

Capitolo 5  
*Problemi e sistemi di controllo*

## 1. Problemi di controllo: due esempi

In questo capitolo, verranno indicati e discussi i lineamenti generali di un problema di controllo in quanto tale; spogliato, cioè, di ogni specifico contesto applicativo. Verranno così introdotti i concetti di base e il lessico che li riguarda.

L'esposizione che segue, volendo adattarsi all'intera ed enormemente varia molteplicità delle applicazioni possibili, deve collocarsi ad un livello necessariamente astratto, tanto sul piano oggettivo quanto, e a volte maggiormente, nella percezione di per la prima volta incontra questo scenario. Appare dunque utile esaminare preliminarmente e da vicino un paio di casi particolari. A esempi più creativi e fantasiosi, forse più stimolanti sul piano della fantasia e dell'elaborazione intellettuale, ma anche potenzialmente un po' mistificanti ed intrinsecamente inadatti ad illustrare i lineamenti essenziali della normalità, sono stati preferiti due esempi classici, scelti fra quelli riguardanti fenomeni fisici non troppo complessi e relativamente familiari.

### 1.1 Regolazione del livello in un serbatoio cilindrico

Si consideri il serbatoio cilindrico schematicamente rappresentato in Fig.1.1. Siano:

$w_1$ ,  $w_2$  le portate in massa d'ingresso e d'uscita del liquido che alimenta il serbatoio;

$A$  la superficie del pelo libero;

$h$  il livello del liquido nel serbatoio.

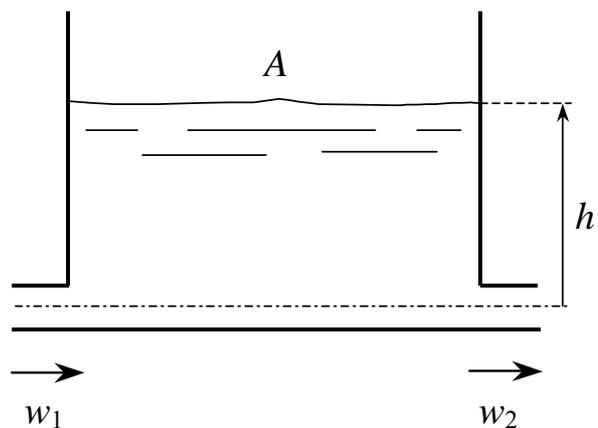


Fig. 1.1 : Serbatoio cilindrico.

La portata  $w_2$  varia in funzione delle esigenze espresse dall'utenza, mentre la portata  $w_1$  può essere utilizzata per far sì che il livello  $h$  non si scosti troppo da un valore desiderato  $h^\circ$ . Ciò allo scopo di evitare non solo eventi estremi come lo svuotamento o la tracimazione del serbatoio, ma anche variazioni eccessive della pressione di fondo, che è pari a  $\rho g h$ , dove con  $\rho$  si è indicata la densità del liquido e con  $g$  l'accelerazione di gravità.

In condizioni di normale funzionamento, il legame fra le portate d'ingresso e d'uscita e il livello nel serbatoio è descritto da un'equazione di bilancio di massa: la velocità di crescita (la derivata rispetto al tempo) della massa liquida nel serbatoio (densità del liquido per volume occupato) è in ogni istante uguale alla differenza fra le portate, in massa, d'ingresso e d'uscita. Formalmente:

$$\frac{d}{dt}(\rho A h(t)) = w_1(t) - w_2(t)$$

ovvero (Fig. 1.2):

$$\dot{h}(t) = \frac{1}{\rho A} (w_1(t) - w_2(t)) .$$

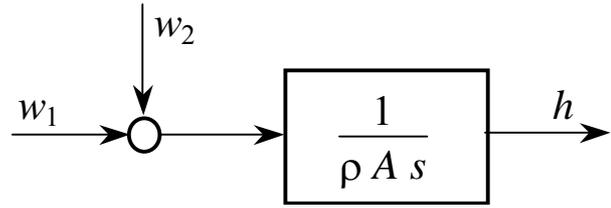


Fig. 1.2 : Schema a blocchi del serbatoio.

A titolo di esercizio, verifichi il lettore che, nel caso di serbatoio tronco-conico a sezione circolare (Fig. 1.3), l'equazione di bilancio della massa liquida nel serbatoio può essere scritta nella forma:

$$\dot{h}(t) = \frac{1}{\rho \pi (R + h(t) \cotg \alpha)^2} (w_1(t) - w_2(t)) .$$

Si perviene, cioè, a un sistema  $S$  non lineare. Il modello lineare  $\delta S$ , tangente a  $S$  in uno stato di equilibrio  $\bar{h}$  corrispondente agli ingressi costanti  $w_1(t) = w_2(t) = \bar{w}$  è ancora dato da:

$$\delta \dot{h}(t) = \frac{1}{\rho \bar{A}} (\delta w_1(t) - \delta w_2(t)) ,$$

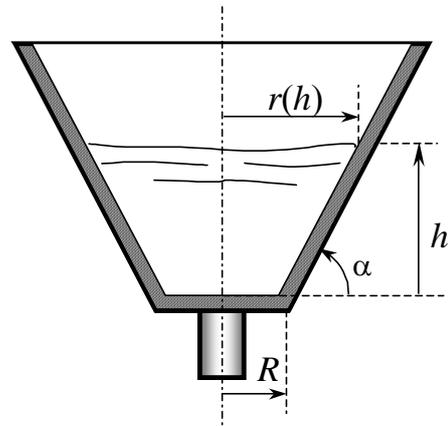


Fig. 1.3 : Serbatoio tronco-conico.

dove  $\bar{A} := \pi (R + \bar{h} \cotg \alpha)^2$  è la superficie del pelo libero quando  $h(t) = \bar{h}$ . Si noti infatti che  $r(h) := R + h \cotg \alpha$  è il raggio del pelo libero e  $V(h) := (r^2(h) + r(h)R + R^2) h \pi/3$  è il volume del tronco di cono occupato dal liquido.

La variabile del sistema sotto controllo il cui valore non deve scostarsi troppo da un assegnato valore desiderato, in questo caso il livello  $h$ , è detta *variabile controllata*; mentre la variabile, indicata con  $h^\circ$ , che rappresenta il *valore desiderato* della variabile controllata è anche detta *variabile di riferimento*. La variabile utilizzata per fare in modo che, in tutte le prevedibili condizioni di esercizio, cioè per tutti i valori o gli andamenti ammissibili della variabile di riferimento e delle *variabili indipendenti incerte* del sistema sotto controllo, la variabile controllata non si scosti troppo dal suo valore desiderato è detta *variabile manipolata*. Nel caso in esame,  $w_1$  è la variabile manipolata, mentre  $w_2$  è una variabile indipendente incerta del sistema sotto controllo. Di  $w_2$  possiamo supporre di conoscere l'insieme degli andamenti possibili; ad esempio, tutti gli andamenti regolari con  $w_2(t)$  compreso, per ogni  $t$ , fra due estremi noti non negativi:  $w_{2min}$  e  $w_{2max}$ .

Per poter agire sulla variabile manipolata  $w_1$  in modo efficace, secondo le esigenze imposte dall'obiettivo di risolvere il problema di controllo appena formulato, dobbiamo inserire una *valvola* sulla condotta di alimentazione del serbatoio. Ad evitare ovvie incompatibilità, l'impianto di alimentazione dovrà poi essere tale che, con la valvola completamente aperta, il valore della portata  $w_1$  risulti in ogni caso maggiore di  $w_{2max}$ .

Nel nostro caso, supponiamo che il sistema di alimentazione sia costituito da una condotta a sviluppo orizzontale (quota d'ingresso uguale a quella d'uscita) di lunghezza  $L$  e diametro interno  $D$ , a sua volta alimentata a pressione costante. Si suppone, cioè, che la pressione d'ingresso  $p_0$  della condotta sia indipendente dalla portata  $w_1$ ; come accade, ad esempio, quando la condotta stessa fa capo ad un grande serbatoio nel quale il livello  $h_0$  può ritenersi costante, e comunque sostanzialmente indipendente dalla portata uscente  $w_1$  (Fig.1.4).

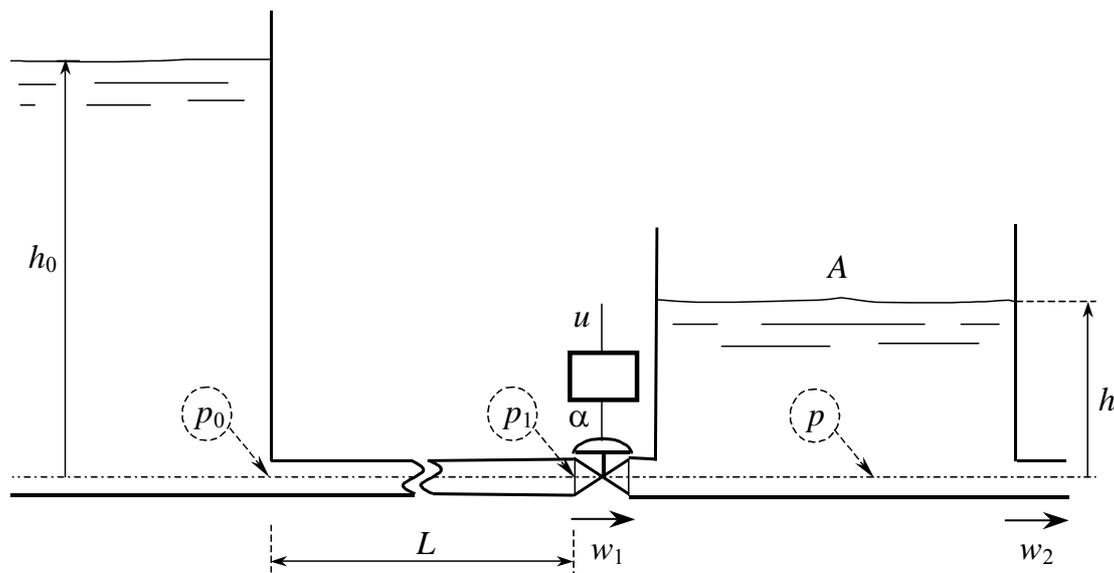


Fig. 1.4 : Serbatoio sotto controllo e sistema di alimentazione.

Con  $\alpha \in [0, 1]$  s'è indicato il *grado di apertura* della valvola ( $\alpha = 0$  : valvola chiusa;  $\alpha = 1$  : valvola completamente aperta), direttamente connesso alla posizione (lineare o angolare) dello stelo, a sua volta comandata, attraverso un azionamento opportuno, dalla variabile  $u$  (tensione, corrente, pressione o altro), alla quale possiamo pensare associata una potenza trascurabile. La valvola e il sistema di azionamento che la correda costituiscono, in questo caso, la cosiddetta *catena di attuazione* o, più semplicemente, l'*attuatore*. La variabile  $u$  è detta *variabile di controllo*. La funzione primaria dell'attuatore è quella di asservire l'andamento della variabile manipolata a quello della variabile di

controllo, associando a quest'ultima tutta la potenza necessaria a renderne l'azione efficace sul sistema sotto controllo.

Per quanto riguarda il funzionamento dell'attuatore di Fig.1.4, si può ritenere  $\alpha(t) = k_m u(t)$ , mentre il legame istantaneo fra la portata  $w_1$  e la caduta di pressione  $\Delta p = p_1 - p$  a carico della valvola è descritto dalla relazione:

$$w_1(t) = k_v \sigma(\alpha(t)) \sqrt{\Delta p(t)}$$

dove la funzione  $\sigma(\cdot)$  è una caratteristica costruttiva della valvola:

$$\sigma(\alpha) = \begin{cases} \alpha & , \text{ valvola } \textit{lineare} \\ \frac{e^{h\alpha} - 1}{e^h - 1} & , \text{ valvola } \textit{esponenziale} . \end{cases}$$

Più precisamente e tenendo conto della notazione e delle convenzioni di segno adottate, sarà:

$$w_1(t) = k_v \sigma(\alpha(t)) \sqrt{|p_1(t) - p(t)|} \text{sign}(p_1(t) - p(t)) .$$

Solo se, come accade in molti casi, il flusso è unidirezionale; cioè solo se si può ritenere  $p_1(t) \geq p(t)$ , per ogni  $t$ , l'equazione della valvola si semplifica in

$$w_1(t) = k_v \sigma(\alpha(t)) \sqrt{p_1(t) - p(t)} .$$

La pressione  $p$  sul fondo del serbatoio è legata al livello  $h$  dalla relazione:

$$p(t) = \rho g h(t) .$$

Se, grazie all'azione del controllore, si avrà  $h(t) \cong h^\circ$ , si potrà supporre con buona approssimazione che la pressione di fondo sia costante:  $p(t) \cong p^\circ := \rho g h^\circ$ .

Quanto al fluido presente nella condotta, possiamo innanzitutto osservare che, se indichiamo con  $S_c := D^2 \pi/4$  la superficie di ogni sezione normale al "cilindro di fluido" presente in condotta,  $\rho L S_c$  è la massa complessiva e  $w_1/(S_c \rho)$  la velocità (media) del fluido in condotta. Allora, sempre nell'ipotesi di flusso unidirezionale, possiamo scrivere la "legge di Newton" nel modo seguente (massa per accelerazione uguale a sommatoria delle forze):

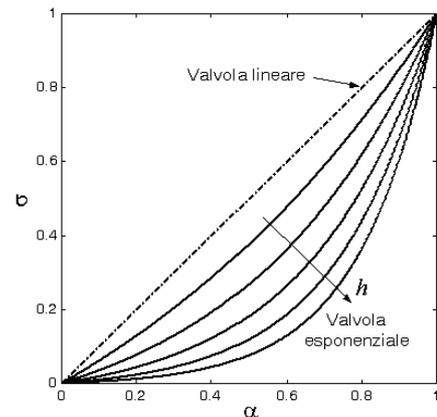


Fig. 1.5 : La funzione  $\sigma(\cdot)$ .

$$\rho L S_c \frac{\dot{w}_1(t)}{S_c \rho} = (p_0 - p_1(t)) S_c - \chi L \left[ \frac{w_1(t)}{S_c \rho} \right]^2 ,$$

dove l'ultimo termine rappresenta la forza di attrito esercitata dalla condotta sul fluido; essa può ritenersi proporzionale, attraverso un "coefficiente d'attrito"  $\chi$ , alla lunghezza della condotta e al quadrato della velocità (media) del fluido.

