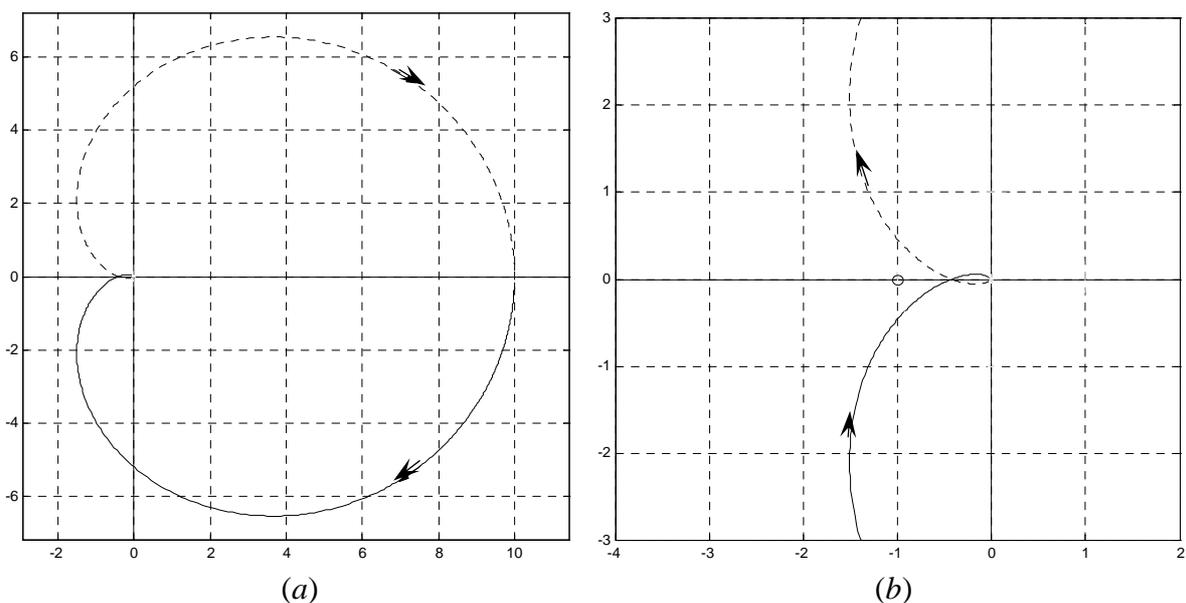


Fig. 4.5 : Diagramma di Nyquist di L ; (a) intero, (b) particolare.

Il diagramma di Nyquist di L è mostrato in Fig.4.5. L'ingrandimento riportato in Fig.4.5-*b* consente di rilevare come il numero di giri che il diagramma compie attorno al punto -1 (indicato in figura con un cercholino) sia uguale a zero. Poiché

$$N = P = 0$$

il sistema S ad anello chiuso è asintoticamente stabile. Se però il guadagno di L fosse stato pari a 50, anziché a 10, la forma del diagramma sarebbe rimasta invariata (tutti i suoi punti sarebbero semplicemente stati 5 volte più lontani dall'origine). Il precedente ingrandimento si sarebbe pertanto modificato come mostrato in Fig.4.6.

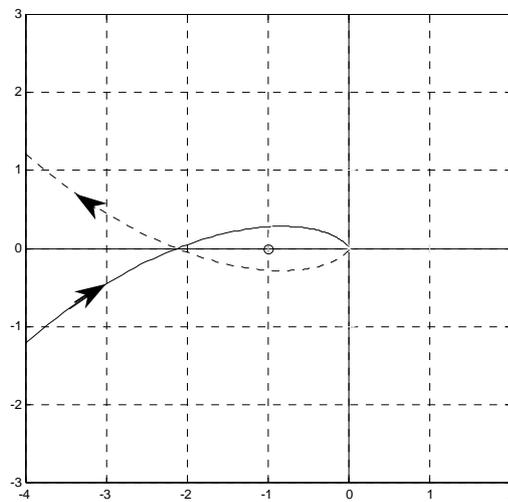


Fig. 4.6 : Diagramma di Nyquist di L (particolare) quando $\mu=50$.

mettendo in evidenza come, in questo caso, sia $N = -2$ (due giri in senso orario). Poiché P è invariato, si deve concludere che, in questo caso, S è instabile.

Esempio 4.2.

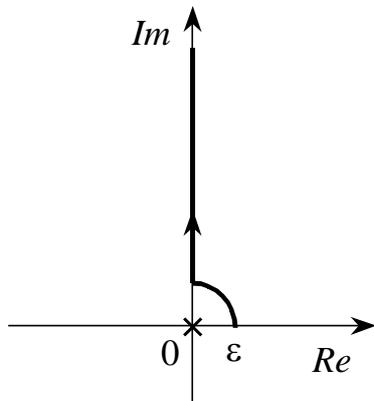
$$L(s) = \frac{0.5}{s} := \frac{b(s)}{a(s)} \quad , \quad P = 0 \quad .$$

In questo caso (come sempre, quando il grado del denominatore di L è minore o uguale a 2) il criterio di Nyquist è “sprecato”, infatti:

$$F(s) = \frac{b(s)}{a(s) + b(s)} = \frac{0.5}{s + 0.5}$$

e quindi è immediato concludere che il sistema S di Fig.4.3 è asintoticamente stabile. Tuttavia, applicare anche qui il Criterio di Nyquist può essere istruttivo.

Poiché la funzione di trasferimento d'anello ha un polo sull'asse immaginario, dobbiamo costruire il diagramma di Nyquist di L sulla base della risposta in frequenza d'anello generalizzata. Ciò richiede di determinare l'immagine attraverso L del percorso mostrato in Fig.4.7:



a) arco di circonferenza

$$s = \varepsilon e^{j\varphi} \quad , \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/2$$

$$L(\varepsilon e^{j\varphi}) = 0.5 \varepsilon e^{-j\varphi}$$

b) semiasse immaginario positivo

$$s = j\omega \quad , \quad \varepsilon \leq \omega < \infty$$

$$L(j\omega) = -j 0.5/\omega$$

Fig. 4.7 : Percorso con deviazione.

Il diagramma polare della risposta in frequenza d'anello generalizzata associata alla funzione di trasferimento $L(s)$ è mostrato in Fig.4.8 (linea spessa, a tratti o continua). Il diagramma di Nyquist si ottiene aggiungendo il simmetrico rispetto all'asse reale, con senso di percorrenza invertito (Fig.4.8, linee sottili). Poiché N è uguale a zero (come P), si deve concludere che, ad anello chiuso, il sistema reazionato S di Fig.4.3 è asintoticamente stabile.

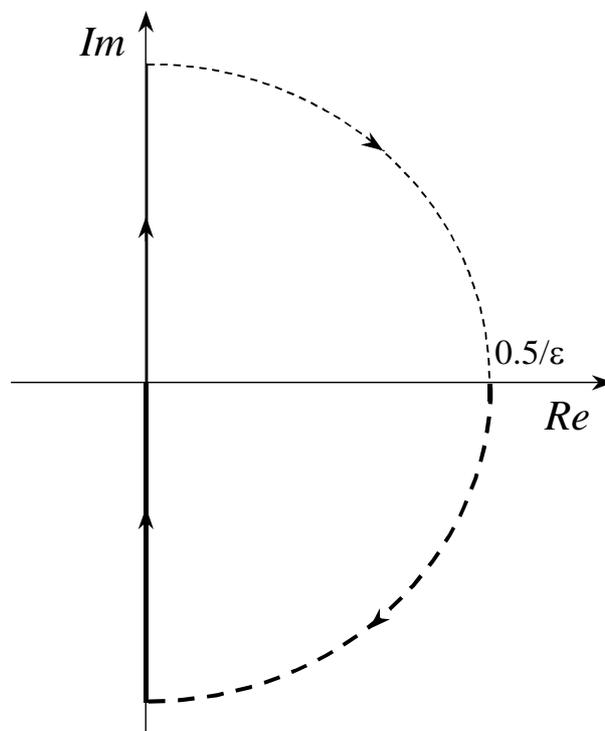


Fig. 4.8 : Diagramma di Nyquist di L .

Generalizzando leggermente le argomentazioni qui sviluppate per ricavare, con particolare riferimento alle microdeviazioni circolari dall'asse immaginario, il diagramma polare della risposta in frequenza d'anello generalizzata, non è difficile pervenire alla seguente conclusione a carattere operativo.

Regola. L'immagine attraverso L di un arco di raggio infinitesimo e di ampiezza α , percorso in senso antiorario, attorno a un polo di L avente molteplicità m è un arco di circonferenza di raggio tendenzialmente infinito, percorso in senso orario, e di ampiezza $m\alpha$.

Esempio 4.3.

$$L(s) = \frac{\mu}{(1 - 10s)(1 + s)^2}, \quad P = 1$$

I diagrammi di Nyquist di L sono mostrati in Fig.4.9.

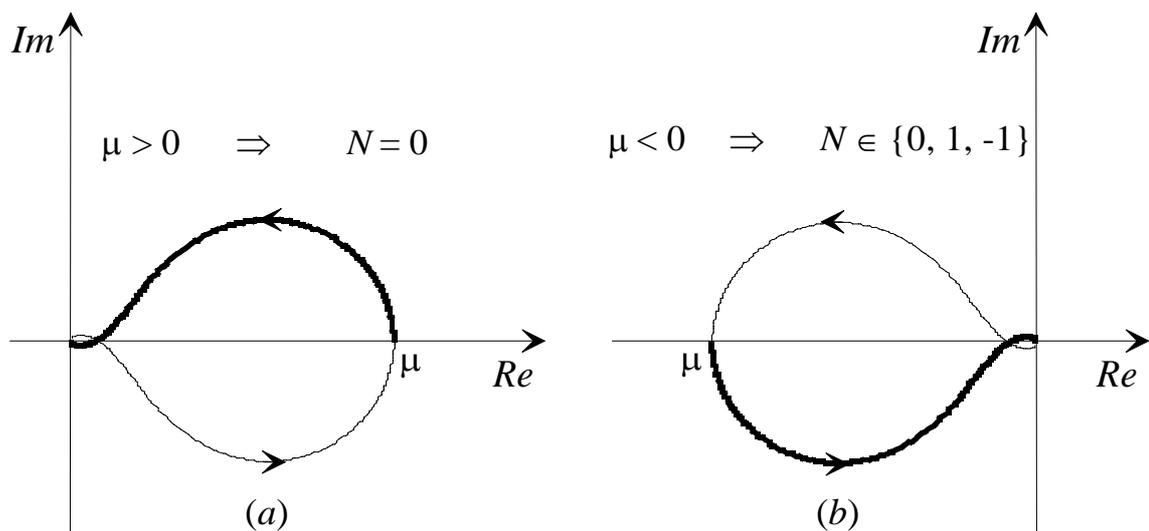


Fig. 4.9 : Diagrammi di Nyquist; nel caso $\mu > 0$ (a); e $\mu < 0$ (b).

Si riconosce facilmente che, a seconda del valore di μ , N può essere uguale a 0, 1, -1 o anche essere indefinita.

Commenti al criterio di Nyquist

1. Segnale in retroazione a sommare (Fig.4.10-a)

Si preferisce qui evitare la dizione “retroazione positiva”, alla quale potrebbe essere associato, in omaggio alla tradizione, un significato diverso.

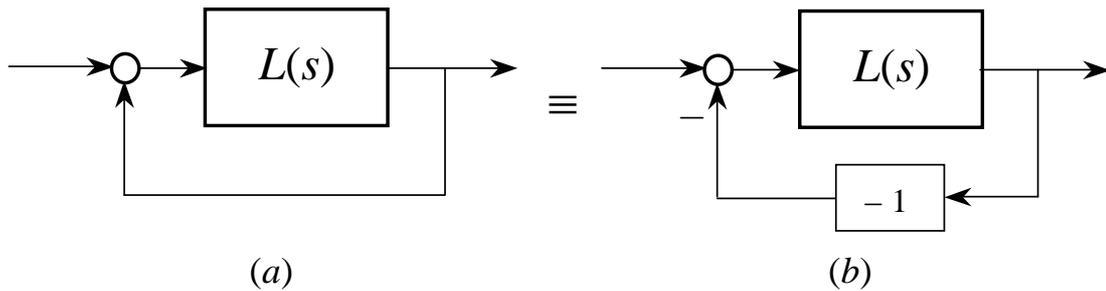


Fig. 4.10 : (a) Retroazione a sommare. (b) Schema a blocchi equivalente.

Una breve riflessione consente di riconoscere come il numero di giri che il diagramma di Nyquist di $-L$ compie attorno al punto -1 coincida, in valore e segno, con il numero di giri che il diagramma di Nyquist di L compie attorno al punto 1 .

Il criterio di Nyquist resta dunque invariato, pur di ridefinire N come il numero di giri in senso antiorario che il diagramma di Nyquist di L compie attorno al punto 1 (anziché -1).

2. Stabilità robusta

La natura stessa del criterio di Nyquist consente di affermare che la stabilità asintotica del sistema ad anello chiuso è robusta rispetto a tutte le perturbazioni dei parametri di L (disturbi parametrici) che non alterino né P né N . Si noti che: $(|\delta L(j\omega)| \leq |1 + L(j\omega)|, \forall \omega \geq 0) \Rightarrow N$ invariato (Fig.4.11).

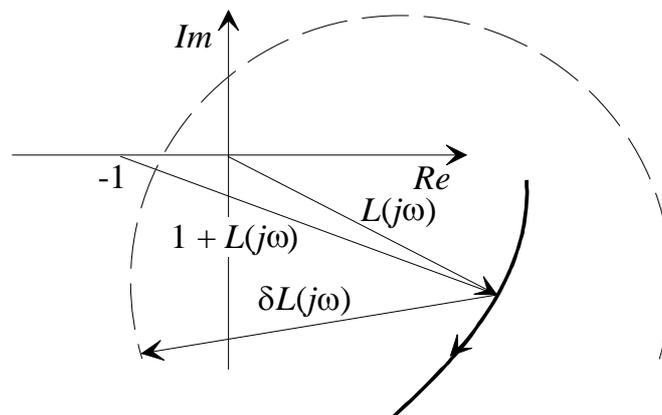


Fig. 4.11 : Robustezza di N rispetto a $\delta L(\cdot)$.

Nel *caso particolare* in cui il parametro incerto sia il *guadagno* di L , si può dire qualcosa di più. Si consideri, infatti, il sistema S di Fig.4.12. In questo caso, $L(s) = k G(s)$. Per un elementare fattore di scala, il numero di giri N che il diagramma di Nyquist di L compie attorno al punto -1 è identico al

numero di giri che il diagramma di Nyquist di G compie attorno al punto $-1/k$.