E' del tutto intuitivo che, per condotte non troppo grandi e relativamente poco estese, il tempo di risposta della condotta, il tempo cioè necessario affinché la portata  $w_1$  si assesti sul valore dettato dall'apertura della valvola, risulti molto piccolo a fronte di quello del serbatoio sotto controllo, a fronte cioè del tempo necessario affinché il sistema di controllo "assorba", ad esempio, la perturbazione del livello  $h$  prodotta da una brusca variazione della portata d'uscita  $w_2$ . Se così è, l'analisi può essere sensibilmente semplificata supponendo che la condotta funzioni in condizioni di sostanziale equilibrio:

$$(p_0 - p_1(t)) S_c - \chi L \left[ \frac{w_1(t)}{S_c \rho} \right]^2 = 0 .$$

Ma è ovvio che  $p_0 - p_1(t) = p_0 - p^\circ + p^\circ - p_1(t)$ ; quindi, dall'equazione della valvola, supponendo  $p(t) \cong p^\circ$ , si ottiene:

$$p_0 - p_1(t) = p_0 - p^\circ - \left[ \frac{w_1(t)}{k_v \sigma(\alpha(t))} \right]^2 .$$

Sostituendo, si ha:

$$p_0 - p^\circ - \left[ \frac{w_1(t)}{k_v \sigma(\alpha(t))} \right]^2 = \frac{\chi L}{S_c} \left[ \frac{w_1(t)}{S_c \rho} \right]^2$$

da cui:

$$p_0 - p(t) = \left[ \frac{1}{k_v^2 \sigma^2(\alpha(t))} + \frac{\chi L}{S_c^3 \rho^2} \right] w_1^2(t) \quad ;$$

$$w_1^2(t) = \frac{k_v^2 \sigma^2(\alpha(t))}{1 + \beta \sigma^2(\alpha(t))} (p_0 - p(t)) \quad , \quad \beta := \frac{\chi L k_v^2}{S_c^3 \rho^2} \quad ;$$

$$w_1(t) = k_v \tilde{\sigma}(\alpha(t)) \sqrt{p_0 - p(t)} \quad , \quad \tilde{\sigma}(\alpha) := \frac{\sigma(\alpha)}{\sqrt{1 + \beta \sigma^2(\alpha)}} .$$

Questo risultato è di facile ed interessante interpretazione. Se la condotta non ci fosse ( $L = 0$ ,  $p_1(t) = p_0$ ), il comportamento della valvola sarebbe descritto dall'equazione:

$$w_1(t) = k_v \sigma(\alpha(t)) \sqrt{p_0 - p(t)} \quad ;$$

quindi la presenza della condotta (in condizioni di equilibrio) produce semplicemente una modifica da  $\sigma(\cdot)$  a  $\tilde{\sigma}(\cdot)$  della funzione caratteristica della valvola.

In Fig.1.6 è mostrato, per  $\beta=0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$ , l'andamento di  $\tilde{\sigma}(\cdot)$ , sia nel caso di valvola lineare (Fig.1.6-a) che in quello (Fig.1.6-b) di valvola esponenziale opportunamente adattata ( $h = \beta$ ).

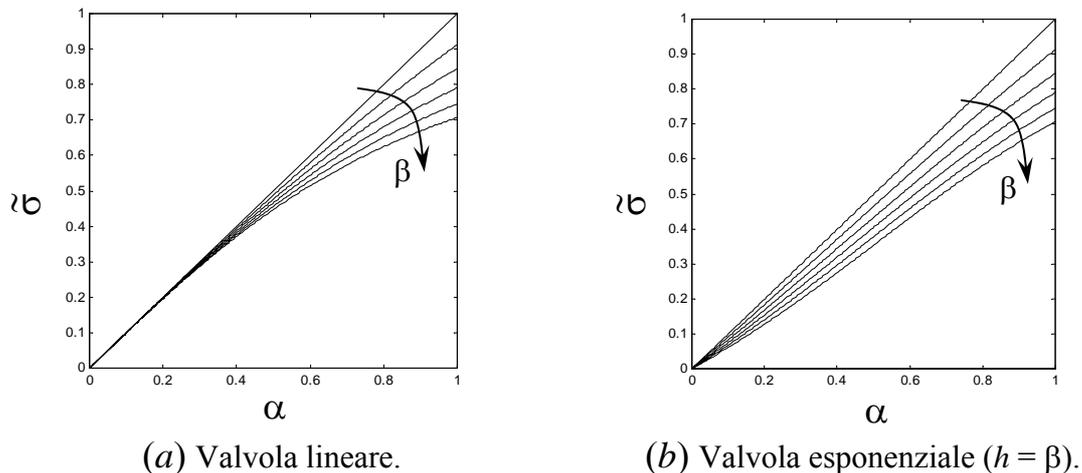


Fig. 1.6 : La funzione  $\tilde{\sigma}(\cdot)$ .

Come si può notare, nel caso di valvola esponenziale (ben adattata), il comportamento del sistema di adduzione (valvola + condotta) risulta *più lineare* di quello che, con un paradosso soltanto apparente, si otterrebbe adottando una valvola lineare. Per questa ragione le valvole esponenziali trovano ampio impiego nei sistemi di automazione.

Un tipico schema di controllo del livello nel serbatoio è mostrato in Fig.1.7, dove, coerentemente con la cosiddetta impostazione classica del problema, viene eseguita e trasmessa in tempo reale al controllore una misura della variabile controllata. Il controllore, nell'intento di mantenere l'errore entro limiti accettabili, farà primariamente dipendere l'azione di controllo dall'errore misurato, o apparente; vale a dire, dalla differenza fra il valore desiderato e il

valore effettivo della variabile ricevuta dal controllore come misura della variabile controllata.

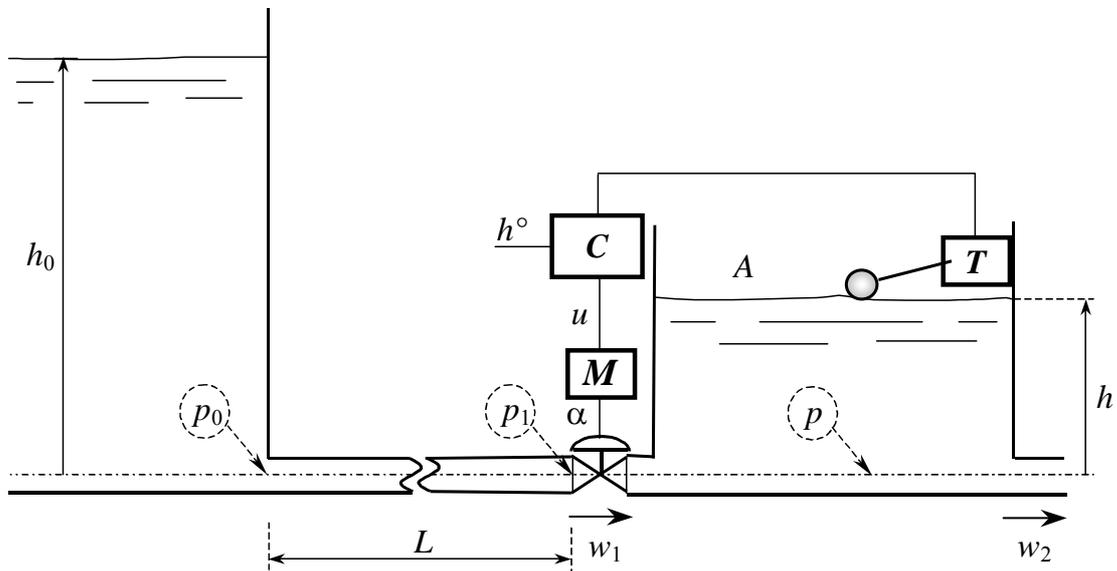


Fig. 1.7 : Il sistema di controllo del livello nel serbatoio.

Concludiamo osservando che per consentire il controllo automatico del livello nel serbatoio è stato necessario dotare il sistema sotto controllo di un'opportuna *strumentazione*, relativa alla duplice interazione che il controllore ha con l'impianto. Sul versante dell'azione di controllo, è in generale necessario disporre un *attuatore* o, più in generale, una catena di attuazione capace di rendere efficace sul sistema sotto controllo l'azione decisa dal controllore. Nel nostro esempio, l'attuatore è costituito dalla valvola e dal motore che ne aziona lo stelo. Sul versante dell'acquisizione, cioè della raccolta e della trasmissione, di informazioni rilevanti ai fini del controllo, è necessario disporre di un *trasduttore* per ognuna delle variabili del sistema sotto controllo il cui valore è effettivamente utilizzato dal controllore. Nel nostro esempio, si è fatto ricorso a un trasduttore di livello. Anche il trasduttore (di portata, di posizione, di forza, di livello, di temperatura ecc.) è in generale costituito da una catena di trasduzione, tipicamente composta da un *sensore*, capace di fornire un segnale legato in modo noto all'intensità della variabile da misurare e trasmettere, da alcuni eventuali *organi di condizionamento* del segnale rilevato dal sensore (filtri, amplificatori, convertitori, ecc.), capaci di preparare il segnale stesso ad essere trasmesso con sicurezza al controllore, e infine da un organo o *canale di trasmissione*, che collega con l'organo di controllo il punto dell'impianto in cui viene eseguita la misura.

## 1.2 *Controllo della velocità di rotazione di un albero azionato da un motore a corrente continua*

Si consideri il sistema schematicamente (simbolicamente) rappresentato in Fig.1.8 e costituito da un motore a corrente continua, un riduttore e un carico sul quale si esercita una coppia resistente esterna  $c_{rc}$ .

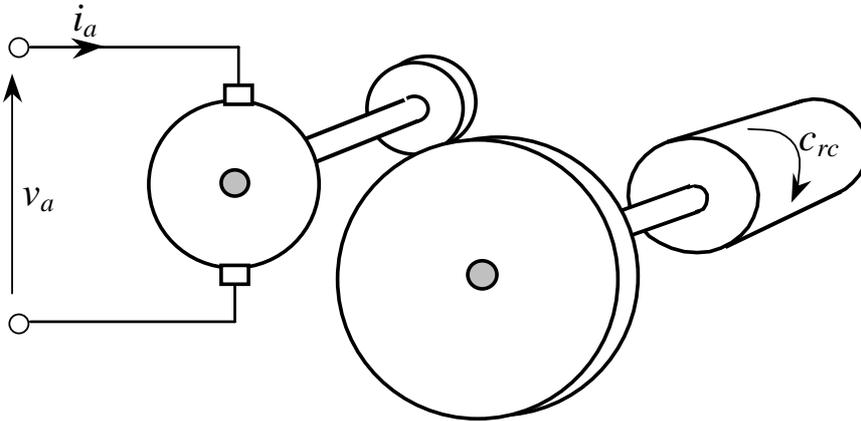


Fig. 1.8 : Sistema elettromeccanico.

Più precisamente, la denominazione delle variabili, le convenzioni di segno e le relazioni che governano le interazioni elettromeccaniche sono indicate in Fig.1.9.

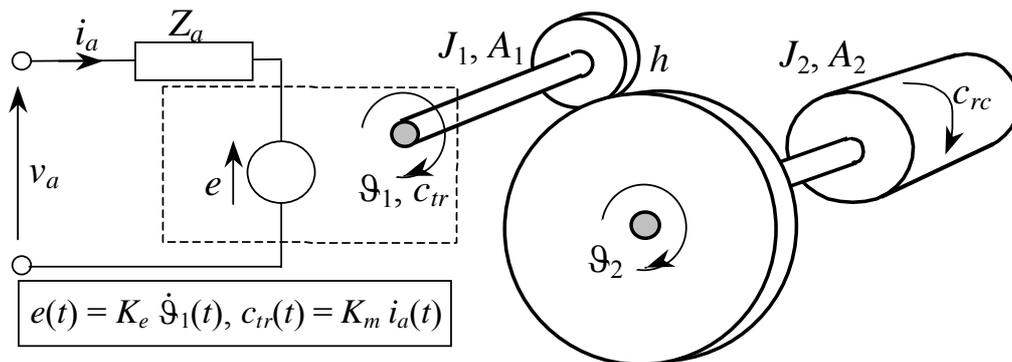


Fig. 1.9 : Denominazioni delle variabili e convenzioni di segno.

Indichiamo con  $v_a$  la tensione d'armatura e con  $i_a$  la corrente d'armatura del motore, con  $Z_a(s) = R_a + s L_a$  l'impedenza del circuito d'armatura, con  $V_e$  la tensione di eccitazione che supponiamo costante (e con  $I_e$  la conseguente corrente costante d'eccitazione), con  $\vartheta_k$ ,  $k = 1, 2$ , la posizione angolare dell'albero motore e, rispettivamente, dell'albero di carico, con  $J_k$  e  $A_k$  il

momento d'inerzia e il coefficiente d'attrito (supposto di tipo viscoso) dell'albero  $k$  (in condizione di isolamento), con  $h$  (minore di 1, nel caso di un riduttore) il rapporto di trasmissione dell'ingranaggio (che supponiamo ideale e quindi, nel caso mostrato in figura,  $\delta\vartheta_2 = -h \delta\vartheta_1$ ), con  $c_{tr}$  la coppia trasmessa all'albero motore e infine con  $c_{rc}$  la coppia resistente esterna applicata all'albero di carico.

Attribuendo all'impedenza il suo significato operatoriale (interpretando cioè  $s$  come operatore derivata), si ha ("legge di Ohm" in regime comunque vario):

$$v_a(t) = e(t) + Z_a(s) i_a(t) = e(t) + (R_a + s L_a) i_a(t)$$

$$L_a \dot{i}_a(t) = v_a(t) - e(t) - R_a i_a(t) .$$

Supponendo che entrambi gli alberi siano perfettamente rigidi, il riduttore sia ideale e le posizioni angolari nulle siano coerenti ( $\vartheta_2(t) = -h \vartheta_1(t)$ ), è conveniente riportare sul primo albero le coppie che agiscono sul secondo, garantendo ovviamente l'equivalenza dal punto di vista energetico; garantendo, cioè, che la potenza associata ad ogni singola coppia, attiva sull'albero di carico, risulti uguale a quella associata alla coppia equivalente, attiva sull'albero motore. Indicando con  $c_{rm}$  la coppia resistente riportata all'albero motore, dovrà essere:

$$c_{rm}(t) \dot{\vartheta}_1(t) = c_{rc}(t) \dot{\vartheta}_2(t)$$

ma, con le convenzioni di segno indicate in figura,  $\dot{\vartheta}_2(t) = -h \dot{\vartheta}_1(t)$ ; quindi:

$$c_{rm}(t) = -h c_{rc}(t) .$$

Per quanto riguarda la coppia di attrito, indichiamo con  $A_{1c}$  il coefficiente di attrito viscoso relativo all'albero di carico, ma riportato all'albero motore; allora, dovrà essere:

$$[-A_{1c} \dot{\vartheta}_1(t)] \dot{\vartheta}_1(t) = [-A_2 \dot{\vartheta}_2(t)] \dot{\vartheta}_2(t) ;$$

poiché  $\dot{\vartheta}_2(t) = -h \dot{\vartheta}_1(t)$ , sarà :

$$A_{1c} = h^2 A_2 .$$

Analogamente, imponendo l'uguaglianza delle potenze associate alle coppie d'inerzia e indicando con  $J_{1c}$  il momento d'inerzia dell'albero di carico riportato all'albero motore, dovrà essere:

$$[-J_{1c} \ddot{\vartheta}_1(t)] \dot{\vartheta}_1(t) = [-J_2 \ddot{\vartheta}_2(t)] \dot{\vartheta}_2(t)$$

ma  $\dot{\vartheta}_2(t) = -h \dot{\vartheta}_1(t)$  e ovviamente  $\ddot{\vartheta}_2(t) = -h \ddot{\vartheta}_1(t)$  ; quindi,

$$J_{1c} = h^2 J_2 .$$

In definitiva, pur di tenere adeguatamente conto anche del carico, possiamo considerare il solo albero motore. In particolare, si dovrà tener conto (oltre che della coppia trasmessa  $c_{tr}$ ) della coppia resistente  $c_{rm}$  e si dovranno maggiorare opportunamente il coefficiente di attrito (viscoso)  $A = A_1 + h^2 A_2$  e il momento d'inerzia  $J = J_1 + h^2 J_2$ . Abbiamo fin qui supposto che il riduttore fosse ideale; non fosse, cioè, caratterizzato da fenomeni dissipativi rilevanti. Se, però, in prima approssimazione, si può ancora ritenere che la potenza  $P_{rid}$  dissipata per attrito nel riduttore sia proporzionale al quadrato della velocità di rotazione (attrito viscoso):

$$P_{rid}(t) = A_{rid} \dot{\vartheta}_1^2(t) ,$$

allora si può facilmente tener conto di tale dissipazione aumentando ulteriormente della quantità  $A_{rid}$  il coefficiente d'attrito attribuito all'albero motore:  $A = A_1 + A_{rid} + h^2 A_2$ .

Con queste premesse (si noti che dell'inerzia del riduttore abbiamo già tenuto conto considerando la prima ruota parte integrante dell'albero motore e la seconda ruota parte integrante dell'albero di carico), il comportamento dinamico della parte "meccanica" del sistema (albero motore + riduttore + carico) può essere descritta dall'equazione:

$$J \ddot{\vartheta}_1(t) + A \dot{\vartheta}_1(t) = c_{tr}(t) + c_{rm}(t)$$

dove :

$$J = J_1 + h^2 J_2 ,$$

$$A = A_1 + A_{rid} + h^2 A_2 ,$$

$$c_{tr}(t) = K_m i_a(t) ,$$

$$c_{rm}(t) = -h c_{rc}(t) .$$

Si noti che quest'ultima è un'equazione differenziale del second'ordine *solo se* siamo interessati a descrivere come la posizione angolare  $\vartheta_1$  (e, di conseguenza, anche la  $\vartheta_2$ ) dipende dalle variabili d'ingresso. Nel nostro caso, però, vale a dire nel caso dell'esempio che stiamo trattando, siamo interessati alle velocità non alle posizioni angolari (controllo di velocità); possiamo quindi guardare all'ultima equazione come a un'equazione differenziale del prim'ordine nell'incognita  $\dot{\vartheta}_1$ .

Per completare l'analisi, osserviamo che, nel nostro problema, la tensione d'armatura del motore ha precisamente il ruolo di "variabile manipolata"; di

variabile, cioè, utilizzata per controllare la velocità  $\dot{\vartheta}_2$  dell'albero di carico, alla quale tuttavia dev'essere necessariamente associata una potenza considerevole. Infatti, tutta la potenza meccanica esercitata dal motore sul carico (oltre a buona parte di quella dissipata dal motore stesso) proviene dal circuito d'armatura. Ciò significa che la tensione d'armatura  $v_a$  non potrà essere la variabile d'uscita del controllore, il quale, avendo come compito primario quello di elaborare segnali, sarà in generale strutturato in modo da associare potenze trascurabili alle variabili in gioco. La variabile d'uscita del controllore, alla quale abbiamo già dato il nome di "variabile di controllo" e che indicheremo di solito con la lettera  $u$ , può benissimo essere ancora una tensione elettrica; ad essa, però, sarà generalmente associata una potenza trascurabile. Per far sì che la variabile di controllo  $u$  comandi efficacemente la variabile manipolata  $v_a$ , dovremo interporre fra il controllore e il motore un amplificatore di potenza che associ in ogni momento a  $v_a$  tutta la potenza necessaria. L'amplificatore svolge dunque, in questo caso, il ruolo di "attuatore"; il ruolo, cioè, di rendere efficace sul sistema sotto controllo l'azione decisa dal controllore. Poiché il tempo di risposta dell'amplificatore è generalmente molto breve rispetto a quello del vero e proprio sistema sotto controllo (motore + riduttore + carico), è plausibile ritenere che il suo comportamento possa essere adeguatamente descritto da un modello non dinamico:

$$v_a(t) = f_A(u(t)) ,$$

dove la funzione  $f_A(\cdot)$  ha tipicamente l'andamento mostrato in Fig.1.10.

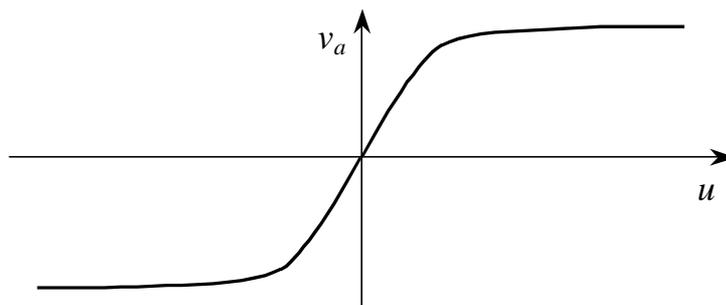


Fig. 1.10 : La funzione  $f_A(\cdot)$ .

Per valori (assoluti) non troppo elevati della variabile  $u$ , tali cioè da non provocare la saturazione dell'amplificatore, è evidente che si può ritenere:

$$v_a(t) = K_A u(t) .$$

D'altra parte, per esercitare un controllo efficace della velocità di rotazione dell'albero di carico, sarà conveniente misurare e trasmettere al controllore in

tempo reale il valore corrente della variabile controllata; nel nostro caso, di  $\dot{\vartheta}_2$ . Per questo, occorrerà montare sull'albero di carico (o, equivalentemente, su un albero ad esso rigidamente collegato) un dispositivo capace di fornire in uscita un segnale compatibile con la tecnologia del controllore e legato in modo noto alla variabile controllata. Ad esempio, una dinamo tachimetrica potrebbe fornire una tensione  $y$  proporzionale alla velocità di rotazione dell'albero e quindi (con riferimento alla convenzione di segno adottata) tale che:

$$y(t) = -K_T \dot{\vartheta}_2(t) .$$

Possiamo ora riassumere le considerazioni svolte ponendo:  $x_1 := i_a$  e  $x_2 := \dot{\vartheta}_1$ , sicché, ricordando che  $\dot{\vartheta}_2(t) = -h \dot{\vartheta}_1(t)$  e che la forza controelettromotrice è legata alla velocità di rotazione dell'albero motore dalla relazione:

$$e(t) = K_e \dot{\vartheta}_1(t) ,$$

l'equazione del circuito d'armatura e quella della parte meccanica possono essere riscritte nel modo seguente:

$$P : \begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\frac{R_a}{L_a} x_1(t) - \frac{K_e}{L_a} x_2(t) + \frac{K_A}{L_a} u(t) \\ \dot{x}_2(t) = \frac{K_m}{J} x_1(t) - \frac{A}{J} x_2(t) - \frac{h}{J} c_{rc}(t) \\ y(t) = K_T h x_2(t) \end{cases}$$

ovvero:

$$P : \begin{cases} \dot{x}(t) = \mathbf{A} x(t) + \mathbf{b}_1 u(t) + \mathbf{b}_2 c_{rc}(t) \\ y(t) = \mathbf{c} x(t) \end{cases}$$

con:  $x := [x_1 \quad x_2]'$ ,

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} -\frac{L_a}{R_a} & -\frac{K_e}{R_a} \\ \frac{K_m}{J} & -\frac{A}{J} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 := \begin{bmatrix} \frac{K_A}{L_a} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{h}{J} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c} := [ 0 \quad K_T h ]$$

Una descrizione del tutto equivalente, ma particolarmente espressiva per la sua aderenza alla struttura delle interconnessioni fra i fenomeni fisici presi in

considerazione, è rappresentata da un semplice schema a blocchi, che può essere ricavato nel modo seguente. Trasformiamo secondo Laplace (avendo posto al solito e per comodità a zero le condizioni iniziali) la prima equazione di stato, ottenendo con semplici elaborazioni algebriche:

$$X_1(s) = G_a(s) [K_A U(s) - K_e X_2(s)]$$

dove:

$$G_a(s) := \frac{\mu_a}{1 + s T_a} \quad ; \quad \mu_a := \frac{1}{R_a} \quad , \quad T_a := \frac{L_a}{R_a} .$$

Analogamente, dalla seconda equazione ricaviamo:

$$X_2(s) = G_m(s) [K_m X_1(s) - h C_{rc}(s)]$$

dove:

$$G_m(s) := \frac{\mu_m}{1 + s T_m} \quad ; \quad \mu_m := \frac{1}{A} \quad , \quad T_m := \frac{J}{A} ;$$

$$J = J_1 + h^2 J_2 \quad , \quad A = A_1 + A_{rid} + h^2 A_2 .$$

Lo schema a blocchi complessivo del sistema sotto controllo può dunque essere strutturato nel modo illustrato in Fig.1.11.

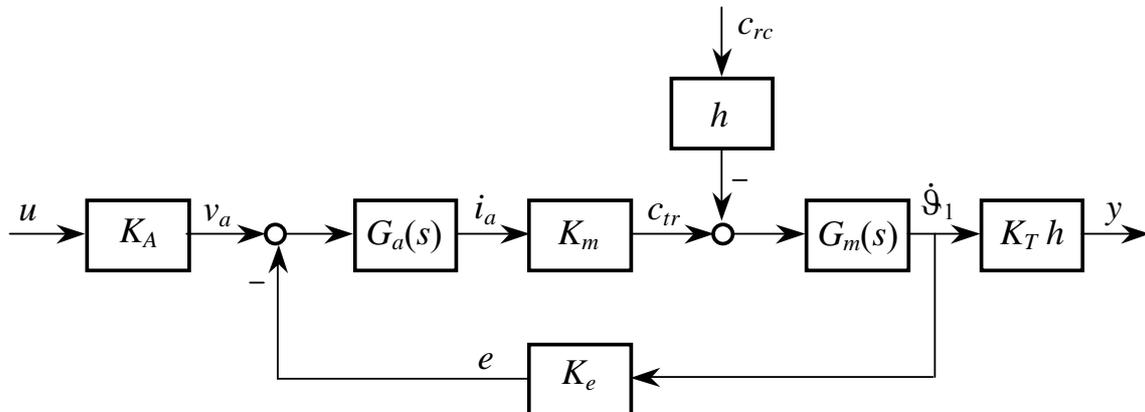


Fig. 1.11 : Il sistema  $P$  sotto controllo (strumentazione inclusa).

Un tipico sistema di controllo della velocità di rotazione dell'albero di carico è invece mostrato in Fig.1.12, dove  $C$  rappresenta l'organo di controllo e la variabile  $\dot{\vartheta}_2^\circ$  rappresenta il *valore desiderato* della velocità angolare  $\dot{\vartheta}_2$ .

Il compito del controllore consiste nel far sì che, in tutte le condizioni di funzionamento prevedibili cioè per tutti gli andamenti ammissibili delle variabili incerte, come  $c_{rc}(\cdot)$  ed eventualmente  $\dot{\vartheta}_2^\circ(\cdot)$ , la differenza  $\dot{\vartheta}_2^\circ(t) - \dot{\vartheta}_2(t)$  si

mantenga, in valore assoluto, sufficientemente piccola. Sono dette *incerte* quelle

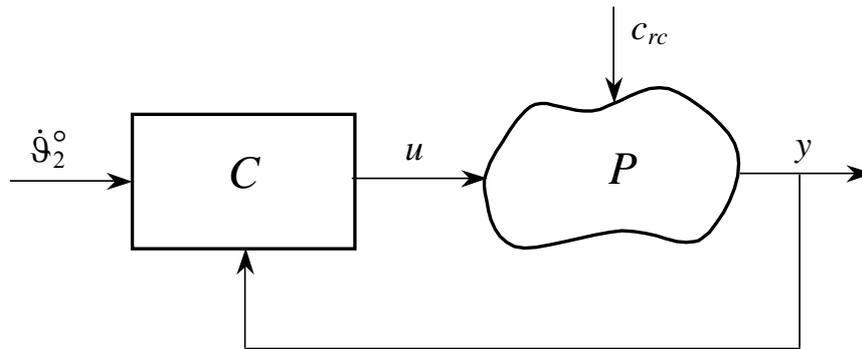


Fig. 1.12 : Il sistema di controllo.

variabili che, avendo più di un valore o di un andamento possibile, non possono ritenersi completamente ed esattamente note a priori. La variabile che esprime il valore desiderato della variabile controllata è anche detta *variabile di riferimento*.