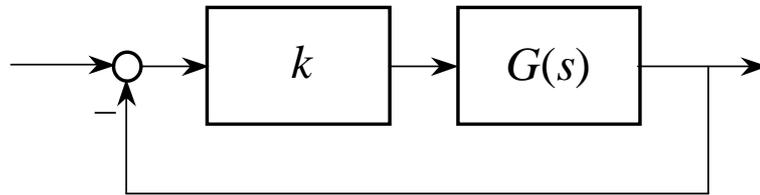


Fig. 4.12 : Sistema reazionato incerto ($k \in [a, b]$)

Per altro, il numero P di poli di L con parte reale positiva coincide con il numero di poli di G con parte reale positiva. Se ne deduce un semplice

Corollario del criterio di Nyquist

Condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema S di Fig. 4.12 sia asintoticamente stabile in modo robusto, relativamente a k nell'intervallo $[a, b]$, è che il numero di giri compiuti dal diagramma di Nyquist di G attorno al segmento $[-1/a, -1/b]$ sia uguale al numero di poli di G nel semipiano destro aperto.

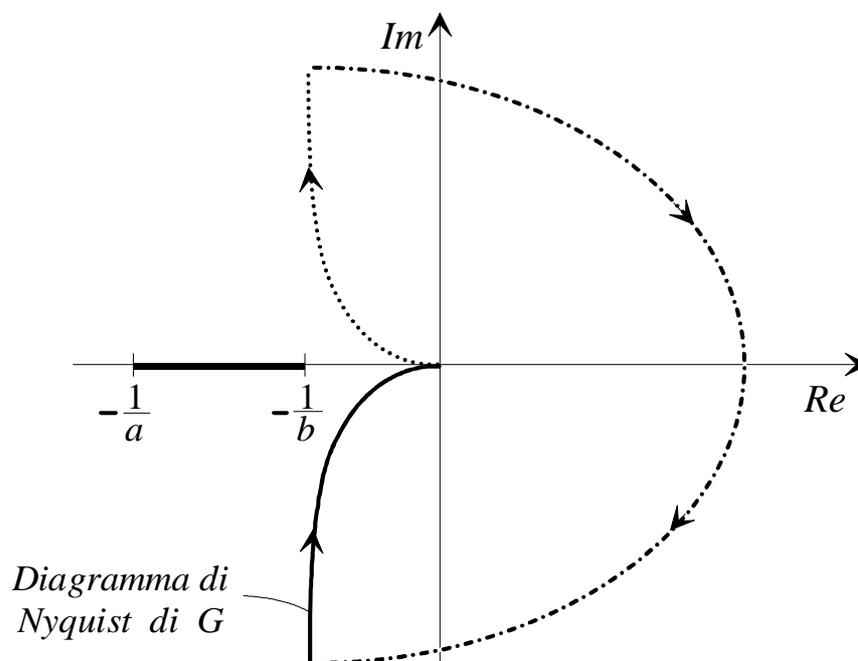


Fig. 4.13 : Criterio di Nyquist esteso (per il sistema incerto di Fig.4.12).

Un caso particolare molto importante: criterio di Bode

Ipotesi (in aggiunta a quelle sotto le quali vale il criterio di Nyquist)

Ipotesi basilare: $P = 0$

Una funzione di trasferimento che, oltre a non avere poli con parte reale positiva ($P = 0$), non contenga *ritardi* e non abbia *zeri* con parte reale positiva (non abbia al numeratore costanti di tempo o fattori di smorzamento negativi) si dice *a sfasamento minimo*.

Ipotesi accessoria: Il diagramma polare della risposta in frequenza d'anello (generalizzata) taglia una sola volta la *circonferenza unitaria* (la circonferenza di raggio 1 e centro l'origine). Si noti che questa ipotesi implica che, in $L(s)$, sia: $g \geq 0$.

Definizioni

- Si chiama **pulsazione critica**, e si indica con ω_c , il valore di ω in corrispondenza del quale il diagramma polare della risposta in frequenza d'anello (generalizzata) taglia la circonferenza unitaria. In altre parole, ω_c è la soluzione dell'equazione

$$|L(j\omega)| = 1 .$$

- Si chiama **sfasamento critico**, o **fase critica**, e si indica con φ_c , l'argomento della risposta in frequenza d'anello (generalizzata) nel punto in cui il diagramma polare taglia la circonferenza unitaria. Cioè:

$$\varphi_c := \angle^\circ L(j\omega_c)$$

dove il simbolo \angle° , applicato a un numero complesso s , denota l'argomento di s espresso in gradi e calcolato in modo convenzionalmente univoco.

- Si chiama **marginale di fase**, e si indica con φ_m , l'angolo minimo di cui occorre ruotare l'asse reale per far sì che il punto -1 venga a trovarsi sul diagramma polare della risposta in frequenza d'anello (generalizzata); in altri termini:

$$\varphi_m := 180^\circ - |\varphi_c| .$$

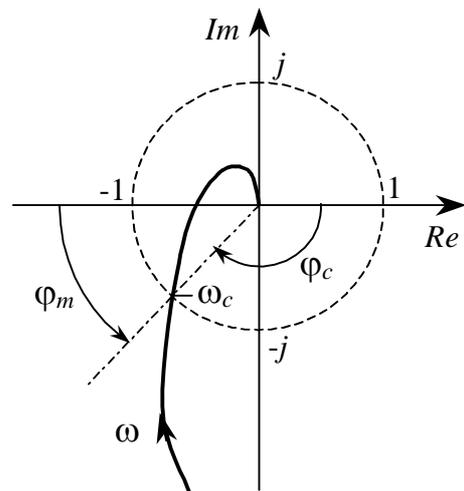


Fig. 4.14 : I parametri ω_c , φ_c , φ_m .

Osservazione

Sotto le ipotesi di Bode, quella basilare ($P = 0$) e quella accessoria (un solo attraversamento della circonferenza unitaria), l'asintotica stabilità del sistema reazionato di Fig.4.3 esclude che il guadagno di $L(s)$ possa essere negativo; $\mu > 0$ è quindi una **condizione necessaria** per l'asintotica stabilità del sistema ad anello chiuso.

Infatti, se $g = 0$ (sist. reazionato di tipo zero), l'ipotesi accessoria implica $|\mu| \geq 1$ (altrimenti il numero degli attraversamenti della circonferenza unitaria sarebbe necessariamente pari). Il caso $\mu = -1$ è escluso, perchè il diagramma di Nyquist passando per -1 renderebbe N indefinito. Se $\mu < -1$, il diagramma polare della risposta in frequenza d'anello, dovendo andare da μ all'origine, non può che portare a un $N \neq 0$. Se $g > 0$, quest'ultimo argomento vale qualunque sia $\mu < 0$.

Criterio di Bode

Se, oltre alle ipotesi di Bode, è verificata la condizione necessaria ($\mu > 0$), allora il sistema S è asintoticamente stabile se e solo se $\varphi_m > 0$.

Calcolo di φ_m sul diagramma di Bode del modulo di L

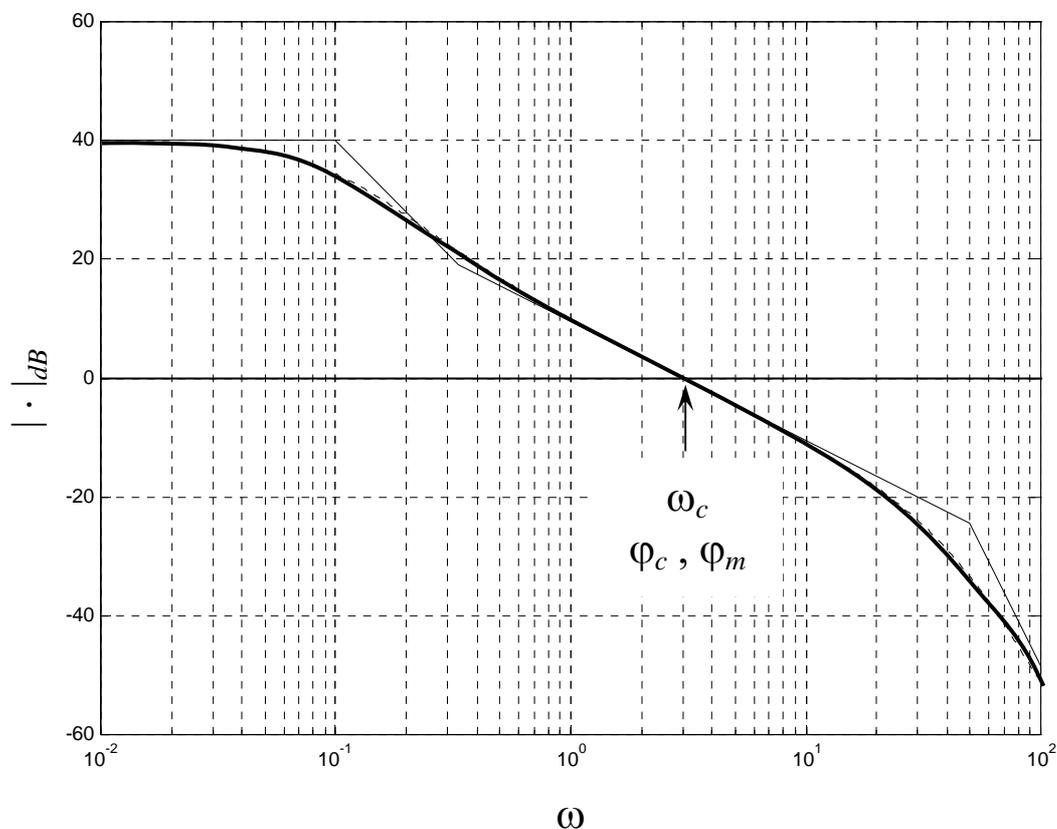


Fig. 4.15 : Calcolo di ω_c , φ_c e φ_m sul diagramma di Bode del modulo di L .

Margine di guadagno

Alla luce del criterio di Bode, l'ampiezza del margine di fase può essere interpretata come un indice di (robustezza della) stabilità (ad anello chiuso) del sistema S (riportato, per comodità, in Fig.4.16). In altre parole, è abbastanza naturale aspettarsi che, quanto più grande è il margine di fase, tanto maggiori sono le perturbazioni che $L(s)$ è in grado di sopportare senza compromettere la (asintotica) stabilità di S . Esistono tuttavia situazioni nelle quali quest'unico indice può apparire opinabile, come dimostra la Fig.4.17, dove appare irragionevole aspettarsi che la stabilità del sistema (2), connotato da un più grande margine di fase, sia meno fragile di quella del sistema (1).

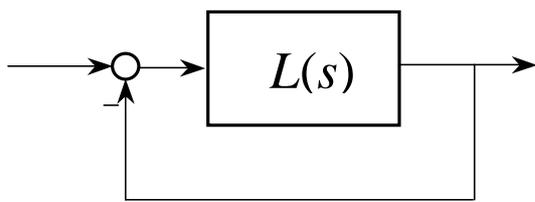


Fig. 4.16 : Il sistema S .

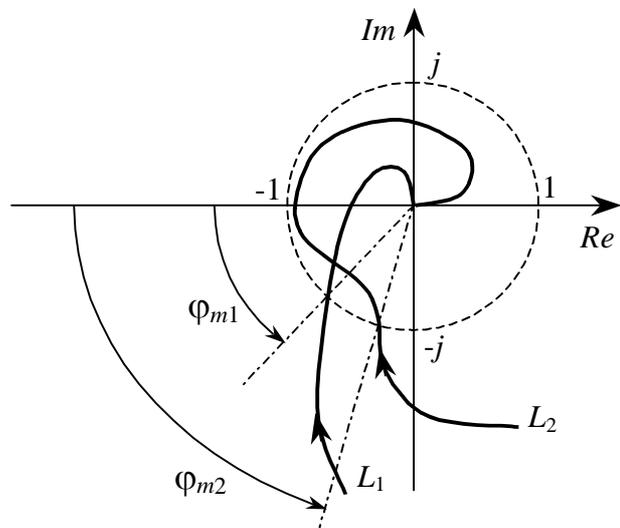


Fig. 4.17 : Margine di fase e stabilità robusta: un caso critico.

Per questo, può essere conveniente considerare, come secondo indice di robustezza della stabilità (o anche del grado di stabilità) del sistema ad anello chiuso, il fattore che occorre applicare al guadagno μ di L per far sì che il corrispondente diagramma di Nyquist passi per -1 . Con riferimento alla

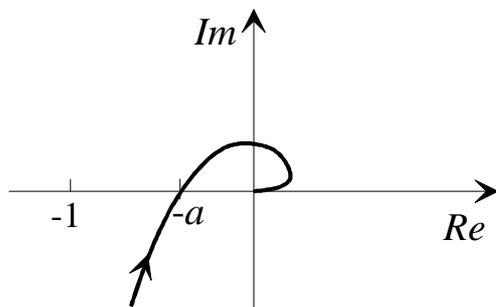


Fig. 4.18 : Il margine di guadagno $\mu_m := 1/a$.

Fig.4.18, questo fattore, detto **margine di guadagno**, è dato da $\mu_m := 1/a > 1$.

Si noti che $a \mu_m = 1$ implica

$$a|_{dB} + \mu_m|_{dB} = 0$$

quindi:

$$\boxed{\mu_m|_{dB} = -a|_{dB}}$$

Calcolo di μ_m sul diagramma di Bode del modulo di L

Indicando con ω_{-180° il valore di ω in corrispondenza del quale $\angle L(j\omega)$ è uguale a -180° , si ha:

$$a := |L(j\omega_{-180^\circ})| \quad , \quad \mu_m|_{dB} = -a|_{dB} \quad .$$

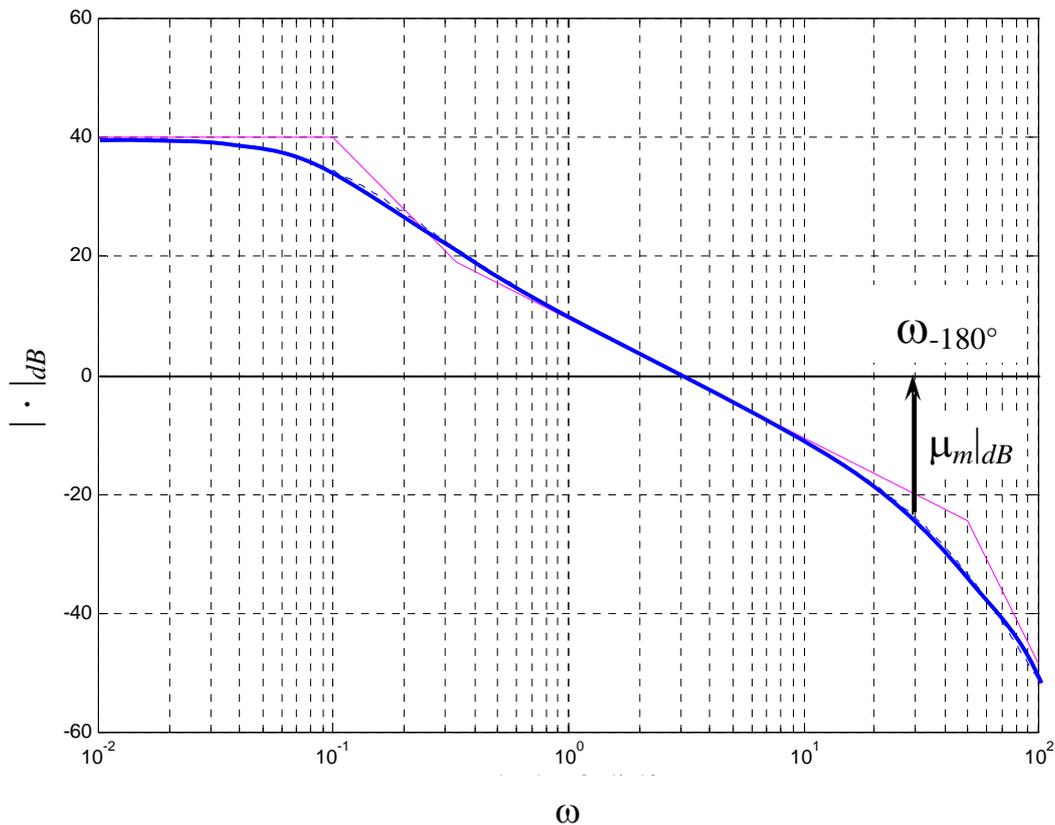


Fig. 4.19 : Calcolo di μ_m sul diagramma di Bode del modulo di L .

Naturalmente, a differenza di ω_c che può essere letto direttamente, la determinazione di ω_{-180° richiede, in generale, di procedere per tentativi.

5. Precisione: generalità

Un sistema di controllo come quello introdotto nel terzo paragrafo di questo capitolo e descritto dallo schema a blocchi di Fig.5.1 è sufficientemente *preciso* se è in grado di assicurare che l'errore effettivo, vale a dire: $\varepsilon(t) := c^\circ(t) - c(t)$, si mantenga sufficientemente piccolo in tutte le prevedibili condizioni di funzionamento; cioè, per tutti i valori o gli andamenti ammissibili delle variabili indipendenti incerte.

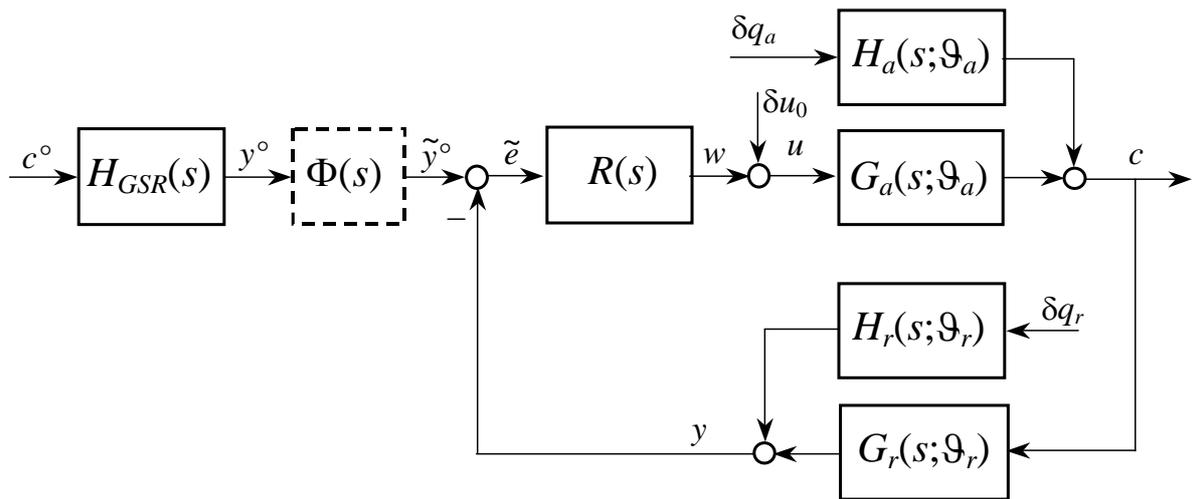


Fig. 5.1 : Sistema di controllo lineare, tempo-invariante, monovariabile.

Cominciamo con l'osservare che non ha alcun senso chiedersi se e quanto sia preciso un sistema di controllo che non sia asintoticamente stabile. D'ora in avanti, quindi, faremo tacitamente l'ipotesi che tutti i sistemi di controllo presi in considerazione siano *asintoticamente stabili*. Di conseguenza, alla luce ad esempio del metodo di Heaviside (Cap.3), le risposte prodotte da ingressi periodici, in particolare sinusoidali, o canonici (scalini, rampe, parabole) a partire da uno stato iniziale qualsiasi, tendono asintoticamente, per t che tende all'infinito, a corrispondenti uscite periodiche, o a combinazioni lineari di uscite canoniche. La durata pratica del transitorio iniziale è determinata dai poli dominanti della funzione di trasferimento dal particolare ingresso alla particolare uscita presi in considerazione.

E' già stato, per altro, sottolineato come sia tecnicamente utile e concettualmente significativo distinguere fra *precisione statica*, che riguarda il comportamento "a transitorio esaurito", e *precisione dinamica*, che riguarda invece il comportamento durante i transitori o, più in generale, in risposta ad ingressi ammissibili (riferimento o disturbi) comunque variabili nel tempo.

In entrambi i casi, considereremo innanzitutto il caso in cui gli eventuali parametri del sistema sotto controllo assumono il loro valore nominale e concentreremo l'attenzione sugli errori connessi a variazioni del *riferimento* (errori d'inseguimento) o prodotti da *disturbi additivi*. Nei confronti di queste "cause d'errore" vale infatti il *principio di sovrapposizione degli effetti*, che consente di organizzare lo studio esaminando separatamente, uno dopo l'altro, gli effetti prodotti da ognuna delle cause che possono provarli. L'errore complessivo dovuto alla compresenza di più cause sarà semplicemente la somma dei singoli contributi. Arrivati a questo punto, ci chiederemo quanto le conclusioni raggiunte siano *robuste* rispetto ai valori ammissibili di eventuali

parametri; rispetto, cioè, a possibili *disturbi parametrici* presenti nelle funzioni di trasferimento del sistema sotto controllo. Il disturbo additivo δu_0 , essendo per definizione costante, non produce transitori; anche se, per determinarne il contributo all'errore, può essere conveniente l'artificio di attribuirgli un andamento a scalino e calcolare l'effetto prodotto da tale scalino a transitorio esaurito (per t tendente all'infinito).

Nell'analizzare la precisione del sistema sotto l'azione di disturbi additivi (resistenza ai disturbi) sarà fondamentale distinguere fra disturbi agenti sulla linea d'andata (dalla variabile di controllo alla variabile controllata) e disturbi agenti sulla linea di retroazione (dalle variabili misurate sull'impianto e influenzate dal controllo, tipicamente la variabile controllata, al controllore).

6. Precisione dinamica

Il primo aspetto della precisione dinamica che ci accingiamo ad analizzare è detto *capacità d'inseguimento*; esso riguarda la capacità del sistema di controllo di mantenere sufficientemente piccolo l'errore (effettivo) sotto l'azione di un qualunque andamento ammissibile del riferimento c° ; in altre parole, la capacità di far sì che l'andamento della variabile controllata sia sufficientemente simile a quello desiderato, qualunque sia quest'ultimo nell'ambito dei suoi andamenti ammissibili. Solo successivamente analizzeremo il contributo all'errore dovuto ai disturbi additivi δq_a e δq_r , per il momento azzerati (Fig.5.1).

6.1 Capacità d'inseguimento

Coerentemente con il "programma" delineato nel paragrafo precedente, cominciamo a supporre $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_n$ e a prendere in esame il caso (Fig.6.1) in cui sia assente il filtro sul riferimento ($\Phi(s) = 1$, ovvero $R_1(s) = 0$). Supponiamo per il momento, come *temporanea* ipotesi di lavoro, che il legame fra c° e y° imposto dal generatore del segnale di riferimento sia descritto da una funzione di trasferimento $H_{GSR}(s)$ uguale a quella della linea di retroazione.

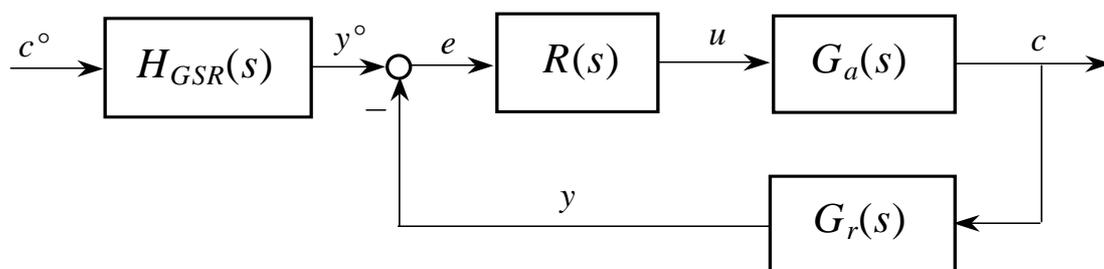


Fig. 6.1 : Schema a blocchi del sistema ridotto per l'analisi della capacità d'inseguimento.

In realtà, che il *guadagno* di $H_{GSR}(s)$ debba essere uguale a quello di $G_r(s)$ è ovviamente tassativo. Non altrettanto evidente è la necessità e neppure la convenienza di replicare in H_{GSR} le costanti di tempo di G_r (si noti che, in quanto portatore di una misura di c e non dell'integrale di c , o della derivata di c , $G_r(s)$ è sempre di tipo zero e asintoticamente stabile). Vedremo più avanti sotto quali condizioni è davvero conveniente che una costante di tempo di G_r venga effettivamente replicata in H_{GSR} .

Se $H_{GSR}(s) = G_r(s)$, il precedente schema a blocchi può essere equivalentemente modificato come mostrato in Fig.6.2:

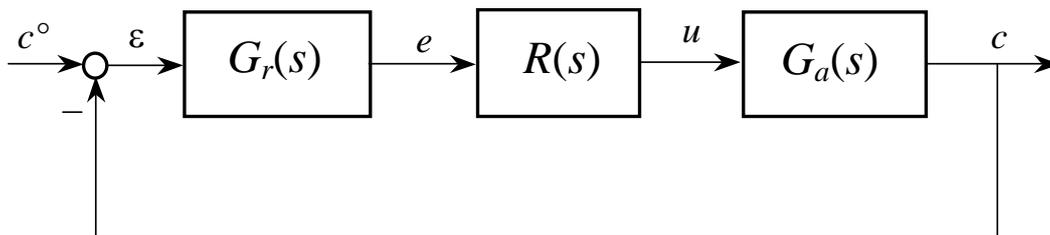


Fig. 6.2 : Schema a blocchi equivalente a quello di Fig.6.1.

Infine, poiché la tacita ipotesi di asintotica stabilità del sistema di Fig.6.2 esclude l'esistenza di cancellazioni illegittime fra G_r , R e G_a , lo schema può essere ulteriormente semplificato pervenendo al sistema reazionato elementare S di Fig.6.3, dove naturalmente si è posto: $L(s) := G_r(s) R(s) G_a(s)$.

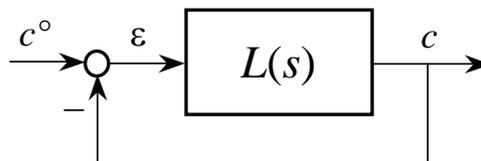


Fig. 6.3 : Schema a blocchi elementare equivalente a quello di Fig.6.1

Il connotato che gioca il ruolo più significativo nel caratterizzare la capacità (o l'incapacità) del sistema S di garantire un buon inseguimento di c^o da parte di c è la sua **banda passante**.

Indicando con

$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

la funzione di trasferimento di S , ricordiamo che la nozione di banda passante è legata alla scelta di un *valore nominale* F_n per il modulo della risposta in frequenza associata a $F(s)$ e al verificarsi di una *condizione preliminare*. Poiché S è un sistema di controllo con ingresso c^o (valore desiderato) e uscita c (valore

effettivo della variabile controllata), è ovvio che $F_n = 1$. Quindi, la condizione preliminare perché si possa correttamente attribuire ad S una banda passante è che risulti:

$$|F(j\omega)| \leq \sqrt{2} \quad , \quad \forall \omega \in [0, \infty)$$

ovvero

$$|F(j\omega)|_{dB} \leq 3 \quad , \quad \forall \omega \in [0, \infty) .$$

Se questa condizione è verificata, allora la banda passante di S è ben definita ed è data da:

$$\mathbf{B}_p := \{ \omega : |F(j\omega)| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \} = \{ \omega : |F(j\omega)|_{dB} \geq -3 \} .$$

Un'idea sommaria, ma efficace, sull'andamento del modulo della risposta in frequenza di S (Fig.6.3) e quindi sulla sua (eventuale) banda passante può essere ottenuta osservando che:

$$|F(j\omega)| := \frac{|L(j\omega)|}{|1 + L(j\omega)|} \cong \begin{cases} 1 & \text{se } |L(j\omega)| \gg 1 \\ |L(j\omega)| & \text{se } |L(j\omega)| \ll 1 \end{cases}$$

ovvero:

$$|F(j\omega)|_{dB} \cong \begin{cases} 0 & \text{se } |L(j\omega)|_{dB} \gg 0 \\ |L(j\omega)|_{dB} & \text{se } |L(j\omega)|_{dB} \ll 0 \end{cases}$$

e sostituendo quindi, un po' avventurosamente, con "maggiore" o "minore" le condizioni di "molto maggiore" o "molto minore".

La costruzione grafica che ne scaturisce è illustrata in Fig.6.4. Naturalmente, la regione nella quale questa costruzione è potenzialmente meno affidabile è quella indicata da una circonferenza in prossimità di ω_c , dove $|L(j\omega)|_{dB} \cong 0$.