## 2. Problemi di controllo: aspetti a carattere generale

Gli esempi discussi nel paragrafo precedente consentono ora di mettere in evidenza i lineamenti essenziali di qualunque problema di controllo. Lineamenti che è estremamente importante imparare a riconoscere, dietro l'enorme varietà non solo delle applicazioni, cioè nei numerosi e spesso interconnessi ambiti tecnologici (e non) nei quali questi problemi si materializzano, ma anche nella eterogeneità e nella possibile complessità delle formulazioni matematiche (eterogeneità nella formulazione dei modelli, degli obiettivi, dei vincoli, ecc.).

A guardar bene, gli *elementi costitutivi* di un problema di controllo sono essenzialmente due.

### 1. Il comportamento desiderato del sistema sotto controllo

Il modo più tipico di esprimere il comportamento desiderato del sistema sotto controllo consiste nel fornire all'istante  $t$  il *valore desiderato*  $c^\circ(t)$  di una variabile  $c$  del sistema sotto controllo detta per questo *variabile controllata*.

La variabile  $c^\circ$  è anche detta *variabile di riferimento*.

Quando l'andamento desiderato della variabile di riferimento è costante, il problema è detto di *regolazione*. Con terminologia anglosassone, nei problemi di regolazione la variabile di riferimento è anche indicata come "set point". La Fig.2.1 è assolutamente banale; serve tuttavia a sottolineare

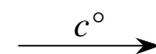


Fig. 2.1 : Riferimento

l'importanza di questo "ingrediente". Se conveniente (lo è solo in casi assai sofisticati), l'andamento passato di  $c^\circ$  può essere ricordato (registrandolo); l'andamento futuro, invece, a volte è noto "a priori", altre volte è incerto; al più è nota, allora, la famiglia degli andamenti possibili.

## 2. *Il sistema, impianto o processo sotto controllo*

In generale si tratta di un oggetto, un settore o un aspetto del mondo reale, per il quale esiste un particolare interesse ad imporre, agendo su variabili utilizzabili a questo scopo, un comportamento opportunamente definito e per lo più diverso da quello che si manifesterebbe spontaneamente.

Nella formulazione più strettamente tecnica del problema, il sistema, impianto o processo sotto controllo sarà descritto da un modello matematico, tipicamente incerto (affetto cioè da variabili incerte, come parametri non noti e ingressi eterodipendenti). Si tratta quasi sempre di un *sistema dinamico*, le cui variabili esterne (eventualmente vettoriali) possono essere convenientemente classificate come indicato in Fig.2.2.

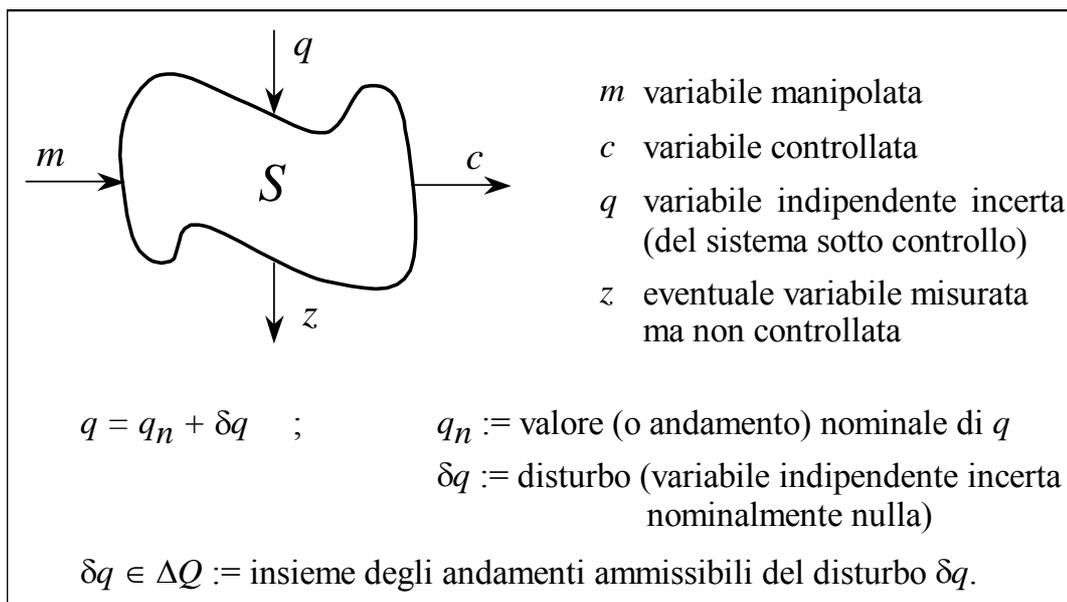


Fig. 2.2 : Sistema, impianto o processo sotto controllo.

Se la variabile controllata  $c$  e quella manipolata  $m$  sono scalari, anche il riferimento  $c^\circ$  è ovviamente scalare e il problema di controllo è detto *monovariabile*; altrimenti, è *multivariabile*. Si noti che, in un problema monovariabile, il numero delle variabili indipendenti incerte agenti sul sistema sotto controllo (cioè il numero di elementi del vettore  $q$ ) può essere arbitrariamente grande.

## Commenti

### 1. *Strumentazione*

Affinché un sistema possa essere effettivamente ed efficacemente controllato è generalmente necessario dotarlo di un insieme di apparati che, nel loro complesso, costituiscono la cosiddetta *strumentazione* del sistema sotto controllo. Si tratta, in genere, di due tipi di apparecchiature dette, rispettivamente, *attuatori* e *trasduttori*.

1.1 Gli *attuatori* sono chiamati a trasferire alle variabili manipolate, fornendo tutta la potenza necessaria, l'andamento di altre variabili dette *variabili di controllo*, alle quali sono quasi sempre associate potenze trascurabili (Fig.2.3). Il carattere principale di una variabile di controllo  $u$  è essenzialmente connesso all'informazione, insita nel suo valore, circa l'intensità dell'azione che la corrispondente variabile manipolata  $m$  deve esercitare sul sistema  $S$  sotto controllo. Tale valore sarà quasi sempre il risultato di una più o meno complessa elaborazione di diversi segnali, ai quali è naturale sia associata una potenza molto piccola, possibilmente trascurabile (in un segnale oggetto o frutto di elaborazione, ciò che primariamente interessa è l'informazione, e quindi l'andamento nel tempo, non la potenza associata). Nell'ampia famiglia delle apparecchiature usate come attuatori si trovano amplificatori di potenza, valvole, motori, azionamenti (elettrici, idraulici, pneumatici), vari convertitori di energia (elettrica, meccanica, chimica), robot e persino (nelle applicazioni civili a prevalente carattere socio-economico, che qui vengono solo marginalmente prese in considerazione) interi reparti, strutture o enti preposti all'attuazione delle decisioni prese dai gruppi dirigenti.

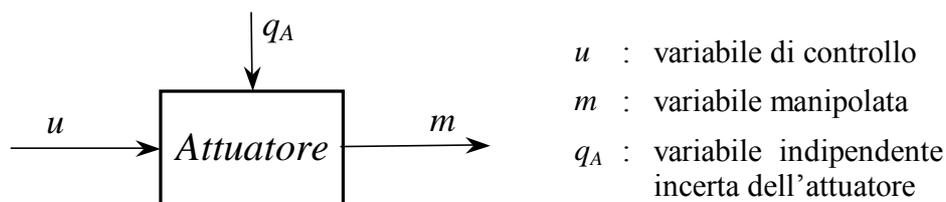


Fig. 2.3 : Attuatore.

A volte, la successione di elementi che costituiscono un attuttore viene anche detta *catena di attuazione*. In ogni attuttore,  $u$  e  $m$  sono, di norma, scalari (se sul sistema sotto controllo  $S$  agiscono diverse variabili manipolate, sarà generalmente necessario provvedere un attuttore per ciascuna di esse), mentre le variabili scalari indipendenti incerte che agiscono su un attuttore possono anche essere numerose; pertanto, la variabile  $q_A$  può avere carattere vettoriale. Si noti, infine, come la progettazione e la realizzazione di un attuttore richieda di per sè, in linea di principio, la soluzione di un particolare problema di controllo.

1-2. I *trasduttori* (o catene di trasduzione) rispondono all'esigenza di *misurare* e *trasmettere* a un destinatario (che può trovarsi a pochi centimetri o a molti chilometri di distanza) il valore corrente di una o più variabili del sistema  $S$  sotto controllo (tipicamente, la variabile controllata). Un trasduttore consta abitualmente di diversi elementi: *sensore*, *organi di condizionamento del segnale*, *trasmettitore* (Fig.2.4).

Il *sensore* ha il compito primario di percepire l'intensità della variabile misurata e di esprimere tale intensità sotto forma di una grandezza fisica (generalmente elettrica, o anche meccanica) passibile di elaborazione. La variabile misurata  $v$  qualifica il trasduttore; si hanno così trasduttori di pressione, portata, livello, temperatura, densità, composizione, umidità, forza, posizione, spessore, velocità, accelerazione, tensione, corrente, potenza, e così via.

Per poter essere trasmesso con relativa sicurezza, il segnale fornito dal sensore dev'essere quasi sempre sottoposto ad un trattamento preliminare, indicato come *condizionamento* del segnale; è tuttavia sconsigliabile l'uso del termine "condizionatore" per indicare l'insieme delle apparecchiature che hanno il compito di porre in atto il condizionamento in questione (i "condizionatori" sono altra cosa!). Tale insieme ha propriamente il compito di migliorare la qualità del segnale, mettendolo in condizioni più favorevoli rispetto ai rischi d'inquinamento ambientale (elevato rapporto segnale/rumore). Le operazioni di condizionamento comportano di solito un'amplificazione del segnale; spesso, un opportuno filtraggio e, a volte, la conversione in una grandezza fisica diversa da quella d'uscita del sensore.

Il segnale, eventualmente condizionato, entra infine in un *trasmettitore* che ha il compito di far pervenire a un destinatario più o meno remoto il valore corrente della variabile misurata, espresso come valore di una grandezza fisica  $w$ , coerente con la natura del destinatario stesso; vale a dire: di una grandezza elettrica, se il destinatario è un'apparecchiatura elettronica, di una pressione gassosa, se è un organo pneumatico, e così via.

Ogni elemento di un trasduttore può essere esposto all'influenza di variabili indipendenti incerte di varia origine, che concorrono a degradarne le prestazioni.

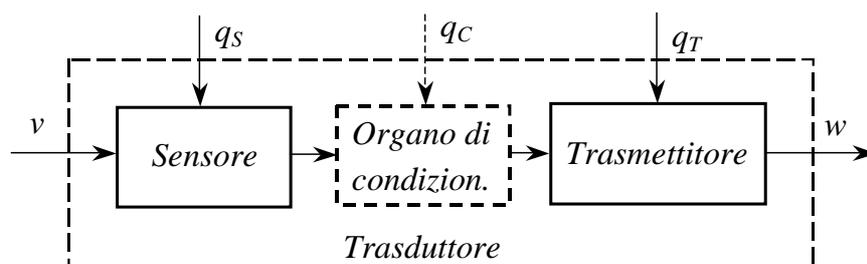


Fig. 2.4 : Struttura tipica di un trasduttore.

Nel seguito di questo capitolo, il sistema, impianto o processo sotto controllo e l'intera strumentazione che lo riguarda verrà rappresentato, per semplicità, con un unico simbolo e indicato con la lettera  $P$  (anche in accordo con la letteratura anglosassone, nella quale per tale sistema si usa convenzionalmente la denominazione di "plant").

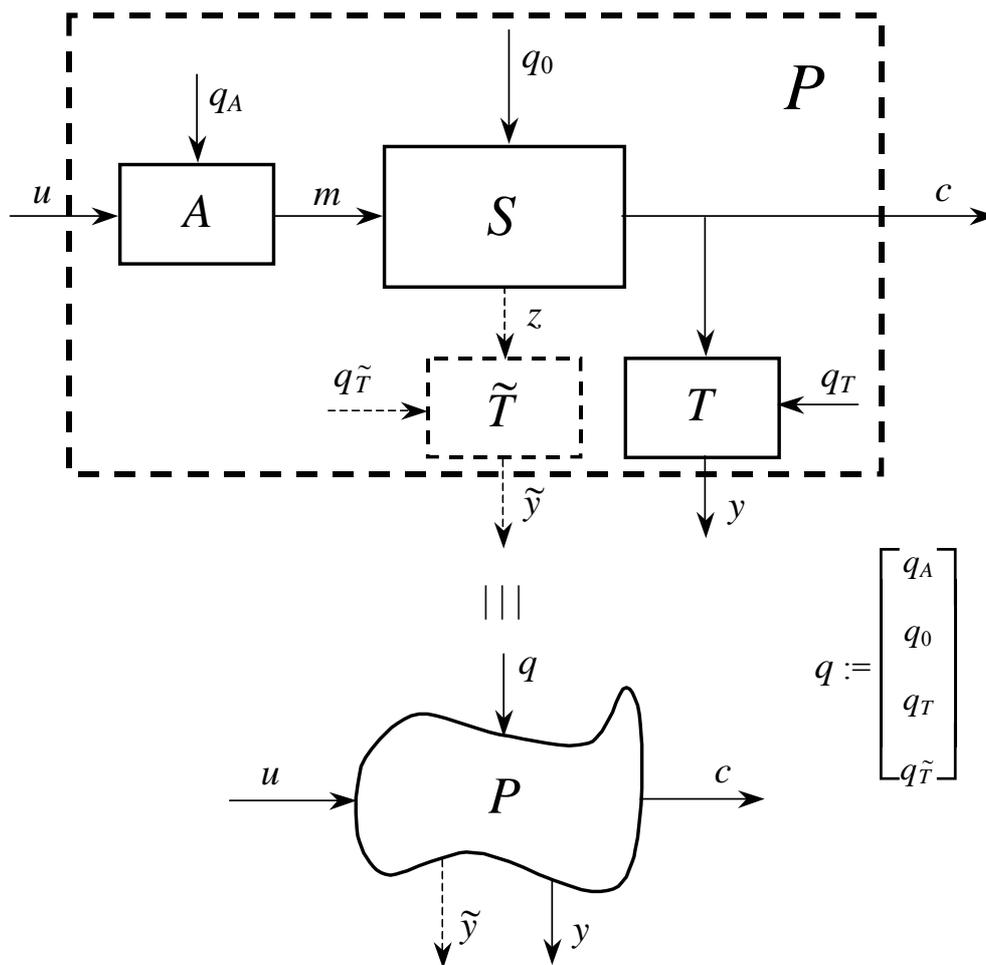


Fig. 2.5 : Il sistema sotto controllo, strumentazione inclusa.