Ignorando per il momento questa riserva, che verrà ripresa e ulteriormente commentata nel seguito, notiamo che, sotto l'ipotesi di un solo attraversamento dell'asse ω (Bode), il sistema di controllo si comporta approssimativamente come un filtro "passa basso" con banda passante circa uguale a $[0, \omega_c)$. Nella misura in cui le cose stiano effettivamente così, ci si può attendere che ogni segnale di riferimento a banda limitata con pulsazione massima minore di ω_c venga "fedelmente" replicato all'uscita del sistema di controllo S . Un segnale di riferimento a spettro diffuso sarà replicato in uscita tanto più fedelmente quanto più ampia è la banda passante di S . *L'ampiezza della banda passante coincide, in prima approssimazione, con la pulsazione critica del sistema.*

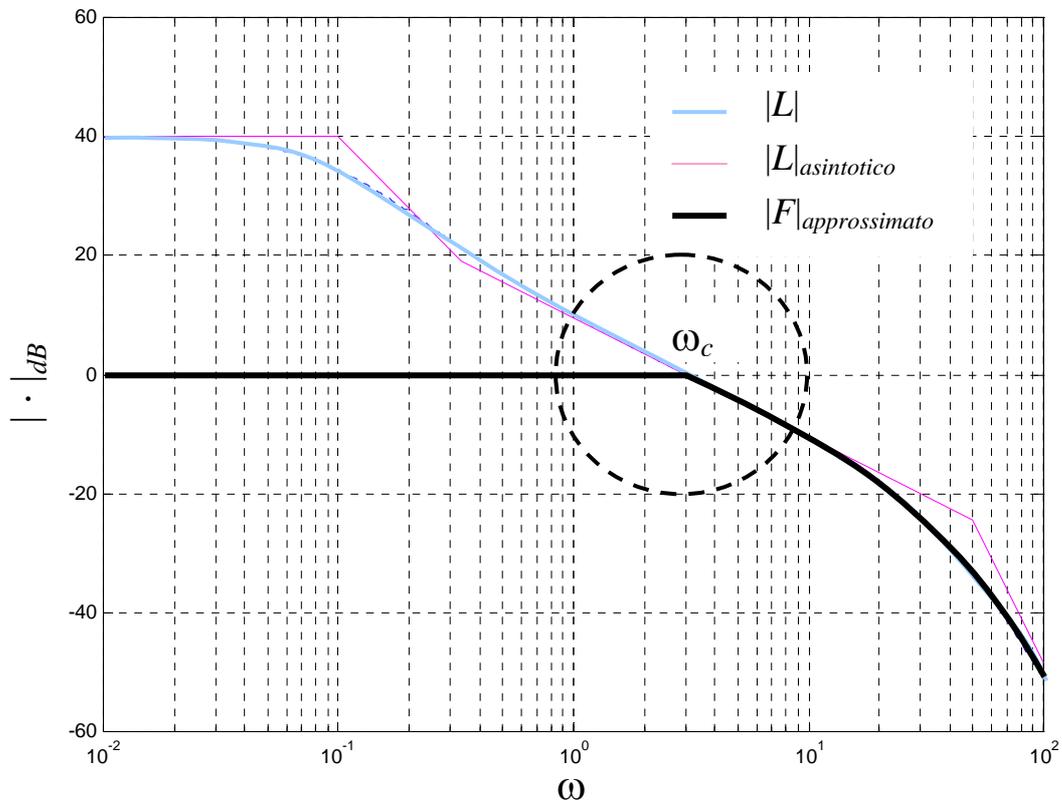


Fig. 6.4 : Calcolo approssimato della risposta in frequenza ad anello chiuso.

Prima di procedere dobbiamo chiederci quale possa essere l'andamento del modulo di $F(j\omega)$ nella zona in cui il calcolo approssimato eseguito finora risulta meno attendibile ($|L(j\omega)| \approx 1$). Più precisamente, come possiamo essere ragionevolmente sicuri che la condizione preliminare per l'esistenza della banda passante di S sia verificata e che ω_c sia in effetti una buona approssimazione dell'estremo superiore di tale banda?

Una risposta a queste domande può essere ottenuta analizzando, nel piano della variabile L , i luoghi a modulo o ad argomento di F costante. Si noti

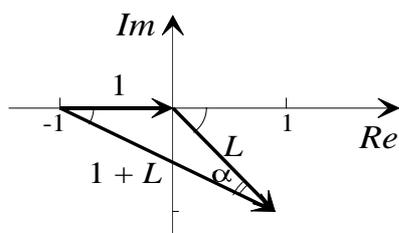


Fig. 6.6 : Modulo e argomento di F .

che, in base a considerazioni di geometria elementare, modulo ed argomento di F sono interpretabili, nel piano di L , come mostrato in Fig.6.6:

$$F = \frac{L}{1 + L} := M e^{j\alpha} \quad ; \quad M = \frac{|L|}{|1 + L|} \quad ,$$

$$\alpha = \angle^\circ L - \angle^\circ (1 + L) \quad .$$

Luoghi a M-costante e ad α -costante. Cerchi di Hall. Carta di Nichols

1. I punti a M -costante sono quelli le cui distanze rispettivamente dall'origine e dal punto -1 stanno in un rapporto costante. Già nel primo secolo a.C. Apollonio alessandrino sapeva che i luoghi dei punti dotati di tale proprietà sono circonferenze, con centro sull'asse reale (Fig.6.7-a).

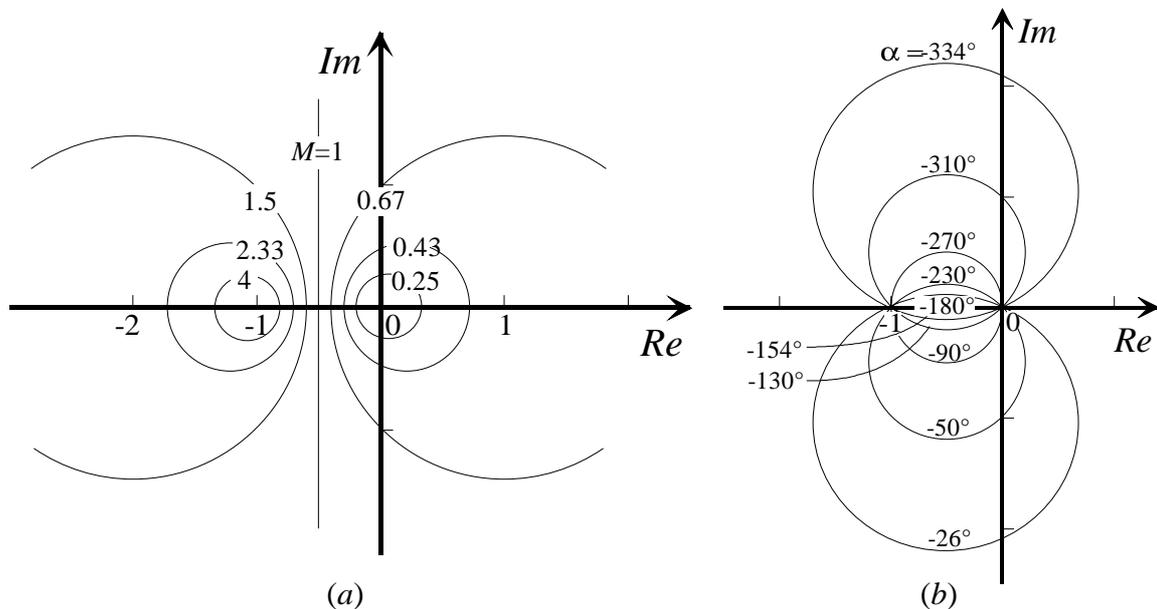


Fig. 6.7 : Cerchi di Hall (a) a M e (b) ad α costante.

2. Per completezza, mostriamo anche (Fig.6.7-b) i luoghi ad α -costante che (come pure dimostrò Apollonio) sono circonferenze, con centro sull'asse del segmento $[-1, 0]$.

Nell'ambito dei Controlli automatici, i luoghi a M -costante e ad α -costante sono detti *cerchi di Hall*, in omaggio a chi per primo li utilizzò. La loro immagine nel piano ($\angle^\circ L, |L|_{dB}$) costituisce la cosiddetta *carta di Nichols* (Fig.6.8).

Nel piano complesso, dove viene tracciato il diagramma *polare* della risposta in frequenza d'anello L , i punti ai quali corrispondono valori del modulo di F maggiori di $\sqrt{2}$ sono quelli interni al cerchio di Hall corrispondente a $M = \sqrt{2}$. Questo cerchio che, fra tutti, riveste dunque una particolare importanza, ha centro in -2 e raggio $\sqrt{2}$ (Fig.6.9).

La condizione preliminare affinché il sistema di controllo S ammetta una ben definita banda passante è soddisfatta se e solo se il diagramma polare della risposta in frequenza d'anello di S non entra nel cerchio di Hall corrispondente a $M = \sqrt{2}$.

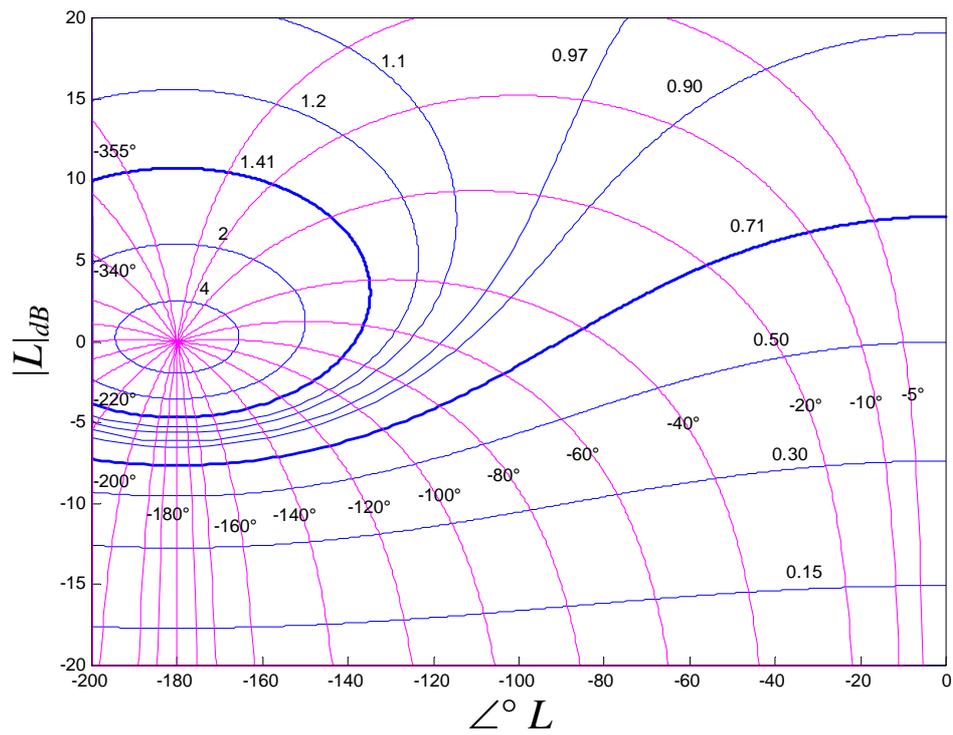


Fig. 6.8 : Carta di Nichols. Luoghi a M costante (blu) e ad α costante (fucsia).

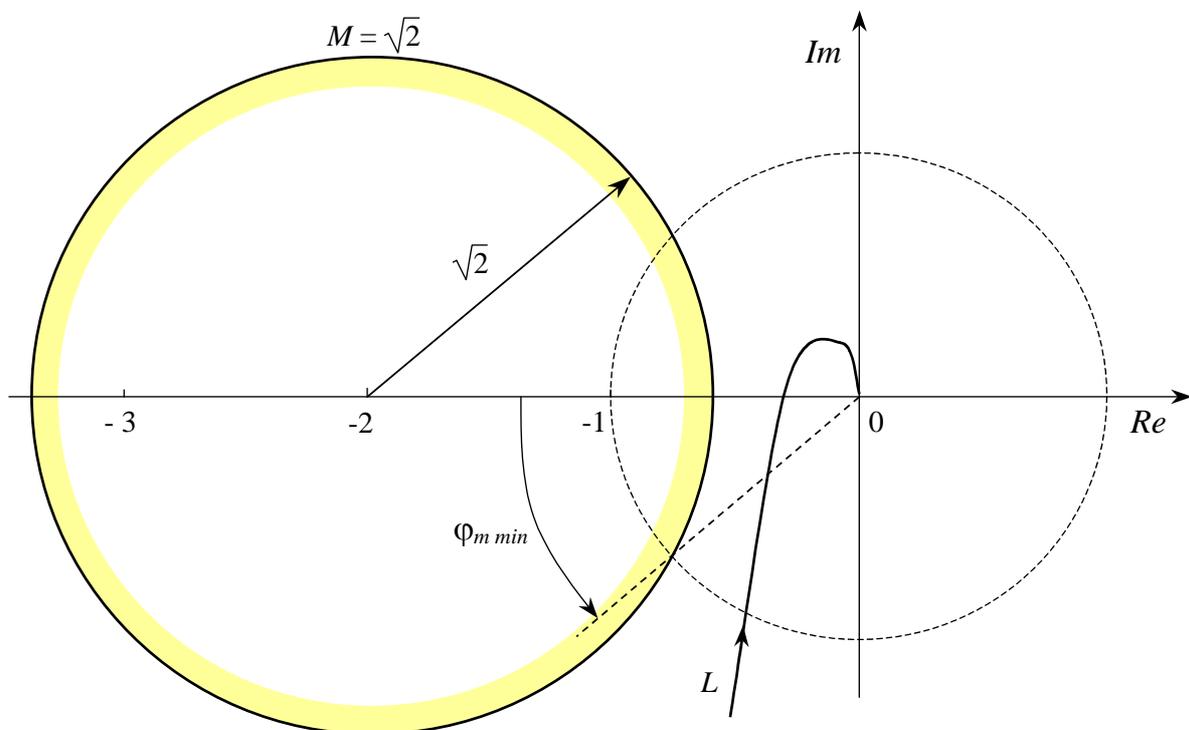


Fig. 6.9 : Il cerchio di Hall corrispondente a $M = \sqrt{2}$.

Condizioni necessarie

Perchè il sistema S ammetta una ben definita banda passante, è necessario (Fig.6.9) che siano soddisfatte le condizioni seguenti:

$$\begin{aligned} \varphi_m &\geq \varphi_{m \min} \cong 41^\circ \\ \mu_m &\geq \mu_{m \min} = \frac{1}{2 - \sqrt{2}} \cong 1.7 \end{aligned}$$

Benché le condizioni trovate sul margine di fase e sul margine di guadagno siano solo necessarie, dovrebbe risultare evidente che soltanto in casi relativamente patologici esse si rivelano insufficienti. Quando siano (ampiamente) rispettate entrambe, è estremamente probabile che il sistema di controllo ammetta una ben definita banda passante.

Vediamo ora se la banda passante di S è davvero costituita, con buona approssimazione, dall'intervallo $[0, \omega_c]$. A questo fine, dobbiamo determinare l'insieme dei valori di ω tali che $|F(j\omega)| \geq 1/\sqrt{2}$. Possiamo farlo osservando che, nel piano complesso dove viene tracciato il diagramma *polare* della risposta in frequenza d'anello L , i punti ai quali corrispondono valori del modulo di F minori di $1/\sqrt{2}$ sono quelli interni al cerchio di Hall con $M = 1/\sqrt{2}$. Questo cerchio è simmetrico, rispetto a una retta parallela all'asse immaginario e passante per $-1/2$, a quello con $M = \sqrt{2}$ (Fig.6.10).

Se il diagramma polare della risposta in frequenza d'anello taglia una sola volta non solo la circonferenza unitaria (Bode) ma anche il cerchio di Hall a $M=1/\sqrt{2}$, allora $\mathbf{B}_p = [0, \omega_B]$ e $\omega_c \cong \omega_B$. Inoltre, se (come abitualmente accade) il margine di fase è inferiore a 90° allora ω_c è anche un'approssimazione per difetto e quindi un'approssimazione "prudente" di ω_B . In generale, qualche situazione patologica è possibile, ma straordinariamente rara e d'interpretazione opinabile.

Banda passante e tempo di risposta (durata del transitorio)

Se non solo i poli ma anche gli zeri della funzione di trasferimento d'anello hanno parte reale minore o uguale a zero, se cioè $P=0$ e $L(s)$ è "a fase minima", e se indichiamo con $\varphi_{asint}(\omega)$ il diagramma asintotico dell'argomento di $L(j\omega)$ e con $p_{asint}(\omega)$ la pendenza alla pulsazione ω del diagramma asintotico di $|L(j\omega)|_{dB}$ (pendenza unitaria pari a 20 dB/decade) allora è facile riconoscere che

$$\varphi_{asint}(\omega) = 90^\circ p_{asint}(\omega) \quad , \quad p_{asint}(\omega_c) \leq -1 \text{ .}$$

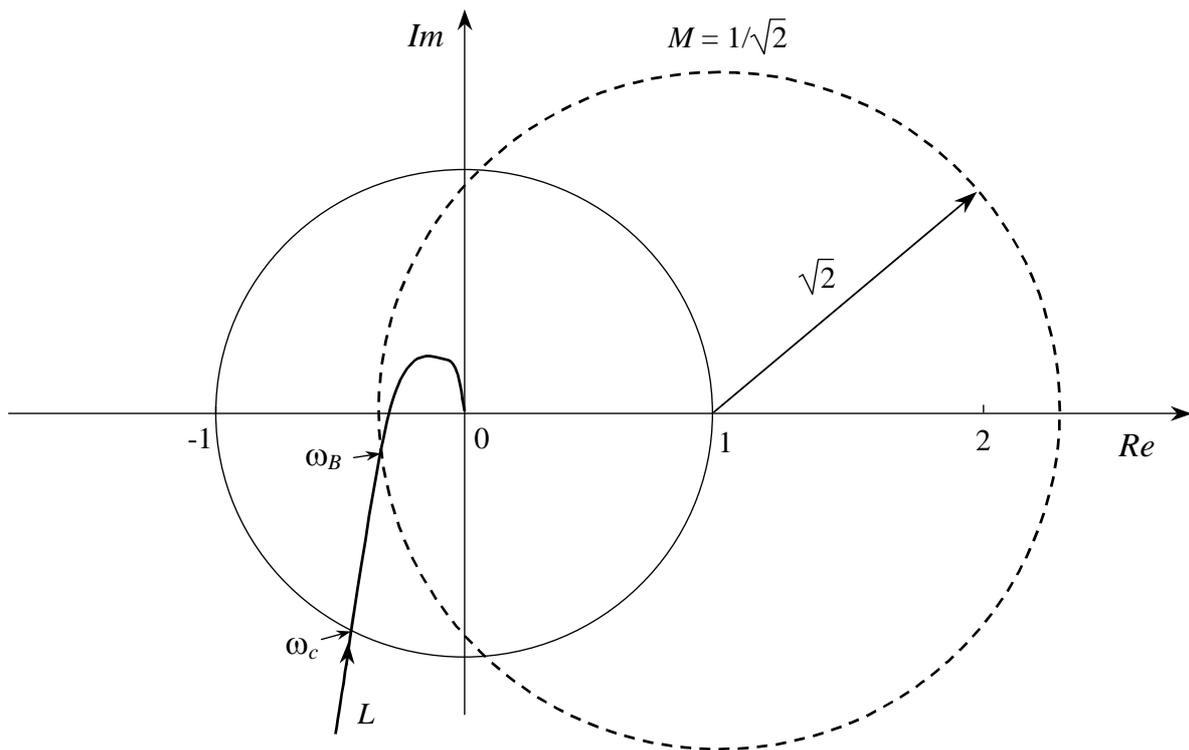


Fig. 6.10 : Il cerchio di Hall corrispondente a $M = 1/\sqrt{2}$.

Se poi $L(s)$ è “a fase non minima” (qualche costante di tempo del numeratore è negativa) allora

$$\varphi_{asint}(\omega) = 90^\circ \tilde{n}(\omega) \quad , \quad \tilde{n}(\omega) < p_{asint}(\omega) .$$

Conseguentemente, un margine di fase significativamente maggiore di 41° generalmente richiede (in assenza di “quasi-cancellazioni” multiple fra poli e zeri della funzione di trasferimento d’anello) che *il diagramma asintotico del modulo della risposta in frequenza d’anello tagli l’asse ω con pendenza -1* e che tale pendenza si mantenga invariata in un intorno abbastanza ampio di ω_c (almeno mezza decade). D’altro canto, un margine di fase significativamente maggiore di 41° (magari accompagnato da un margine di guadagno sensibilmente maggiore di 1.7) assicura una notevole attendibilità al metodo approssimato per il calcolo di $|F(j\omega)|_{dB}$ introdotto all’inizio di questo paragrafo *anche in prossimità della pulsazione critica ω_c* .

Tutto ciò consente di concludere che se $\varphi_m > 41^\circ$ (e $\mu_m > 1.7$) la risposta in frequenza (ad anello chiuso) del sistema S di Fig.6.3 è, nella maggior parte dei casi, abbastanza ben approssimabile con un modello del prim’ordine:

$$F(j\omega) \approx \hat{F}(j\omega) \quad , \quad \hat{F}(s) = \frac{1}{1 + T_{eq} s} \quad , \quad T_{eq} := \frac{1}{\omega_c}$$

sicché il *tempo di risposta* di S ad una variazione a scalino del riferimento (durata del transitorio o “tempo di assestamento”) è attendibilmente dato da:

$$t_a = n T_{eq} \quad , \quad n = 5 \div 10 .$$

Ad esempio, poiché dalla precedente relazione si ha: $\omega_c = n/t_a$, se si vuole che S abbia un tempo di risposta inferiore a 20 [sec] occorre che la banda passante di S abbia un’ampiezza ω_c superiore a $n/20 = 0.25 \div 0.50$ [rad/sec].

Banda passante ed errore d’inseguimento

La capacità di un sistema di controllo di far sì che la variabile controllata inseguia il riferimento con sufficiente precisione è stata finora associata alla nozione di *banda passante*.

Un modo leggermente diverso di caratterizzare la medesima proprietà consiste nell’esaminare direttamente l’*errore d’inseguimento* $\varepsilon_o(\cdot)$; cioè il contributo all’errore effettivo ε dovuto al solo segnale di riferimento c° . Si noti, a questo proposito, che le maiuscole di ε e di e (usate per indicare le rispettive trasformate) coincidono. Tuttavia, a differenza dall’errore effettivo, rappresentato dalla lettera greca ε , l’errore apparente e è di norma scritto in corsivo. In questo modo, è possibile distinguere anche le corrispondenti maiuscole (E per ε , E per e). Un’occhiata al semplice schema a blocchi di Fig.6.3 consente di scrivere:

$$E_o(s) := F_{sens}(s) C^\circ(s) \quad , \quad F_{sens}(s) := \frac{1}{1 + L(s)} .$$

La funzione di trasferimento $F_{sens}(s)$, da c° a ε , è detta *funzione di sensibilità* (“sensitivity function”) del sistema di controllo S .

Con la consueta approssimazione (in accordo alla quale “molto maggiore” e “molto minore” sono interpretati come “maggiore” e “minore”), abbiamo (Fig.6.11):

$$|F_{sens}(j\omega)| := \frac{1}{|1 + L(j\omega)|} \cong \begin{cases} 1 & , \text{ se } |L(j\omega)| \ll 1 \\ \frac{1}{|L(j\omega)|} & , \text{ se } |L(j\omega)| \gg 1 \end{cases}$$

Ora sappiamo anche che questa approssimazione risulta particolarmente attendibile se $\varphi_m > 41^\circ$ e $\mu_m > 1.7$.

Si noti che l'errore d'inseguimento è generalmente tanto più piccolo, e quindi *la precisione d'inseguimento è tanto maggiore, quanto più ampia è la banda passante e quanto più elevato è, sulla banda passante, il modulo della risposta in frequenza d'anello.*

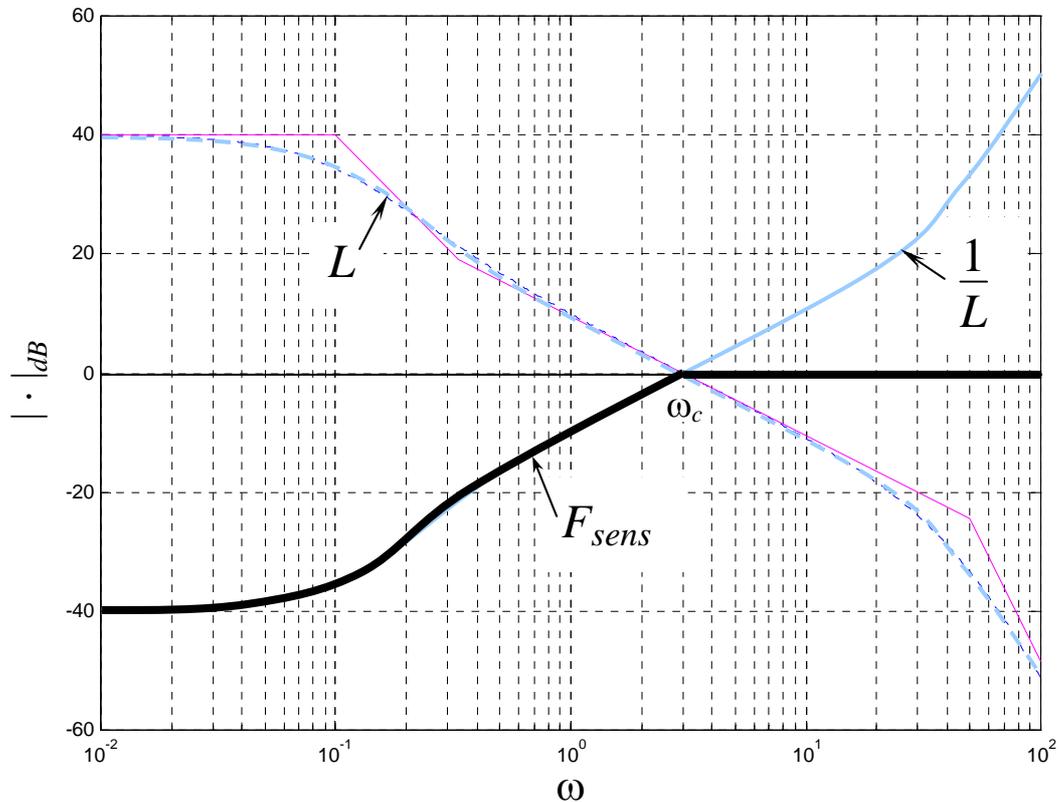


Fig. 6.11 : Modulo della risposta in frequenza associata alla funzione di sensibilità.

In particolare, la precisione d'inseguimento è tanto maggiore quanto più elevato è, sulla banda passante, il modulo di L in corrispondenza delle bande di frequenza in cui più intenso è lo spettro di c° .

Si può infine osservare come le precedenti considerazioni portino a concludere che, in un sistema di controllo, la banda passante effettivamente efficace è meno ampia di quella stabilita dalla definizione convenzionale. Se si considera efficace la banda sulla quale il modulo di L è superiore a 10 dB, si conclude facilmente che l'estremo superiore di tale banda è, di solito, circa 1/3 di ω_c .

6.2 Resistenza ai disturbi (additivi)

Il secondo aspetto importante della precisione dinamica è la capacità di far sì che sia sufficientemente piccolo il contributo all'errore (effettivo) dovuto all'azione dei disturbi. Cominciamo a considerare i disturbi additivi,

distinguendo fra disturbi che agiscono sulla linea d'andata e disturbi che agiscono sulla linea di retroazione:

disturbi additivi $\left\{ \begin{array}{l} \text{sulla linea d'andata} \\ \text{sulla linea di retroazione} \end{array} \right.$

Disturbi sulla linea d'andata

Facciamo ancora le seguenti ipotesi:

a) $\vartheta = \vartheta_n \Rightarrow H_a(s, \vartheta_n) = H_a(s), G_a(s, \vartheta_n) = G_a(s), \dots$

b) $H_{GSR}(s) = G_r(s)$

e, per esaminare gli effetti di un disturbo additivo sulla linea d'andata, prendiamo in esame lo schema a blocchi di Fig.6.12 che, per l'ipotesi (b), è anche equivalente a quello di Fig.6.13, dove ancora: $L(s) := G_r(s) R(s) G_a(s)$.

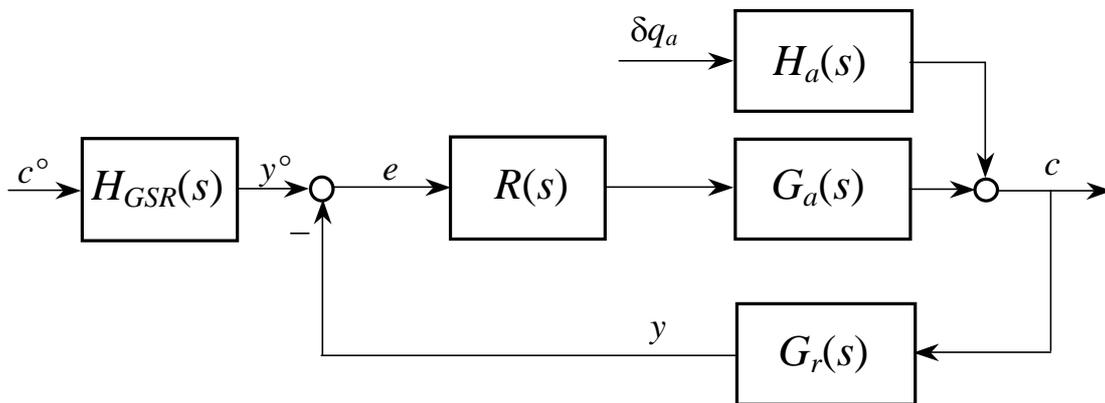


Fig. 6.12 : Schema a blocchi del sistema S_a utilizzato nell'analisi dell'errore (effettivo) prodotto da un disturbo sulla linea d'andata.