Nella formulazione di un problema di controllo, la descrizione dell'incertezza, la descrizione, cioè, di *ciò che non si sa* è altrettanto importante quanto la descrizione di ciò che si sa. Nella nostra formulazione, il compito di descrivere l'incertezza presente nel sistema sotto controllo è affidato alla variabile  $q$ . Vediamo ora quale ampia varietà di situazioni possa essere inclusa in tale formulazione.

## 2. Forme e rappresentazioni dell'incertezza

Una *variabile reale* è *incerta* se l'insieme dei suoi *valori* possibili è costituito da più di un elemento. Il modo più semplice di descrivere una variabile reale incerta  $v$  consiste nel fornire l'insieme  $V$  dei suoi valori possibili. Ad esempio, con riferimento ad un determinato modello di stufa elettrica, si può ritenere che la resistenza  $R$ , nominalmente di 100 [ $\Omega$ ], sia in realtà una variabile incerta con un valore compreso fra 90 e 110 [ $\Omega$ ]; quindi,

$$R \in \mathcal{R} \quad , \quad \mathcal{R} := [90, 110] .$$

Una descrizione più accurata dell'incertezza su  $R$  potrebbe avere natura probabilistica. Ad esempio,  $R$  potrebbe essere descritta come variabile casuale; potrebbe, cioè, essere specificata una funzione reale  $p$  della variabile  $R$ , dotata delle seguenti proprietà:

$$p(R) \geq 0 \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty} p(R) dR = 1$$

e avente il seguente significato: la probabilità  $p_{12}$  che il valore di  $R$  sia compreso fra  $R_1$  e  $R_2$ , con  $R_1$  e  $R_2$  arbitrari, è data da (Fig.2.6):

$$p_{12} = \int_{R_1}^{R_2} p(R) dR .$$

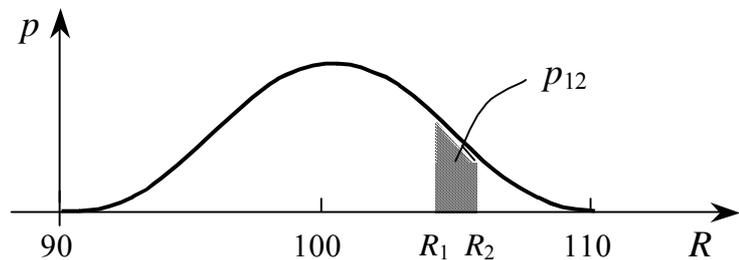


Fig. 2.6 : La resistenza  $R$  descritta come variabile casuale.

La funzione  $p(\cdot)$  è detta densità di probabilità di  $R$ .

Una *funzione reale di variabile reale* è *incerta* se l'insieme dei suoi *andamenti* possibili è costituito da più di un elemento. Le funzioni che primariamente interessano in automatica sono di due tipi: i *segnali*, cioè le funzioni del tempo, e quelle che vengono spesso indicate come *caratteristiche*, cioè le funzioni che si usano per descrivere le relazioni esistenti fra alcune variabili di un sistema.

Anche per le *funzioni* incerte, la descrizione più elementare consiste nello specificare l'insieme degli andamenti possibili. Ricordando, ad esempio, che, per un dato  $\varepsilon > 0$ , la *banda (pratica)* di un segnale  $v(\cdot)$   $f$ -trasformabile è l'insieme dei valori di  $\omega$  in corrispondenza dei quali lo spettro di  $v(\cdot)$  è maggiore di  $\varepsilon$  e che la *pulsazione massima* di un segnale a banda (pratica) limitata è l'estremo superiore di tale banda, notiamo che un modo significativo di

qualificare un segnale incerto potrebbe consistere nello specificare, per un dato  $\varepsilon > 0$ , che si tratta di un segnale a banda (pratica) limitata con pulsazione massima  $\Omega$ :

$$v(\cdot) \in V(\varepsilon, \Omega)$$

$$V(\varepsilon, \Omega) := \{v(\cdot) \text{ } f\text{-trasformabili: } \sup \mathfrak{B}_v \leq \Omega, \mathfrak{B}_v := \{\omega: |V(j\omega)| > \varepsilon\}\}.$$

Analogamente, l'incertezza potrebbe riguardare la caratteristica ingresso-uscita  $f(\cdot)$  di un sistema non dinamico tempo-invariante con ingresso  $u$  ed uscita  $y$ . L'effettiva caratteristica potrebbe essere ignota, pur essendo nota una classe relativamente ristretta di appartenenza. Ad esempio, si potrebbe avere:  $f(\cdot) \in \Phi$ ,

$$\Phi := \{f(\cdot) \text{ continue e crescenti: } (f_2(u) - f(u))(f(u) - f_1(u)) \geq 0, \forall u \in \mathbf{R}\}$$

dove  $f_1$  e  $f_2$  potrebbero avere l'andamento mostrato in Fig.2.7. E' facile riconoscere che  $\Phi$  è l'insieme delle funzioni continue e crescenti il cui grafico è compreso tra quello di  $f_1$  e quello di  $f_2$ .

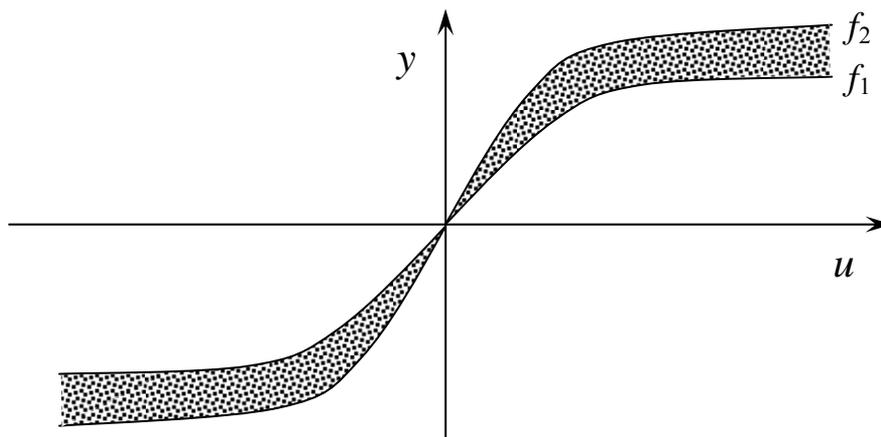


Fig. 2.7 : Una famiglia di funzioni caratteristiche.

Naturalmente, anche nel caso di una funzione è possibile ricorrere ad una descrizione dell'incertezza molto più articolata e complessa. Ci si potrebbe avvalere ad esempio, per le funzioni del tempo, dei concetti e degli strumenti probabilistici offerti dalla teoria dei *processi casuali*; si tratta di una descrizione matematicamente non elementare, capace per altro di caratterizzare con tutta la flessibilità necessaria la plausibilità delle più varie combinazioni di eventi, sia puramente ipotetiche che parzialmente verificate (attesa condizionata).

Quella probabilistica, pur essendo tuttora la più compiuta, non è l'unica forma disponibile per una descrizione articolata, potenzialmente profonda e corrispondentemente sofisticata dell'incertezza. Anche sotto la spinta di una

certa “moda culturale” (alla quale non si sottraggono le discipline scientifiche) la teoria degli *insiemi*, delle *relazioni* e dei *sistemi sfumati* (“fuzzy”, in inglese) è stata oggetto, con ricorrente fortuna, di notevole interesse negli ultimi decenni.

Uniformandoci alla prassi professionale corrente, in questo e nei capitoli che seguono, eviteremo di far ricorso a descrizioni sofisticate dell’incertezza, lasciando questo compito a più specifiche ed approfondite trattazioni. Vogliamo tuttavia sottolineare come l’incertezza sia un ingrediente essenziale di un problema di controllo, anche se relativamente rari sono, com’è naturale, i casi in cui possa risultare necessario, o anche soltanto conveniente, darne una descrizione molto articolata, approfondita e quindi matematicamente complessa. Qui si farà ricorso sistematico solo alla più elementare delle descrizioni possibili: quella che consiste, per ogni oggetto preso in considerazione (variabile o funzione che sia), nel più piccolo insieme di appartenenza conosciuto. Più precisamente, faremo quasi sempre l’ipotesi che, di ogni grandezza incerta  $q$ , sia specificato, e quindi noto, un *valore* o un *andamento* (nel caso di funzioni) presunto, o di base, detto *nominale* e indicato con  $q_n$ . Chiameremo *disturbi*, o più genericamente *perturbazioni*, gli scostamenti di  $q$  dal suo valore o andamento nominale e daremo l’insieme dei valori o degli andamenti possibili dei disturbi come descrizione equivalente dell’insieme dei valori o degli andamenti possibili di  $q$ :

$$q \in Q \quad \Leftrightarrow \quad q = q_n + \delta q \quad , \quad \delta q \in \Delta Q .$$

Sottolineiamo ancora una volta che, in questa rappresentazione,  $q$  può essere tanto una variabile reale, quanto un segnale o una funzione caratteristica.

### **Esempio**

Si consideri il sistema tempo-invariante di Fig.2.8, nel quale compare un elemento non dinamico e non lineare posto in cascata a un elemento dinamico lineare avente funzione di trasferimento  $G(\cdot)$ .

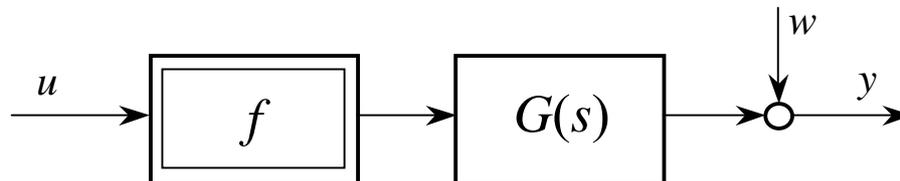


Fig. 2.8 : Sistema affetto da incertezza.

Anche con riferimento ai precedenti esempi di questo paragrafo, si potrebbe avere:

$$w(t) = w_n(t) + \delta w(t)$$

$$w_n(t) = 10 \quad , \quad \delta w(\cdot) \in \Delta W := \{v(\cdot) \in V(\varepsilon, \Omega) : \varepsilon = 10^{-2}, \Omega = 10^4; -2 \leq v(t) \leq 2, \forall t\}$$

Analogamente, per ogni  $u \in [u_{min}, u_{max}]$ , potrebbe essere (Fig.2.9):

$$f(u) = f_n(u) + \delta f(u) \quad , \quad f_n(u) := F \operatorname{arctg}(h u)$$

$$\delta f(\cdot) \in \Delta\Phi := \{\delta f(\cdot) \text{ continue: } |\delta f(u)| \leq k u\}$$

$$F, h, k \text{ costanti note}$$

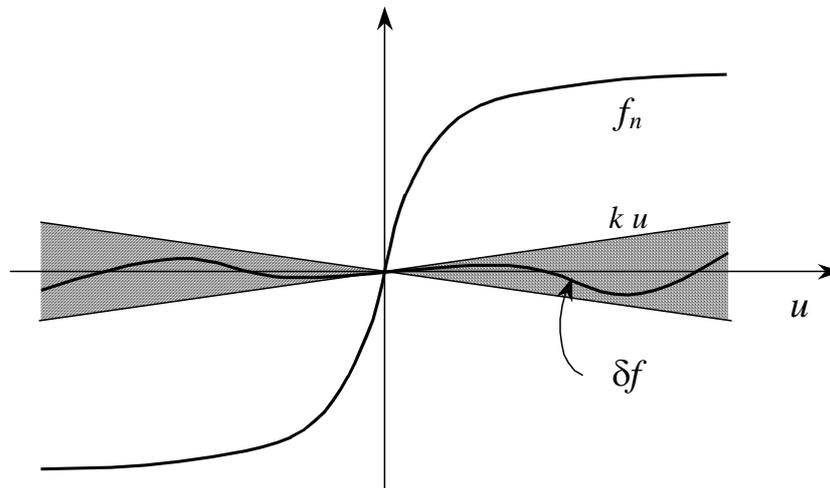


Fig. 2.9 : Una classe di possibili andamenti della funzione caratteristica  $f(\cdot)$ .

Infine, potrebbero essere incerti (non esattamente noti) uno o più parametri della funzione di trasferimento  $G(s)$ ; ad esempio, una costante di tempo:

$$G(s) = \frac{50}{(1 + 4s)(1 + Ts)} \quad , \quad T \in [0.1, 0.5] \quad ; \quad T_n = 0.3 \quad , \quad |\delta T| \leq 0.2 .$$

Se si pone:  $\Delta T := [-0.2, 0.2]$  e inoltre:  $q_1 := w, q_2 := f, q_3 := T; q := [q_1 \ q_2 \ q_3]'$

$$q := q_n + \delta q \quad , \quad q_n := \begin{bmatrix} w_n \\ f_n \\ T_n \end{bmatrix} \quad , \quad \delta q := \begin{bmatrix} \delta w \\ \delta f \\ \delta T \end{bmatrix} \in \Delta Q := \Delta W \times \Delta\Phi \times \Delta T$$

si può rappresentare in questo modo compatto, l'incertezza insita nel sistema.

### 3. Sistemi di controllo

L'elemento che, in ogni istante  $t$ , ha il compito di esprimere, sulla base delle informazioni disponibili, il valore da attribuire alla variabile di controllo  $u$  si chiama *controllore* (o *regolatore*, se il problema è di regolazione). Le

informazioni disponibili sono: il valore desiderato  $c^\circ$  della variabile controllata  $c$  ed, eventualmente (in realtà, quasi sempre), il valore di un certo numero di variabili del sistema sotto controllo (tipicamente, la variabile controllata  $c$ ) misurate e trasmesse al controllore:  $y$  esprime una misura di  $c$  (Fig.3.1).