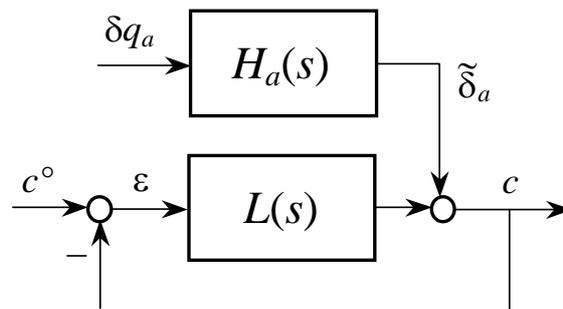


Fig. 6.13 : Versione ridotta del sistema S_a .

Indichiamo con $\varepsilon_a(\cdot)$ il contributo all'errore effettivo dovuto al disturbo δq_a . Da un semplice esame della Fig.6.13, si ha:

$$|E_a(j\omega)| = |F_a(j\omega)| |\tilde{\Delta}_a(j\omega)| \quad ; \quad F_a(s) := \frac{-1}{1+L(s)} = -S(s) \quad , \quad \tilde{\Delta}_a(s) = H_a(s) \Delta Q_a(s)$$

Ricordando l'analisi dell'errore d'inseguimento, possiamo immediatamente concludere che, a fronte di disturbi additivi *sulla linea d'andata*, la precisione del controllo è *tanto maggiore quanto più ampia è la banda passante, e quanto più elevato è, sulla banda passante, il modulo della risposta in frequenza d'anello*. In particolare, la capacità del sistema di controllo di "assorbire" disturbi δq_a presenti sulla linea d'andata è tanto maggiore quanto più elevato è il modulo di L in corrispondenza delle bande di frequenza in cui più intenso è lo spettro dei *disturbi additivi equivalenti in uscita* (del sistema sotto controllo) $\tilde{\delta}_a$.

Disturbi sulla linea di retroazione

Anche in questo caso facciamo le solite ipotesi:

$$a) \quad \vartheta = \vartheta_n \Rightarrow \quad G_a(s, \vartheta_n) = G_a(s), \quad G_r(s, \vartheta_n) = G_r(s), \quad H_r(s, \vartheta_n) = H_r(s), \quad \dots$$

$$b) \quad H_{GSR}(s) = G_r(s)$$

e, per esaminare gli effetti di un disturbo additivo sulla linea di retroazione, prendiamo in esame lo schema a blocchi di Fig.6.14, palesemente equivalente, in vista dell'ipotesi (b), a quelli di Fig.6.15, dove, come sempre:

$$L(s) := G_r(s) R(s) G_a(s) .$$

Indichiamo con $\varepsilon_r(\cdot)$ il contributo all'errore effettivo dovuto al disturbo δq_r . Da un semplice esame della Fig.6.15-c, si ha:

$$E_r(s) = F_r(s) \tilde{\Delta}_r(s) \quad , \quad F_r(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = F(s) \quad , \quad \tilde{\Delta}_r(s) = \frac{H_r(s)}{G_r(s)} \Delta Q_r(s)$$

Notando che la funzione di trasferimento da $\tilde{\delta}_r$ a ε coincide con quella da c° a c , già ampiamente analizzata, possiamo concludere che, a fronte di disturbi additivi *sulla linea di retroazione*, la precisione del controllo è *tanto maggiore quanto più stretta è la banda passante, e quanto più piccolo è, fuori dalla banda passante* ($\omega > \omega_c$), *il modulo della risposta in frequenza d'anello*. In particolare, la capacità del sistema di controllo di "assorbire" disturbi δ_r che agiscono sulla linea di retroazione è tanto maggiore quanto più piccolo è il modulo di L in corrispondenza delle bande di frequenza in cui più intenso è lo spettro dei disturbi additivi equivalenti $\tilde{\delta}_r$ su c .

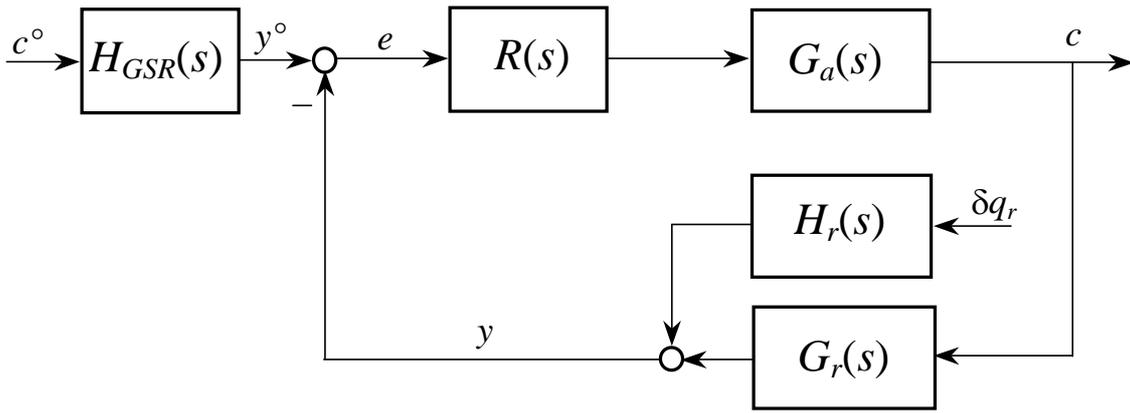
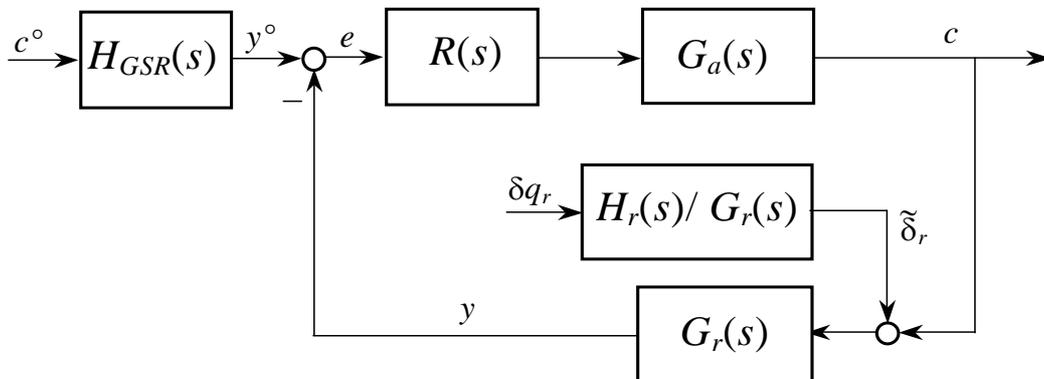
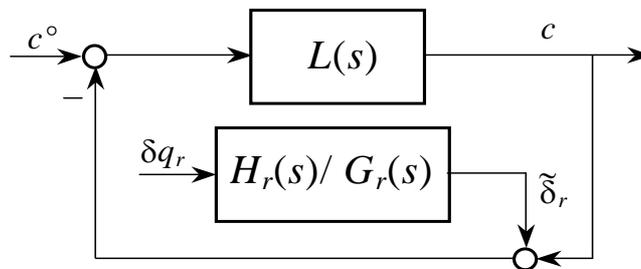


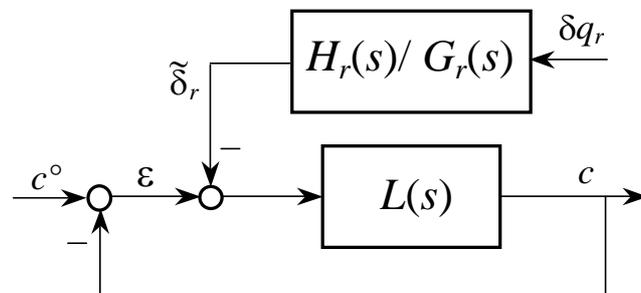
Fig. 6.14 : Schema a blocchi del sistema S_r utilizzato nell'analisi dell'errore (effettivo) prodotto da un disturbo sulla linea d'andata.



(a)



(b)



(c)

Fig. 6.15 : Schemi a blocchi equivalenti a quello di Fig.5.15

Infine, è importante notare come l'errore prodotto da quelle componenti spettrali di $\tilde{\delta}_r$ che insistono sulla banda passante sia *indipendente* da $L(s)$, e quindi da $R(s)$. *Non è possibile*, cioè, sulla banda passante, *ridurre gli effetti di questi disturbi con un progetto oculato del controllore*.

6.3 Dinamica del generatore del segnale di riferimento

Abbiamo finora supposto che la funzione di trasferimento attribuita al generatore del segnale di riferimento coincida con quella della linea di retroazione: $H_{GRS}(s) = G_r(s)$.

Ora ci chiediamo se sia sempre necessario, e conveniente, replicare nel generatore del segnale di riferimento tutta la dinamica (le costanti di tempo) della linea di retroazione. Poiché il generatore del segnale di riferimento è esterno all'anello di controllo, occorre soltanto esaminare quali conseguenze possa avere sulla banda passante da c° a c , e quindi sulla capacità d'inseguimento, la mancata replica in $H_{GRS}(s)$ di una costante di tempo di $G_r(s)$.

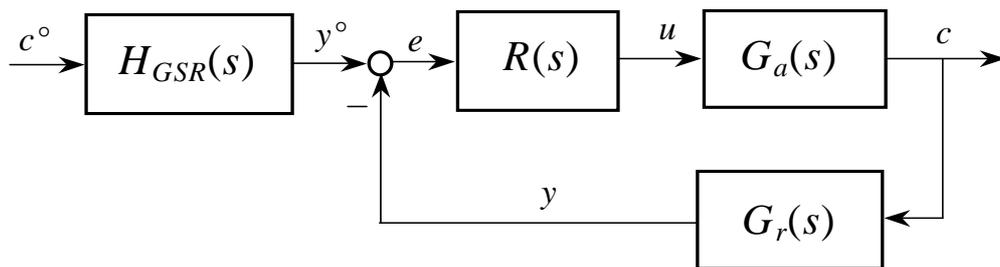


Fig. 6.16 : Sistema di controllo S.

Isolando dunque la costante di tempo di $G_r(s)$ ipoteticamente destinata a non essere replicata in $H_{GRS}(s)$, sia (Fig.6.16):

$$G_r(s) = \frac{1}{1 + s T} G^*(s) \quad , \quad H_{GRS}(s) = G^*(s) = (1 + s T) G_r(s).$$

In questo caso, è facile riconoscere che il sistema S di Fig.6.16 può essere equivalentemente rappresentato dallo schema a blocchi di Fig.6.17.

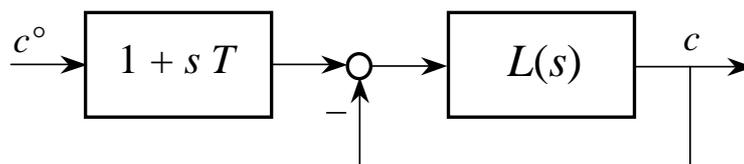


Fig. 6.17 : Rappresentazione equivalente del sistema S.

La funzione di trasferimento di S , da c° a c , è quindi data da:

$$F^*(s) = (1 + s T) F(s)$$

dove (come sempre):

$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} \quad , \quad L(s) := G_r(s) R(s) G_d(s) .$$

La conseguenza della mancata replica in $H_{GRS}(s)$ di una costante di tempo al denominatore di $G_r(s)$ è la comparsa della stessa costante di tempo al numeratore della funzione di trasferimento da c° a c . Analogamente, la conseguenza della mancata replica in $H_{GRS}(s)$ di una costante di tempo al numeratore di $G_r(s)$ è la comparsa della stessa costante di tempo al denominatore della funzione di trasferimento da c° a c .

Ricordando le conclusioni raggiunte a proposito della forma di $|F(j\omega)|_{dB}$, è immediato dedurre che la suddetta conseguenza è da ritenersi insignificante o, al limite, positiva, se (come succede nella stragrande maggioranza dei casi) la pulsazione d'angolo $\Omega := 1/T$ è maggiore di ω_c (la rapidità di risposta della linea di retroazione è maggiore di quella richiesta al sistema di controllo), mentre può dimostrarsi inaccettabile se Ω è (sensibilmente) minore di ω_c .

6.4 Banda passante e controllori a due gradi di libertà

Abbiamo visto, nel secondo paragrafo di questo capitolo, che il più generale controllore lineare tempo-invariante, coerente con quanto direttamente consegue dall'impostazione classica, è descritto da due funzioni di trasferimento: $R_0(s)$ e $R_1(s)$, o equivalentemente (Fig.6.18): $R(s)$ e $\Phi(s)$. Controllori di questo tipo sono detti *a due gradi di libertà* e abbiamo visto come i controllori *PID* siano spesso realizzati in modo coerente con questa particolare architettura.

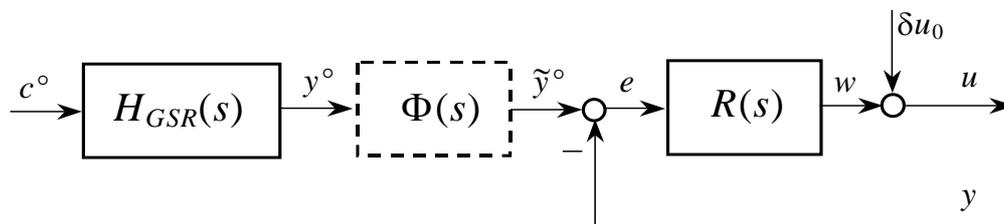


Fig. 6.18 : Controllore a due gradi di libertà (quando $\Phi(s) \neq 1$).

La precisione del sistema di controllo è stata tuttavia analizzata fin qui considerando solo la funzione di trasferimento $R(s)$; supponendo, cioè, $\Phi(s) = 1$, che equivale a $R_1(s) = 0$ (controllore *a un solo grado di libertà*).

L'analisi svolta ci consente ora di commentare brevemente il caso più generale. La circostanza che rende conveniente l'adozione di un controllore a due gradi di libertà è una significativa disparità fra le "esigenze di banda passante" (di rapidità di risposta) connesse alla presenza di disturbi sulla linea d'andata e quelle connesse alla necessità d'inseguire il riferimento. Tipicamente tale disparità si verifica nei problemi di *regolazione* caratterizzati da sporadici o addirittura rari cambiamenti del valore dato alla variabile di riferimento, a fronte dei quali non sia rilevante un'elevata rapidità di risposta da parte del sistema di controllo, ma sia invece importante temperare adeguatamente l'azione di controllo conseguente a una brusca variazione del riferimento. Si tratta naturalmente di una situazione molto frequente nelle applicazioni industriali correnti. Il filtro sul riferimento, o i provvedimenti strutturali equivalenti alla sua inserzione (PID a derivazione dell'uscita o, più in generale, $R_1(s) \neq 0$), ha l'effetto di ridurre l'ampiezza della banda passante da c° a c senza alterare quella utile ai fini dell'attenuazione degli errori prodotti da disturbi sulla linea d'andata.

6.5 Banda passante e intensità dell'azione di controllo

L'esigenza d'inseguire con cura un segnale di riferimento "a spettro diffuso", o di contrastare efficacemente analoghi disturbi che agiscono sulla linea d'andata, spinge ad allargare il più possibile la banda passante del sistema di controllo.

La eventuale presenza di disturbi sulla linea di retroazione, ancora "a spettro diffuso", suggerisce invece una strategia opposta, mettendo in luce la necessità di trovare un compromesso. Per altro, non è questa l'unica ragione per la quale può non essere conveniente ampliare più del necessario la banda passante. Una seconda ragione è legata all'esigenza di non aumentare inutilmente, a parità di sollecitazioni esterne, l'intensità dell'azione di controllo.

Che un ampliamento della banda passante, con il conseguente aumento della rapidità di risposta, comporti in generale una più intensa azione di controllo è del tutto intuitivo. E' tuttavia interessante vedere come l'analisi confermi e arricchisca questa intuizione.

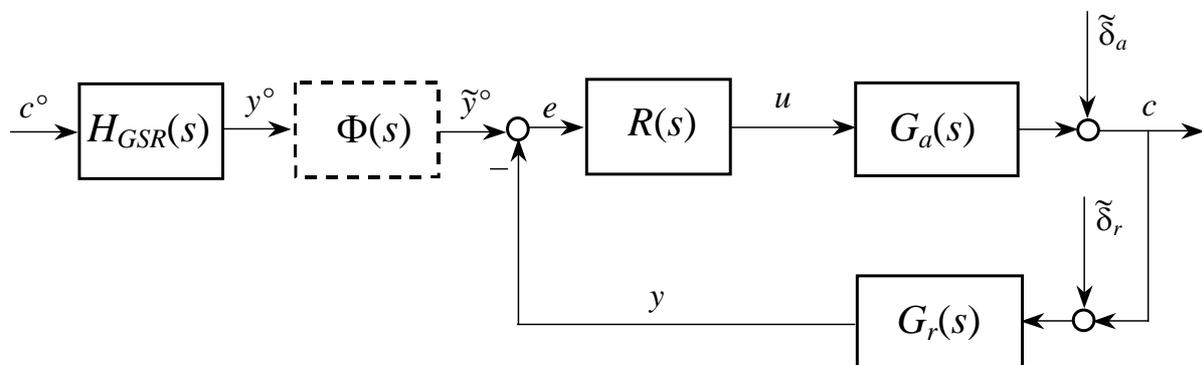


Fig. 6.19 : Sistema di controllo.

In vista dell'analisi svolta in precedenza e con riferimento allo schema a blocchi di Fig.6.19, non è difficile ricavare:

$$U(s) = \frac{R(s)}{1 + L(s)} \left[H_{GRS}(s) \Phi(s) C^\circ(s) - G_r(s) (\tilde{\Delta}_a(s) + \tilde{\Delta}_r(s)) \right]$$

dove, come al solito, $L(s) := G_r(s) R(s) G_a(s)$. Quindi, poiché $|a \pm b| \leq |a| + |b|$,

$$|U(j\omega)| \leq \frac{|R(j\omega)|}{|1 + L(j\omega)|} D(\omega)$$

$$D(\omega) := \left[|H_{GRS}(j\omega)| |\Phi(j\omega)| |C^\circ(j\omega)| + |G_r(j\omega)| (|\tilde{\Delta}_a(j\omega)| + |\tilde{\Delta}_r(j\omega)|) \right].$$

Osserviamo che $D(\omega)$ dipende dal controllore solo per la presenza di $|\Phi(j\omega)|$. Abbiamo già sottolineato al punto precedente come, in determinate circostanze, sia possibile e conveniente, grazie all'azione filtrante di Φ , attenuare l'effetto di c° sull'intensità dell'azione di controllo a prezzo di una minore ampiezza della banda passante da c° a c senza tuttavia alterare la capacità del sistema di resistere ai disturbi additivi; segnatamente, quelli che agiscono sulla linea d'andata.

Per altro, si ha:

$$\frac{|R(j\omega)|}{|1 + L(j\omega)|} = \frac{|L(j\omega)|}{|1 + L(j\omega)|} \frac{1}{|G(j\omega)|} = |F(j\omega)| \frac{1}{|G(j\omega)|}$$

dove $G(s) := G_a(s) G_r(s)$, sicché $L(s) = R(s) G(s)$; inoltre, sappiamo che:

$$|F(j\omega)| \cong \begin{cases} 1 & , \quad \omega < \omega_c \\ |L(j\omega)| & , \quad \omega > \omega_c . \end{cases}$$

Quindi,

$$\frac{|R(j\omega)|}{|1 + L(j\omega)|} \cong \begin{cases} \frac{1}{|G(j\omega)|} & , \quad \omega < \omega_c \\ |R(j\omega)| & , \quad \omega > \omega_c . \end{cases}$$

Questa espressione è interessante perché consente di mettere in evidenza due aspetti importanti.

Dato che $|G(j\omega)|$ tipicamente decresce (almeno da una certa pulsazione in poi) al crescere di ω , una semplice riflessione consente di trarre la prevedibile conclusione che, se $D(\omega)$ è una funzione genericamente diffusa sull'asse ω , *l'intensità dell'azione di controllo aumenta con l'ampiezza della banda passante*; aumenta, cioè, al crescere di ω_c .

Per altro, *l'intensità dell'azione di controllo dovuta alle componenti spettrali in alta frequenza ($\omega > \omega_c$) di $D(\omega)$ aumenta invece col modulo di $R(j\omega)$* . Di qui l'importanza di evitare che $|R(j\omega)|$ sia inutilmente elevato per $\omega > \omega_c$ (si pensi ai controllori *PID* ideali e alla benefica azione di un filtro passa basso posto sull'azione derivativa).

7. Precisione statica

Con riferimento al sistema di controllo di Fig.7.1, che naturalmente continuiamo a supporre stabile asintoticamente, e in analogia con quanto fatto in precedenza, vogliamo valutare l'errore effettivo prodotto, *a transitorio esaurito*, dalla peggior combinazione possibile degli ingressi ammissibili.

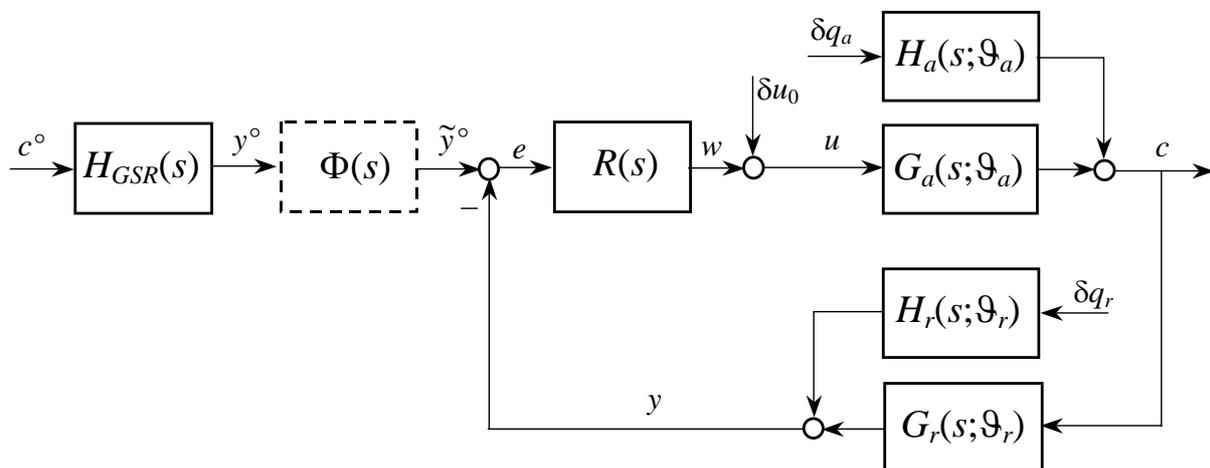


Fig. 7.1 : Sistema di controllo.

Tecnicamente, “a transitorio esaurito” significa “per t che tende all’infinito”; sappiamo bene, però, che in pratica un transitorio può ritenersi esaurito dopo un intervallo di tempo di durata pari a quello che abbiamo chiamato “tempo di risposta” del sistema, ovvero pari a $5 \div 10$ volte la costante di tempo dominante.

In un primo momento faremo, come al solito, l'ipotesi che nessuna delle funzioni di trasferimento dello schema a blocchi sia affetta da parametri:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_n \quad \Rightarrow \quad H_a(s, \mathfrak{G}_n) = H_a(s), \quad G_a(s, \mathfrak{G}_n) = G_a(s), \dots$$

riservando a una fase successiva qualche commento relativo alla robustezza dei risultati ottenuti rispetto ad un insieme ammissibile di disturbi parametrici.

Per quanto riguarda l'effetto sull'errore (effettivo) del disturbo costante δu_0 , possiamo supporre che si tratti di uno scalino e considerare quanto accade per t che tende all'infinito. In questo modo, non sussiste alcuna differenza concettualmente rilevante fra δu_0 e δq_a ; la funzione di trasferimento da δu_0 a c è:

$$H_0(s; \mathfrak{G}_a) := G_a(s; \mathfrak{G}_a) .$$

Occorre infine valutare l'errore a transitorio esaurito prodotto dalla *peggiore combinazione possibile* degli ingressi ammissibili. Tale "combinazione pessima" è generalmente costruita attribuendo agli ingressi un andamento canonico (scalino, rampa, parabola), di cui si ritiene nota la massima ampiezza. Il massimo errore complessivo è palesemente dato dalla *somma dei valori assoluti* dei contributi prodotti dai singoli ingressi (sovrapposizione degli effetti), quando la loro ampiezza è quella massima.

Con tutte queste premesse, dovrebbe risultare chiaro che lo strumento principe per l'analisi dell'errore a transitorio esaurito è il *teorema del valor finale*. Se $E_i(s)$ è la trasformata di Laplace dell'effetto prodotto dall' i -esimo ingresso $v_i(\cdot)$ sull'errore $\varepsilon(\cdot)$, allora:

$$\varepsilon_{\infty i} := \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_i(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s E_i(s)$$

dove: $E_i(s) = F_i(s) V_i(s)$ e $F_i(s)$ è la funzione di trasferimento da v_i a ε .

E' ora conveniente introdurre, per pura comodità, un lessico e una notazione particolari. Per ogni funzione di trasferimento

$$L(s) = \frac{\mu e^{-\tau s} \prod_i (1 + s \tau_i)}{s^g \prod_k (1 + s T_k)}$$

chiamiamo *componente asintotica* di $L(s)$ la funzione

$$\bar{L}(s) := \frac{\mu}{s^g} .$$

Proposizione 1. L'errore a transitorio esaurito non cambia se, nello schema a blocchi del sistema, ci si limita a considerare la componente asintotica di ogni funzione di trasferimento.

Proposizione 2. La risposta di un sistema descritto dalla componente asintotica di una funzione di trasferimento (Fig.7.2) forzata da un ingresso canonico (scalino, rampa, parabola) è un segnale canonico.

Esempio

Se, con riferimento alla Fig.7.2, $\bar{G}(s) = 10/s$ e $v(t) = 0.2 \text{ ram}(t)$, sicché $V(s) = 0.2/s^2$; allora:

$$Z(s) = \bar{G}(s) V(s) = 2/s^3 \quad , \quad z(t) = 2 \text{ par}(t).$$

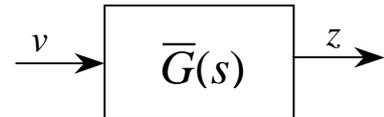


Fig. 7.2 : Schiera d'integratori (o di derivatori).

Si noti che il calcolo della risposta forzata presuppone stato iniziale nullo.

7.1 Analisi della precisione statica in condizioni nominali ($\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_n$)

In vista delle precedenti ipotesi e osservazioni, possiamo fissare l'attenzione su una versione semplificata (Fig.7.3) dello schema a blocchi di Fig.7.1.

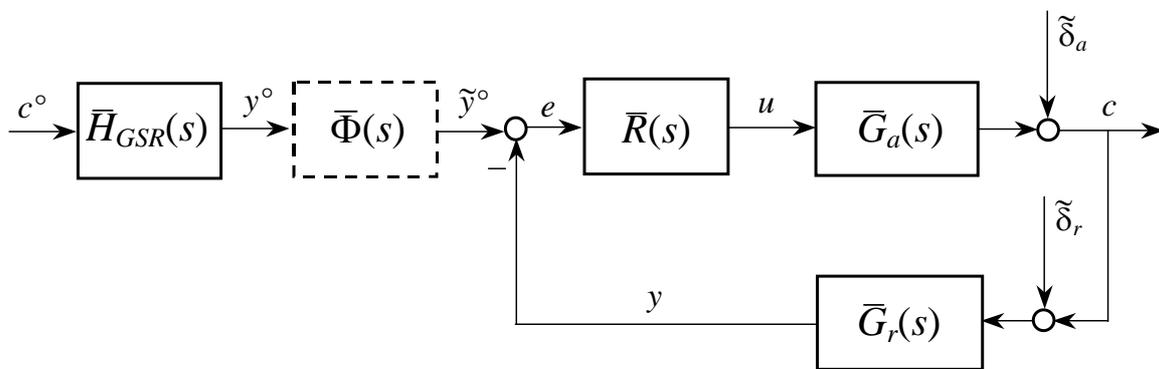


Fig. 7.3 : Schema a blocchi ridotto alle sole componenti asintotiche.