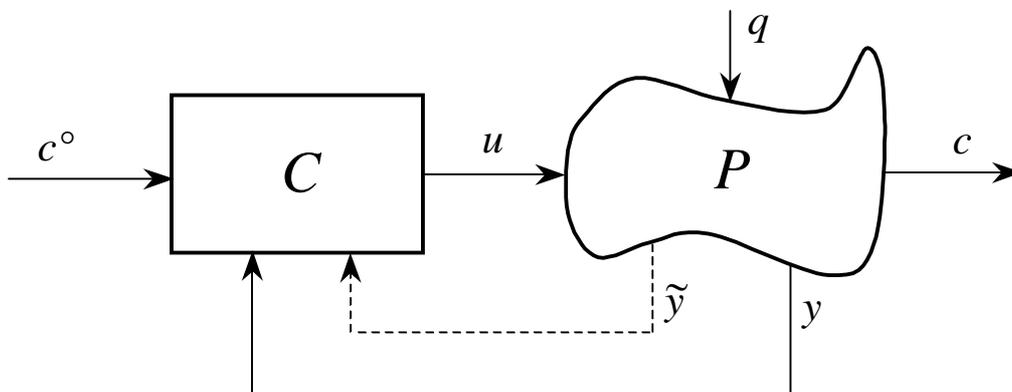


Fig. 3.1 : Sistema di controllo.

Il sistema complessivo, costituito dal controllore e dal sistema sotto controllo, verrà d'ora in avanti indicato come *sistema di controllo*, avvertendo per altro che alcuni preferiscono usare la medesima espressione come sinonimo di controllore.

I sistemi di controllo possono essere ad *azione diretta* (equivalentemente detti *ad anello aperto*; in inglese: “feedforward”) oppure in *retroazione* (o *ad anello chiuso*; in inglese: “feedback”). Il secondo è il caso più frequente.

Un sistema di controllo si dice *ad anello aperto* (o *ad azione diretta*) se nessuna delle variabili effettivamente utilizzate dal controllore per esercitare la sua azione (per determinare, cioè, il valore corrente da attribuire alla variabile di controllo  $u$ ) dipende a sua volta da  $u$ .

Il più tipico e semplice dei sistemi di controllo ad anello aperto è mostrato in Fig.3.2.

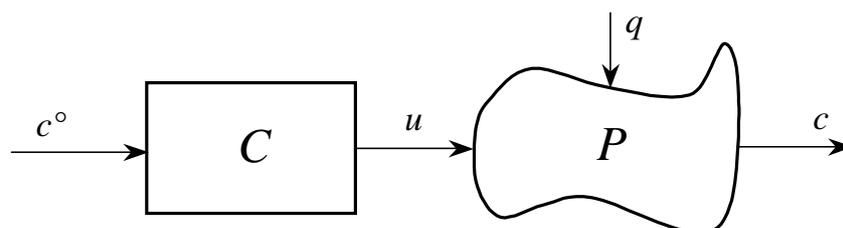


Fig. 3.2 : Un tipico sistema di controllo ad anello aperto.

Altri schemi di controllo ad anello aperto sono mostrati in Fig.3.3. Questi schemi mettono in evidenza come il connotato qualificante di un'azione di controllo ad anello aperto non sia la sua indipendenza da variabili del sistema sotto controllo, bensì l'indipendenza da  $u$  delle variabili dalle quali l'azione di controllo viene fatta dipendere ( $q_a$  e  $z$ , negli esempi di Fig.3.3).

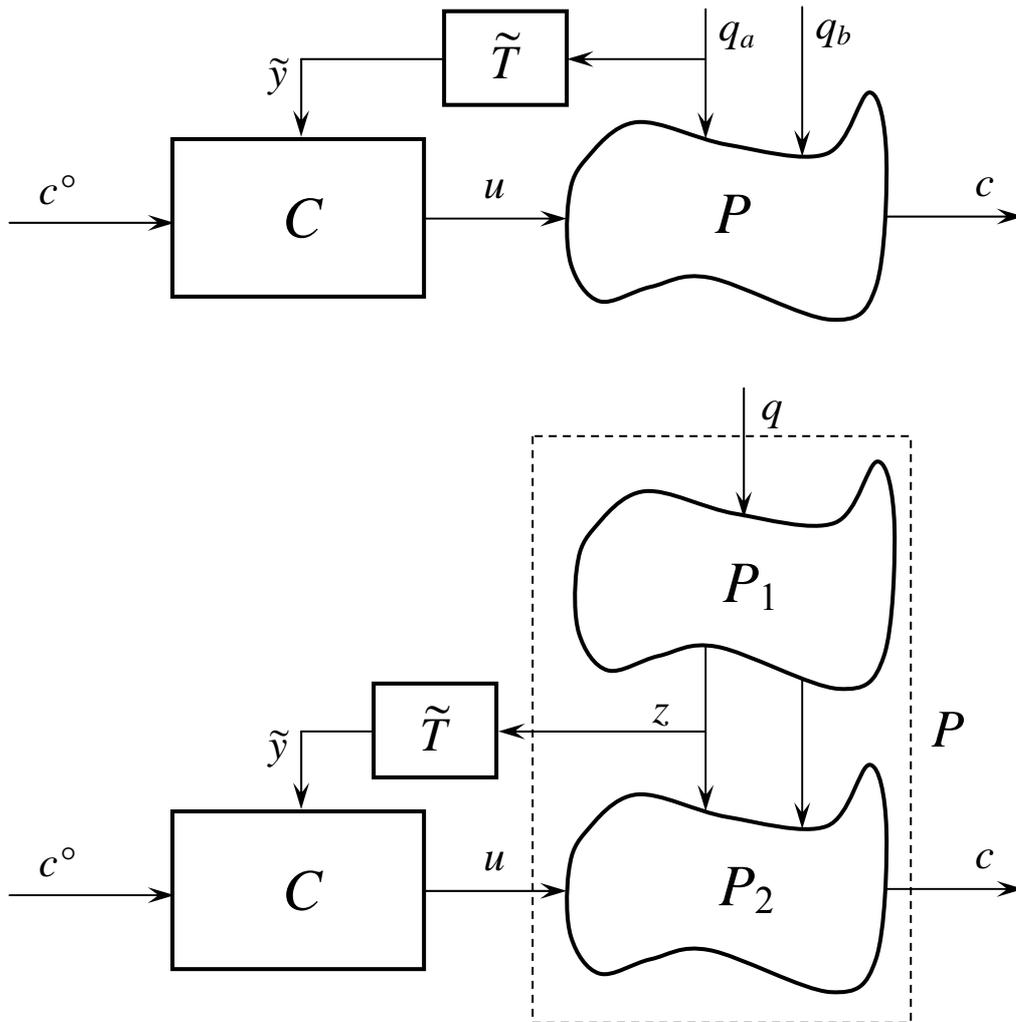
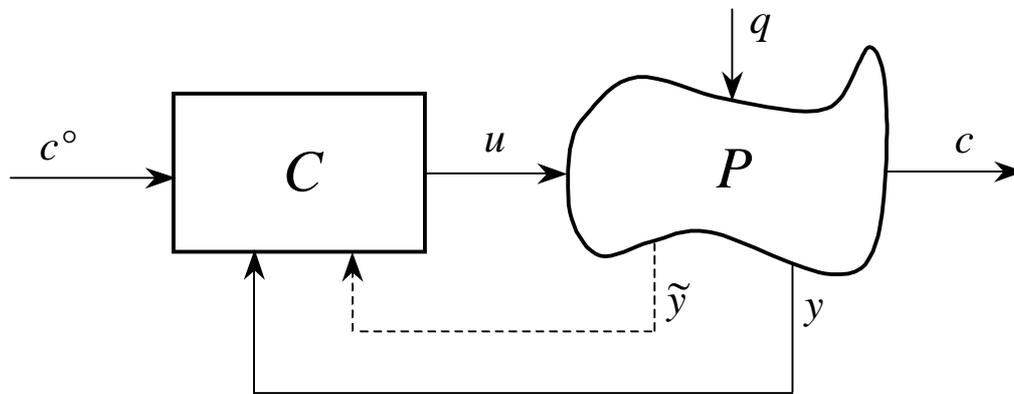


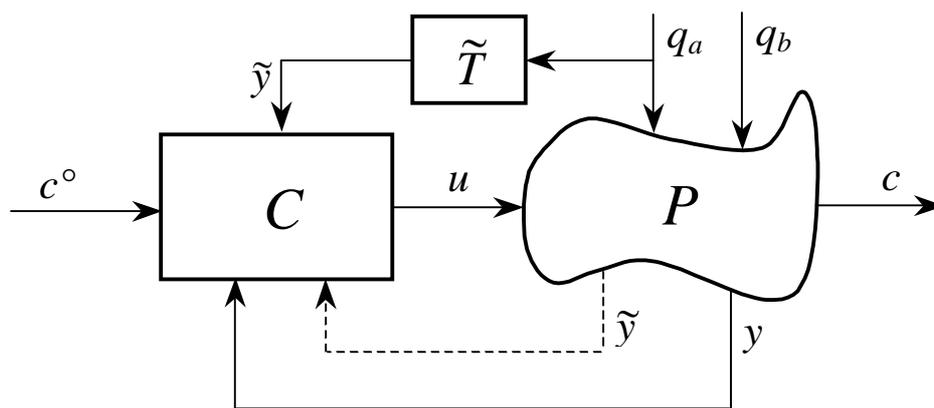
Fig. 3.3 : Sistemi di controllo ad anello aperto.

Un sistema di controllo che non sia ad anello aperto è *ad anello chiuso* (o in *retroazione*). In un sistema di controllo ad anello chiuso, la variabile di controllo  $u$  viene pertanto a dipendere anche da variabili del sistema sotto controllo che, a loro volta, dipendono da  $u$ .

Un tipico sistema di controllo ad anello chiuso è mostrato in Fig.3.4-*a*, mentre in Fig.3.4-*b* è mostrato un esempio di schema ad anello chiuso nel quale alla retroazione si accompagna una parte ad anello aperto.



(a)



(b)

Fig. 3.4 : Schemi di controllo ad anello chiuso.

Una breve riflessione consente di riconoscere che, se il sistema sotto controllo non è affetto da incertezza e in particolare è esattamente e perfettamente nota la relazione esistente fra la variabile di controllo  $u$  e la variabile controllata  $c$ , non c'è alcun interesse a misurare variabili del sistema sotto controllo e a trasmetterne la misura al controllore: questa informazione, infatti, essendo già disponibile è del tutto inutile (ancorché costosa). In assenza d'incertezza sul sistema sotto controllo, non ha molto senso chiedersi se un controllore ad anello chiuso sia in linea di principio da preferirsi ad un controllore ad anello aperto; infatti, le prestazioni offerte dal migliore dei possibili controllori ad anello chiuso saranno del tutto identiche a quelle offerte dal miglior controllore ad anello aperto. Naturalmente le cose cambiano se, come accade quasi sempre, il

comportamento del sistema sotto controllo è solo approssimativamente noto e in particolare il modello che descrive il legame fra la variabile di controllo  $u$  e la variabile controllata  $c$  è appropriatamente affetto da incertezza. In questo caso, l'informazione portata dalle variabili del sistema sotto controllo misurate e trasmesse al controllore può essere assai preziosa: un buon controllore ad anello chiuso è di norma migliore del (e di fatto preferito al) miglior controllore ad anello aperto. Il che non esclude, naturalmente, che le prestazioni di un cattivo controllore ad anello chiuso possano risultare molto peggiori di quelle offerte da un buon controllore ad anello aperto. In conclusione, il *ruolo della retroazione*, se ben impiegata, consiste nel limitare il degrado delle prestazioni dovuto all'incertezza; nel limitare, cioè, il decadimento della qualità del controllo dovuto alle scarse conoscenze sull'effettivo comportamento del sistema da controllare. E' in realtà sorprendente come l'accorta utilizzazione di misure tempestive ed accurate eseguite in tempo reale sul sistema sotto controllo possa consentire, sotto opportune condizioni, di esercitare un controllo di elevata rapidità e precisione su fenomeni e sistemi dall'evoluzione profondamente incerta.

#### **4. Obiettivi, prestazioni, vincoli**

L'obiettivo del controllore, nell'esercizio dell'azione di controllo, è far sì che, in tutte le condizioni di funzionamento ragionevolmente prevedibili, il valore effettivo della variabile controllata non si scosti troppo da quello desiderato; in altre parole, far sì che l'*errore*:

$$\varepsilon(t) := c^\circ(t) - c(t)$$

si mantenga sufficientemente piccolo, qualunque sia, fra quelli ammissibili, il valore o l'andamento delle variabili indipendenti incerte:  $q$  ed eventualmente  $c^\circ$ , (quest'ultima, solo per quanto riguarda l'andamento futuro).

E' tuttavia importante ricordare che, quand'anche si decida, come spesso accade, di misurare e trasmettere al controllore il valore corrente della variabile controllata  $c$ , a quest'ultimo perverrebbe soltanto una misura  $y$ , inevitabilmente affetta da incertezza (errori di misura, imperfetto condizionamento, rumore di trasmissione), di quella variabile. Facendo riferimento al funzionamento ideale del trasduttore (supposto privo di incertezza) e conoscendo il valore di  $c^\circ$ , non è difficile valutare quale sia il corrispondente valore desiderato  $y^\circ$  della variabile  $y$  che esprime una misura di  $c$ . Il sistema che converte il valore desiderato di  $c$  nel valore desiderato di  $y$  è spesso indicato come *generatore del segnale di riferimento*. In ogni caso, il controllore può, tutt'al più, valutare la grandezza:

$$e(t) := y^\circ(t) - y(t)$$

che chiameremo *errore apparente*, palesemente diversa da  $\varepsilon(t)$  che chiameremo invece *errore effettivo*. Si noti che l'aggettivo "apparente" va inteso qui come sinonimo di "visibile" (connotato neutro), non necessariamente con il significato di "ingannevole" (connotato negativo); anche se è chiaro che l'errore "visibile" non può essere che un'immagine imperfetta dell'errore effettivo. E' importante, comunque, tener presente che le prestazioni del sistema di controllo vanno sempre valutate facendo riferimento all'errore effettivo, mentre quello disponibile al controllore può essere solo l'errore apparente. Solamente nel caso (non molto frequente) in cui il trasduttore della variabile controllata sia affetto da incertezza trascurabile la differenza fra i due tipi di errore può ritenersi poco significativa.

L'espressione "in tutte le condizioni operative ragionevolmente prevedibili" merita un commento. Abbiamo già chiarito ch'essa va intesa come "per tutti i valori o gli andamenti ammissibili delle variabili incerte che compaiono nella formulazione del problema". Vedremo come, almeno nei casi più semplici, si possa garantire che le prestazioni del sistema di controllo si mantengano accettabili qualunque sia il valore ammissibile delle *variabili* incerte: *stato iniziale* ( $\rightarrow$  stabilità asintotica dei movimenti) e *parametri* ( $\rightarrow$  robustezza, rispetto ai valori ammissibili dei parametri, degli indici di prestazione, stabilità asintotica inclusa).