Poiché, per definizione, $\bar{H}_{GSR}(s) = \bar{G}_r(s)$ e $\bar{\Phi}(s) = 1$, è possibile apportare un'ulteriore semplificazione, mettendo contestualmente in evidenza l'errore effettivo ε (Fig.7.4, dove naturalmente $\bar{L}(s) := \bar{G}_r(s) \bar{R}(s) \bar{G}_a(s)$).

Per il principio di sovrapposizione degli effetti, sarà: $\varepsilon(t) = \varepsilon_o(t) + \varepsilon_a(t) + \varepsilon_r(t)$;

$$E(s) = E_o(s) + E_a(s) + E_r(s) = F_{sens}(s) C^o(s) + F_a(s) \tilde{\Delta}_a(s) + F_r(s) \tilde{\Delta}_r(s) .$$

Indicando ora con μ e g il guadagno e il tipo della funzione di trasferimento d'anello $L(s)$ e limitandosi a considerare le componenti asintotiche, si ha:

$$\bar{F}_{sens}(s) = \frac{1}{1 + \bar{L}(s)} = \frac{s^g}{s^g + \mu} \quad , \quad \bar{F}_a(s) = -\bar{F}_{sens}(s) \quad , \quad \bar{F}_r(s) = \frac{\bar{L}(s)}{1 + \bar{L}(s)} = \frac{\mu}{s^g + \mu} .$$

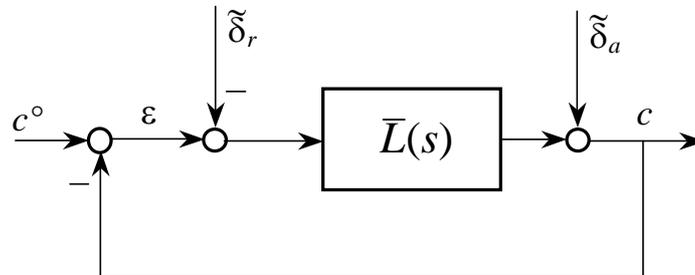


Fig. 7.4 : Schema a blocchi ridotto per il calcolo dell'errore a transitorio esaurito.

A parità di andamento (scalino, rampa o parabola), cioè a parità di forma e di ampiezza del segnale d'ingresso, il contributo ε_o all'errore a transitorio esaurito dovuto al riferimento c^o e il contributo ε_a dovuto al disturbo equivalente sulla linea d'andata $\tilde{\delta}_a$ coincidono a meno del segno.

D'altronde, come già sottolineato, ciò che abitualmente interessa di tali contributi è il valore assoluto, dal momento che: $|\varepsilon(t)| \leq |\varepsilon_o(t)| + |\varepsilon_a(t)| + |\varepsilon_r(t)|$, e nel caso peggiore vale il segno uguale. Al limite, per t che tende all'infinito:

$$|\varepsilon_\infty| \leq |\varepsilon_{o\infty}| + |\varepsilon_{a\infty}| + |\varepsilon_{r\infty}| .$$

Il valore di $\varepsilon_{o\infty}$ in corrispondenza di andamenti canonici (di ampiezza A) del riferimento e in funzione di μ e di g è riportato in Tabella 1.

Tabella 1

$\varepsilon_{o\infty}$		g		
		0	1	2
$C^o(s)$	$\frac{A}{s}$	$\frac{A}{1 + \mu}$	0	0
	$\frac{A}{s^2}$	∞	$\frac{A}{\mu}$	0
	$\frac{A}{s^3}$	∞	∞	$\frac{A}{\mu}$

L'analoga tabella per $\varepsilon_{a\infty}$ è, segni a parte, sostanzialmente identica, tanto che potrebbe essere omessa.

Tabella 2

$\varepsilon_{a\infty}$		g		
		0	1	2
$\tilde{\Delta}_a(s)$	$\frac{A}{s}$	$-\frac{A}{1+\mu}$	0	0
	$\frac{A}{s^2}$	$-\infty$	$-\frac{A}{\mu}$	0
	$\frac{A}{s^3}$	$-\infty$	$-\infty$	$-\frac{A}{\mu}$

Radicalmente diversa è invece la Tabella 3 relativa a $\varepsilon_{r\infty}$; relativa, cioè, al contributo all'errore a transitorio esaurito dato da un disturbo additivo agente sulla linea di retroazione.

Tabella 3

$\varepsilon_{r\infty}$		g		
		0	1	2
$\tilde{\Delta}_r(s)$	$\frac{A}{s}$	$\frac{A\mu}{1+\mu}$	A	A
	$\frac{A}{s^2}$	∞	∞	∞
	$\frac{A}{s^3}$	∞	∞	∞

Queste tabelle suggeriscono alcuni *commenti* a carattere generale.

- A transitorio esaurito, l'errore d'inseguimento $\varepsilon_{0\infty}$ (dovuto ad andamenti canonici di c°) e l'errore $\varepsilon_{a\infty}$ dovuto a un disturbo canonico sulla linea d'andata assumono un valore *finito* solo se il tipo del sistema di controllo, che per definizione coincide con il tipo g della funzione di trasferimento d'anello, non è inferiore a un valore g_{min} che dipende dalla forma del segnale canonico che lo ha causato. Ad esempio, se il riferimento c° o il disturbo equivalente $\tilde{\delta}_a$ hanno un andamento a rampa (seconda riga),

allora $g_{min} = 1$. Se $g > g_{min}$, questi contributi all'errore a transitorio esaurito sono nulli. Se $g = g_{min}$, sono tanto più piccoli, in valore assoluto, quanto più grande è il guadagno μ della funzione di trasferimento d'anello.

- L'errore a transitorio esaurito $\epsilon_{r\infty}$ prodotto da disturbi additivi sulla linea di retroazione merita un'attenzione particolare. Se può essere ragionevole ed ampiamente intuitivo ch'esso risulti illimitato a fronte di disturbi illimitati sugli apparati di misura e trasmissione, meno ovvio è il risultato relativo a un disturbo a scalino. Innanzitutto, se $g > 0$ il contributo di $\tilde{\delta}_r$ all'errore a transitorio esaurito è pari all'ampiezza A del disturbo, *indipendentemente dalla forma e dalla taratura del controllore*. Più favorevole sembra il caso $g = 0$, ma è un'apparenza ingannevole. Infatti, un esame attento delle prime due tabelle (casella in alto a sinistra) induce a concludere che, per avere un'almeno decente precisione statica, il guadagno μ della funzione di trasferimento d'anello nei sistemi di tipo zero dev'essere (possibilmente di almeno un ordine di grandezza) maggiore di 10. Conseguentemente, anche il valore di $\mu/(1+\mu)$ risulta in ogni caso molto prossimo a 1. In definitiva, si può concludere che *la precisione statica di un sistema di controllo non può essere superiore a quella che contraddistingue l'apparato di misura e trasmissione della variabile controllata, cioè il trasduttore*.

7.2 Robustezza della precisione statica (rispetto a disturbi parametrici)

L'analisi svolta al punto precedente consente di trarre subito una conclusione importante. In presenza di disturbi parametrici ($L(s, \vartheta)$, $\vartheta = \vartheta_n + \delta\vartheta$, $\delta\vartheta \neq 0$), la precisione statica di un sistema di controllo non dipende dal valore delle costanti di tempo (purché, naturalmente, sia sufficientemente robusta la stabilità del sistema, che deve comunque restare asintoticamente stabile) mentre dipende *in modo monotono* dal guadagno $\mu_R \mu_a$ della funzione di trasferimento $R(s) G_a(s)$ della linea d'andata (l'analisi svolta al precedente punto 6.1 mostra come il caso peggiore si abbia quando questi guadagni, e quindi il guadagno d'anello μ , assumono il loro valore minimo).

Diverso, e ovviamente più grave, è il caso in cui il disturbo parametrico riguardi il *trasduttore* della variabile controllata. Infatti, se il guadagno μ_r della funzione di trasferimento $G_r(s)$ diventa inopinatamente $\mu_r + \delta\mu_r$, vien meno la condizione

$$\bar{H}_{GSR}(s) = \bar{G}_r(s)$$

Dal momento che, essendo di norma $G_r(s)$ una funzione di trasferimento di tipo zero, in presenza di un disturbo $\delta\mu_r \neq 0$ si ha: $\bar{H}_{GSR}(s) = \mu_r$, $\bar{G}_r(s) = \mu_r + \delta\mu_r$.

L'analisi condotta al precedente punto 6.1 richiede quindi, in questo caso, di essere riconsiderata. Lo schema a blocchi di Fig.7.5-a è palesemente equivalente a quelli di Fig.7.5-b e Fig.7.5-c.

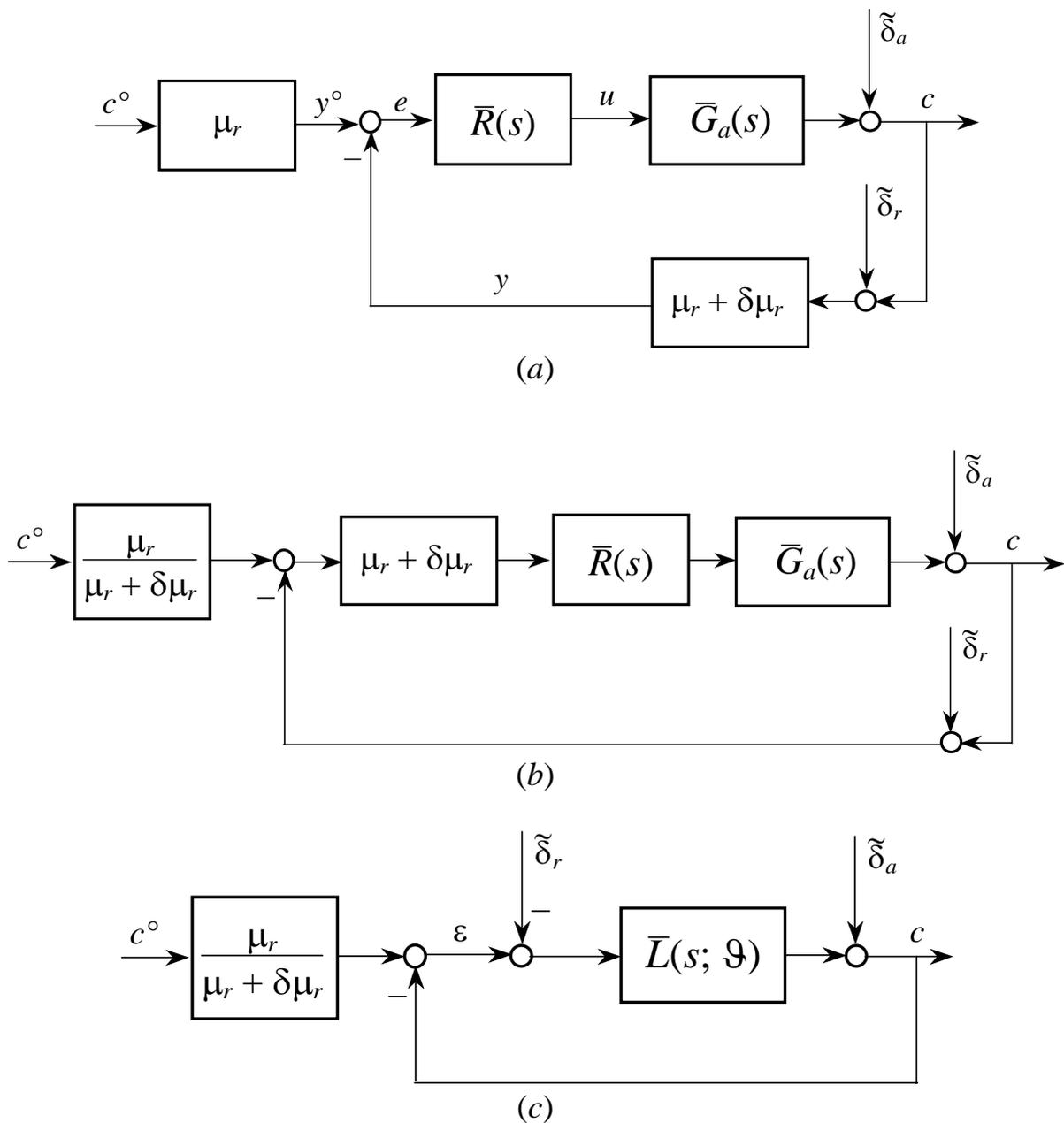


Fig. 7.5 : Analisi dell'errore a transitorio esaurito prodotto da una perturbazione del guadagno di retroazione.

Poiché:

$$\frac{\mu_r}{\mu_r + \delta\mu_r} = 1 - \frac{\delta\mu_r}{\mu_r + \delta\mu_r}$$

possiamo porre:

$$\tilde{\delta}_r(t) := - \frac{\delta\mu_r}{\mu_r + \delta\mu_r} c^\circ(t)$$

e riconoscere che la situazione creata dalla “perturbazione” $\delta\mu_r$ può essere in definitiva descritta dallo schema a blocchi di Fig.7.6, da confrontarsi con quello, valido in assenza di disturbi parametrici, di Fig.7.4.

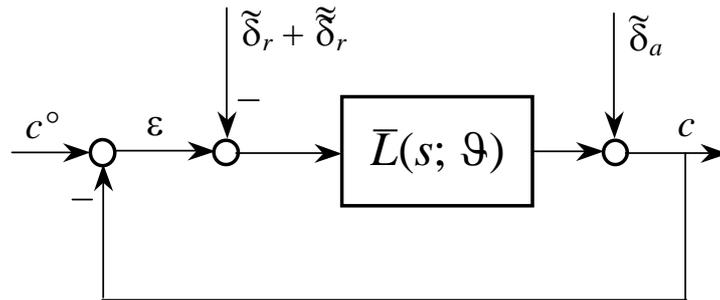


Fig. 7.6 : Schema a blocchi per il calcolo dell’errore a transitorio esaurito in presenza di un disturbo parametrico sulla linea di retroazione.

La Fig.7.6 mette bene in evidenza come il mutato valore di μ_r non solo modifichi (attraverso un mutato valore di μ) il contributo all’errore a transitorio esaurito dovuto ai diversi ingressi (c° , $\tilde{\delta}_a$ e $\tilde{\delta}_r$) secondo le tabelle trovate al punto precedente, ma produca, per così dire, un disturbo ulteriore $\tilde{\delta}_r$ sulla linea di retroazione che, come ormai sappiamo, non può essere contrastato con un progetto oculato del controllore. Questo disturbo addizionale $\tilde{\delta}_r$ è proporzionale a c° ed è tanto maggiore, in valore assoluto, quanto maggiore è la variazione relativa (percentuale) di μ_r .