Gli andamenti ammissibili delle funzioni del tempo cioè dei *segnali* incerti presenti nella formulazione del problema (siano essi disturbi o l'andamento futuro del riferimento) sono, nella loro molteplicità, più difficili da trattare.

La prassi comune consiste nell'individuare, sulla base dell'esperienza e del buon senso, quelli che appaiono più critici fra gli infiniti andamenti possibili e confidare che, se il sistema di controllo fornisce prestazioni soddisfacenti in queste condizioni "estreme", il suo comportamento sarà plausibilmente accettabile anche in tutte le altre.

Gli andamenti nel tempo comunemente presi come "banchi di prova" per valutare le prestazioni di un sistema di controllo sono i cosiddetti segnali canonici: *scalini* (brusche variazioni del valore del segnale), *rampe* (brusche variazioni della derivata), *parabole* (brusche variazioni dell'accelerazione) o *sinusoidi* (intese a saggiare le risposte periodiche del sistema a ingressi periodici), con una netta prevalenza dei primi .

Si perviene così ad una tecnica particolarmente semplice e tuttavia efficace di *valutazione delle prestazioni* di un sistema di controllo basata sull'esame di un numero limitato di aspetti distinti, ancorché non del tutto indipendenti. Vedremo nel seguito come, con riferimento alla classe particolare ma importante dei sistemi di controllo lineari tempo-invarianti, ad ogni particolare indice di prestazione potrà essere associata una precisa *specificazione di progetto*.

I principali aspetti che connotano le prestazioni di un sistema di controllo sono i seguenti.

- 1) Stabilità (asintotica) dei movimenti, per tutti i valori ammissibili degli eventuali parametri incerti (*stabilità asintotica robusta*).
- 2) Durata e forma dei transitori, parzialmente quantificabili attraverso vari indicatori come il tempo di assestamento, la sovrelongazione e la deviazione massima (Fig.4.1), che devono mantenere valori sufficientemente piccoli in tutte le prevedibili condizioni di funzionamento (*precisione dinamica robusta*).

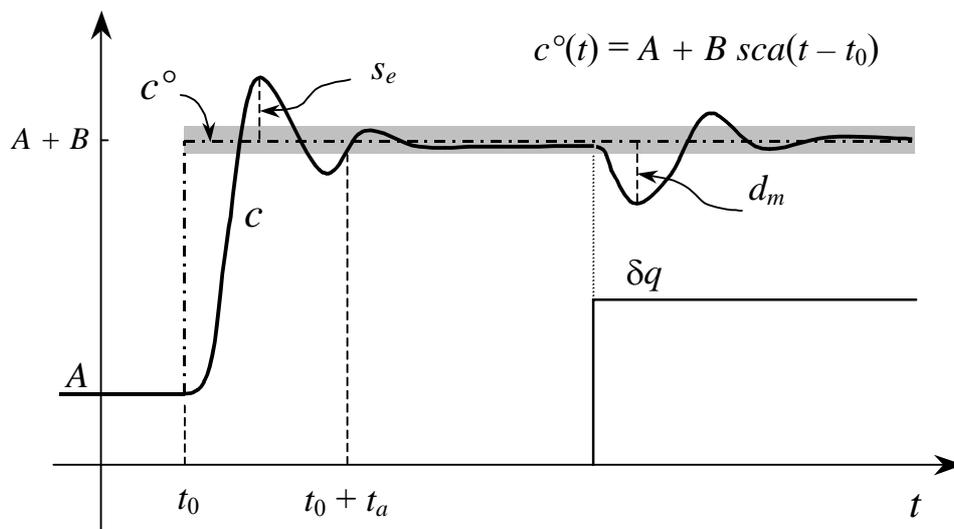


Fig. 4.1 : Risposte a variazioni a scalino del riferimento  $c^\circ$  e del disturbo  $\delta q$ .  
 $s_e$  sovrrelongazione massima (spesso percentuale, rispetto a  $B$ ),  
 $t_a$  tempo di assestamento (all' $h$  per cento, se la fascia di tolleranza è delimitata da  $c^\circ \pm h B/100$ ),  
 $d_m$  deviazione massima.

- 3) Compatibilità dell'errore (effettivo) di controllo a transitorio esaurito, che deve risultare sufficientemente piccolo in tutte le prevedibili condizioni di funzionamento (*precisione statica robusta*).
- 4) *Moderazione nell'intensità dell'azione di controllo*, in risposta ad andamenti delle variabili indipendenti incerte in qualche modo ritenuti estremi (per forma ed intensità) e qualunque sia il valore ammissibile dei parametri incerti.

## 5. Controllori industriali

In molte applicazioni correnti, soprattutto in ambito industriale, ma anche in altri settori, nei quali le esigenze di modularità, fungibilità, facilità d'impiego e di

manutenzione si accompagnano ad esigenze non eccessivamente impegnative sulla qualità del controllo, risulta conveniente il ricorso a controllori standard, caratterizzati da un numero finito e piccolo di parametri. Il progetto di sistemi di controllo basati sull'impiego di controllori standard, o "industriali", si riduce alla *taratura* dei suddetti parametri. Uno dei fattori fondamentali alla base del successo dei controllori industriali standard è la possibilità di sviluppare procedimenti di taratura automatica o semiautomatica capaci di fornire soluzioni adeguate, o comunque accettabili, per un gran numero di applicazioni semplici e sufficientemente consolidate. Le linee guida dei principali procedimenti di taratura verranno illustrate nel prossimo paragrafo.

I controllori standard, o "industriali", si suddividono sostanzialmente in due classi:

- controllori "lineari" di tipo PID
- controllori non lineari a commutazione (o a relé) .

I controllori dell'uno e dell'altro tipo possono differire sostanzialmente per modalità costruttive, tecnologia impiegata (elettronica, pneumatica, meccanica; analogica o digitale) e anche per scelte specifiche delle case costruttrici. Tuttavia, il loro funzionamento, vale a dire il legame funzionale ch'essi impongono fra ingressi e uscita, è invariabilmente riconducibile, almeno in linea di principio, al semplicissimo schema a blocchi di Fig.5.1.

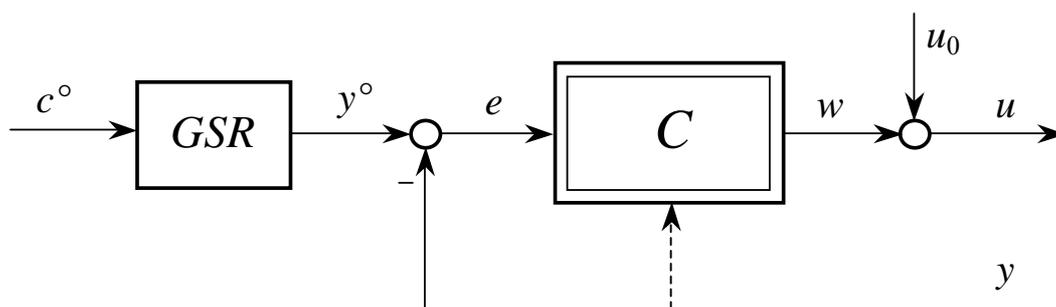


Fig. 5.1 : Schema a blocchi di un controllore industriale.

Con *GSR* si è indicato l'elemento, detto generatore del segnale di riferimento, che converte il valore desiderato della variabile controllata  $c$  nel valore desiderato della variabile  $y$ ; della variabile, cioè, che esprime una misura corrente della variabile controllata  $c$ .

## 6. Controllori di tipo PID

Con riferimento allo schema a blocchi di Fig. 5.1, valido per tutti i controllori standard, un *controllore ideale ad azione proporzionale, integrale e derivativa (PID)* è descritto da:

$$w(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{de}{dt}(t) = K_p \left[ 1 + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de}{dt}(t) \right].$$

I parametri  $K_p$ ,  $K_i$  e  $K_d$  sono detti, rispettivamente, coefficiente dell'azione proporzionale, coefficiente dell'azione integrale e coefficiente dell'azione derivativa. Un parametro utilizzato a volte in alternativa al coefficiente dell'azione proporzionale è la cosiddetta *banda proporzionale*  $B_p$ , definita come l'inverso di  $K_p$  espresso in percentuale:  $B_p := 100/K_p$  [%]. I parametri  $T_i$  e  $T_d$ , più frequentemente usati in alternativa a  $K_i$  e  $K_d$ , sono detti *tempo integrale* e *tempo derivativo*. Il tempo integrale (in inglese, “integral time”) è anche detto tempo di riaggiustamento (in inglese, “reset time”) e coerentemente indicato con  $T_r$ .

Un controllore *PID* ideale è dunque, a rigore, un controllore lineare.

In alcuni casi particolarmente semplici, è possibile ricorrere a controllori lineari standard mancanti di una o più “azioni”. Si parla, in questi casi, di controllori *P*, *PI*, *PD* e così via.

Le osservazioni che seguono consentono di mettere in evidenza differenze non marginali tra il comportamento *ideale* e quello *effettivo* dei controllori *PID*.

### **Osservazione 1.** Causalità

Il legame che un controllore *PID* ideale impone fra l'errore apparente e la variabile di controllo, pur essendo lineare, non corrisponde a un sistema causale, per la presenza di un “derivatore ideale”. Un sistema è causale se il valore dell'uscita ad ogni istante  $t$  è del tutto indipendente dall'andamento dell'ingresso in istanti successivi a  $t$ . E' evidente che tutti i sistemi fisici sono causali. Per questo motivo, i modelli matematici non causali sono anche detti “non fisicamente realizzabili”. Una breve riflessione consente di riconoscere che un derivatore ideale non è causale; quindi, non è “fisicamente realizzabile”. Ciò non significa, naturalmente, che non si possano costruire oggetti fisici il cui comportamento si lasci descrivere, approssimativamente ma anche con tutta l'accuratezza desiderata, da un derivatore ideale (o da un *PID*). Vista la loro diffusione, si può anzi dire che quelli di tipo *PID* siano i controllori più “fisicamente realizzati” al mondo. Il senso di quest'ultima affermazione sarà reso più preciso ed evidente dalle osservazioni che seguono.

**Osservazione 2.** Funzione di trasferimento e risposta in frequenza

Supponendo nulle le condizioni iniziali (irrilevanti nel calcolo della funzione di trasferimento) e applicando la trasformazione di Laplace all'equazione che lega  $w$  all'errore apparente, si ottiene immediatamente:

$$R_{PID}^{\circ}(s) := K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s = K_p \left[ 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right] = \mu \frac{b(s)}{s}$$

$$\mu := K_i = \frac{K_p}{T_i} \quad ; \quad b(s) := \begin{cases} (1 + s T_1)(1 + s T_2) & , \quad K_p \geq 2 \sqrt{K_i K_d} \quad \text{o} \quad T_i \geq 4 T_d \\ 1 + 2 \zeta \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2} & , \quad K_p < 2 \sqrt{K_i K_d} \quad \text{o} \quad T_i < 4 T_d \end{cases}$$

$$T_1 = \frac{T_i}{2} \beta \quad , \quad T_2 = \frac{2 T_d}{\beta} \quad , \quad \beta := 1 + \sqrt{1 - \frac{4 T_d}{T_i}} \quad ; \quad \omega_n := \frac{1}{\sqrt{T_i T_d}} \quad , \quad \zeta := \sqrt{\frac{T_i}{4 T_d}} \quad .$$

A conferma del fatto che il *PID* ideale non è “fisicamente realizzabile”, la funzione di trasferimento  $R_{PID}^{\circ}(s)$ , da  $e$  a  $w$ , ha il grado del numeratore *maggiore* del grado del denominatore. Di conseguenza, il modulo della risposta in frequenza associata a  $R_{PID}^{\circ}(s)$  cresce illimitatamente al tendere di  $\omega$  all'infinito (Fig.6.1).

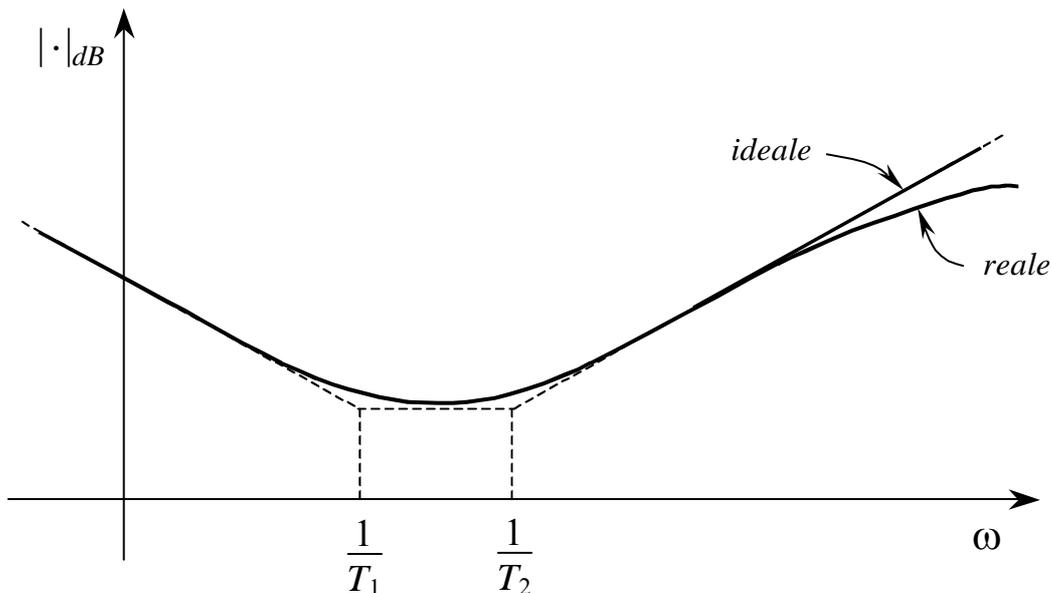


Fig. 6.1 : Risposte in frequenza di un controllore *PID*.

Naturalmente, nei *PID* reali ciò non può accadere. E' inevitabile che una descrizione più accurata del legame esistente fra  $e$  e  $w$  in un controllore reale evidenzia la presenza di piccole (rispetto a  $T_2$ ) costanti di tempo al denominatore, la più grande delle quali è responsabile della deviazione indicata in Fig.6.1. Spesso, queste piccole costanti di tempo al denominatore non sono propriamente ed esclusivamente dovute a fenomeni per così dire "parassiti", accidentalmente presenti nella realizzazione fisica del controllore, ma vengono (almeno in parte) esplicitamente previste e deliberatamente inserite nel progetto del controllore. Si veda, a questo proposito, la successiva Osservazione 4.

Per pulsazioni elevate (di almeno un ordine di grandezza superiori alla pulsazione d'angolo  $1/T_2$ ), lo scostamento della risposta in frequenza reale da quella ideale può dunque diventare assai rilevante. Solo i fondamenti della teoria del controllo (Cap.6) consentiranno di chiarire come mai questa pur sensibile discrepanza non comporti, nella maggior parte dei casi, un'altrettanto sensibile alterazione delle prestazioni offerte dal sistema di controllo.

### **Osservazione 3. Linearità**

A parte i motivi generici di non perfetta corrispondenza fra modelli ideali e comportamenti reali e la comune constatazione che i modelli più accurati di qualunque oggetto fisico tendono prima o poi a perdere il connotato di linearità, esistono ragioni specifiche che molto spesso inducono ad introdurre elementi non lineari nella descrizione del comportamento (in grande) dei controllori *PID*. In altri termini, certe non linearità dei *PID* possono derivare non solo e non tanto dall'esigenza di non trascurare "fenomeni parassiti" potenzialmente rilevanti, quanto piuttosto da precise scelte progettuali.

La ragione principale di questo apparente paradosso (i *PID* sono, fra i controllori industriali, quelli considerati "lineari") risiede nel fatto che un sistema lineare richiede, in linea di principio, che le sue variabili siano illimitate. Ora è del tutto evidente che nei controllori industriali, come in ogni sistema fisico, il valore assunto dalle variabili in gioco sia, in realtà, quasi sempre limitato. Ma c'è di più. Evidenti ragioni di efficienza tecnica, di praticità commerciale e di convenienza economica spingono verso la standardizzazione dei prodotti e a questa regola non si sottraggono i controllori industriali, le cui variabili d'ingresso e d'uscita sono molto spesso assoggettate, per quel che riguarda l'insieme di appartenenza, a ben definiti *standard internazionali* ( $4\div 20$  [mA],  $0.2\div 1$  [kg/cm<sup>2</sup>], ecc.). Ciò consente di collegare agevolmente, nell'ambito di un medesimo sistema, componenti (trasduttori, attuatori e controllori industriali) prodotti da aziende diverse, in diverse parti del mondo.

Diversi costruttori offrono inoltre la possibilità d'inserire deliberatamente, all'ingresso o all'uscita del controllore, *elementi non lineari* (ad esempio il

quadrato o la radice quadrata) atti a compensare opposte non linearità eventualmente presenti in un trasduttore o in un attuatore.

**Osservazione 4.** *Azione derivativa*

Si è già sottolineato (Osservazione 2) come, in linea di principio, un derivatore ideale non sia “fisicamente realizzabile”. D'altronde, ogni brusca variazione dell'errore  $e$ , prodotta ad esempio da una brusca variazione del segnale di riferimento, conferirebbe all'azione derivativa ideale un andamento impulsivo difficilmente compatibile con gli ovvi limiti tecnologici del regolatore.

Esistono vari accorgimenti per evitare un'eccessiva intensità dell'azione di controllo anche solo sporadicamente prodotta dall'azione derivativa (ideale). Uno dei più semplici consiste nel realizzare il derivatore in deliberata connessione con un filtro passa-basso, tipicamente del prim'ordine. In questo modo, la funzione di trasferimento del modulo che esprime l'azione derivativa (uguale a  $K_p s T_d$ , nel caso ideale) diventa:

$$R_D(s) := K_p \frac{s T_d}{1 + s T_d/N} \quad , \quad N = 3 \div 30 .$$

La risposta di un modulo cosiffatto a una variazione a scalino di ampiezza unitaria dell'ingresso (l'errore  $e$ ) presenta un picco iniziale tanto meno accentuato quanto più basso è il valore di  $N$  (Fig.6.2). Solo al tendere di  $N$  all'infinito (derivatore ideale), la risposta tende a un impulso di Dirac. Il modulo derivatore, indicato nel seguito con la lettera  $D$ , è quasi sempre realizzato dai costruttori adottando deliberatamente un accorgimento del tipo appena descritto.

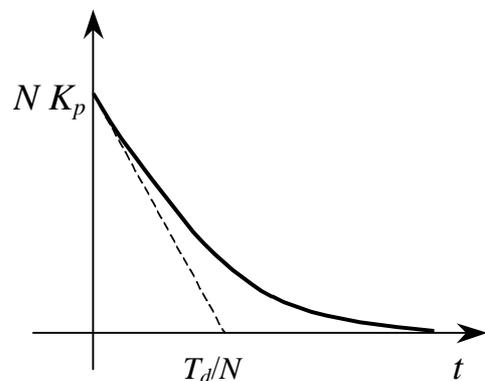


Fig. 6.2 : Risposta a scalino di  $R_D(s)$ .

Se le discontinuità (di prima specie) del segnale  $e$  sono effettivamente ed esclusivamente dovute a “salti” improvvisi nel valore del riferimento, può dimostrarsi efficace un altro accorgimento, non necessariamente alternativo, che consiste nell'escludere (totalmente o parzialmente) il riferimento dall'azione derivativa (Fig.6.3). In questa figura, il modulo  $PI$  è naturalmente caratterizzato dalla funzione di trasferimento:

$$R_{PI}(s) := K_p \left[ 1 + \frac{1}{T_i s} \right] = \mu \frac{1 + s T_i}{s} \quad , \quad \mu := \frac{K_p}{T_i} .$$

E' facile verificare che, nello schema di Fig.6.3-b, l'ingresso del blocco  $D$  è uguale ad  $\alpha y^\circ - y$ . Per  $\alpha=1$  oppure per  $\alpha=0$ , si ritrovano quindi i due possibili

assetto, rispettivamente “a derivazione dell’errore” e “a derivazione dell’uscita”, dello schema di Fig.6.3-a. Attribuendo ad  $\alpha$  un qualunque valore compreso tra 1 e 0 si può ottenere una progressiva esclusione del riferimento dall’azione derivativa (azione derivativa a riferimento pesato).

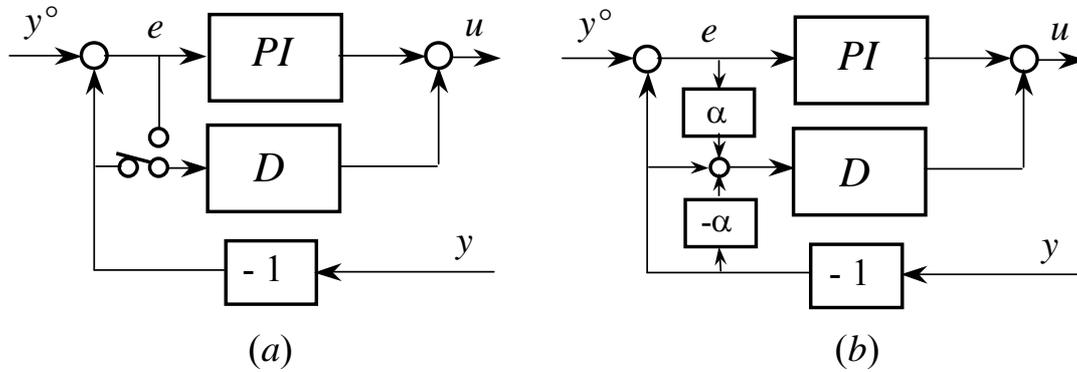


Fig. 6.3 : Schemi con possibile esclusione del riferimento dall’azione derivativa.

Che l’esclusione, anche solo parziale, del riferimento dall’azione derivativa comporti una minor sollecitazione della variabile di controllo, in presenza di brusche e improvvise variazioni del riferimento stesso, è del tutto evidente. Assai meno ovvio è, a prima vista, l’effetto che un cosiffatto provvedimento può produrre, a parità di taratura, sulle prestazioni del controllore (stabilità, precisione statica e dinamica) anche a fronte di disturbi che agiscano sul sistema sotto controllo, strumentazione inclusa. Per questo, è importante notare come, in entrambi gli schemi proposti, non solo il tipo ma anche il guadagno della funzione di trasferimento da  $y^\circ$  a  $u$  e l’intera funzione di trasferimento da  $y$  a  $u$  siano *indipendenti* dalla posizione del commutatore (Fig.6.3-a) o dal valore di  $\alpha$  (Fig.6.3-b). Facendo infatti riferimento allo schema di Fig.6.3-b, che comprende l’altro come caso particolare, notiamo che la funzione di trasferimento da  $y$  a  $u$  è indipendente da  $\alpha$  e precisamente data da:

$$\begin{aligned}
 - [R_{PI}(s) + \alpha R_D(s) + R_D(s) - \alpha R_D(s)] &= - [R_{PI}(s) + R_D(s)] = - K_p \left[ 1 + \frac{1}{T_i s} \right] + \\
 - \frac{K_p s T_d}{1 + s T_d/N} &= - K_p \frac{1 + s (T_i + T_d/N) + s^2 T_i T_d (1 + N)/N}{s T_i (1 + s T_d/N)} := - R_{PID}(s)
 \end{aligned}$$

mentre quella da  $y^\circ$  a  $u$  è data da:

$$\begin{aligned}
 R_{PI}(s) + \alpha R_D(s) &= K_p \left[ 1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{\alpha s T_d}{1 + s T_d/N} \right] = \\
 &= K_p \frac{1 + s (T_i + T_d/N) + s^2 T_i T_d (1 + \alpha N)/N}{s T_i (1 + s T_d/N)} = H^\circ(s; \alpha) R_{PID}(s)
 \end{aligned}$$

dove

$$H^{\circ}(s; \alpha) := \frac{1 + s (T_i + T_d/N) + s^2 T_i T_d (1 + \alpha N)/N}{1 + s (T_i + T_d/N) + s^2 T_i T_d (1 + N)/N}$$

In altre parole, lo schema con azione derivativa a riferimento pesato (Fig.6.3-b), che comprende come casi particolari tanto lo schema a derivazione dell'errore ( $\alpha = 1$ ) quanto quello a derivazione dell'uscita ( $\alpha = 0$ ), è equivalentemente descritto dallo schema a blocchi di Fig.6.4.

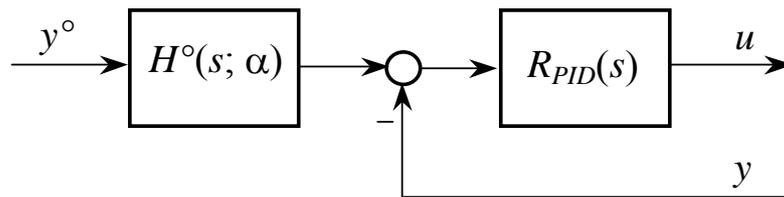


Fig. 6.4 : Rappresentazione equivalente dello schema di Fig.6.3-b.

Escludere il riferimento dall'azione derivativa equivale, quindi, ad inserire un filtro (tipo zero, guadagno unitario) sul segnale di riferimento. In Fig.6.5 è mostrato, per diversi valori di  $\alpha$ , l'andamento della risposta a scalino del filtro, nel caso:  $T_i = 1, T_d = 0.5, N = 10$ .

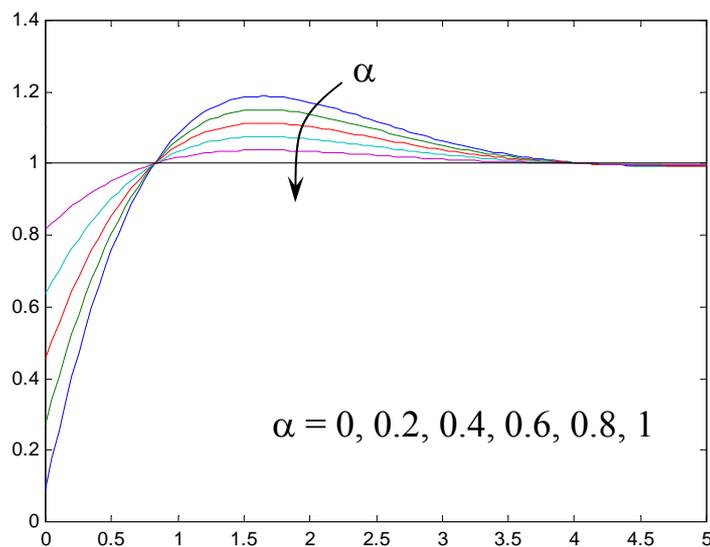


Fig. 6.5 : Risposta a scalino del filtro al variare di  $\alpha$  (per  $\alpha = 1$ , il filtro è assente).

Quest'ultima osservazione consentirà di comprendere (Cap.6) perchè la stabilità e la precisione statica del sistema di controllo nonché la sua precisione dinamica a fronte di *disturbi* del sistema sotto controllo siano invarianti, a parità di

taratura, rispetto al valore di  $\alpha$  in Fig.6.3-*b* (o alla posizione del commutatore di Fig.6.3-*a*). L'esclusione del riferimento dall'azione derivativa può solo produrre un (non drammatico) rallentamento dei transitori prodotti da variazioni del riferimento. E' evidente, per altro, come questo tipo di conseguenza sia trascurabile (rispetto ai benefici effetti sull'intensità dell'azione di controllo) nei problemi di regolazione, e comunque in tutti quei problemi nei quali i tempi di risposta del sistema conseguenti a sporadiche e rare variazioni del riferimento, rivestono un'importanza marginale.

**Osservazione 5.** Azione proporzionale

In alcuni casi, non solo l'intensità ma anche la *rapidità* dell'azione di controllo richiede moderazione. Si pensi, ad esempio, alle conseguenze che, in una centrale idroelettrica, potrebbero derivare da una troppo rapida riduzione della portata d'acqua in uscita dalla condotta forzata (colpo d'ariete). In questi casi, può essere conveniente se non necessario evitare che brusche variazioni del riferimento si ripercuotano, attraverso l'azione proporzionale, sulla variabile di controllo. Ciò può essere ottenuto escludendo in misura parziale o totale il riferimento dall'azione proporzionale. In Fig.6.6 è mostrato, ad esempio, un modulo *PI* con azione proporzionale a riferimento pesato ( $\beta \in [0, 1]$ ).

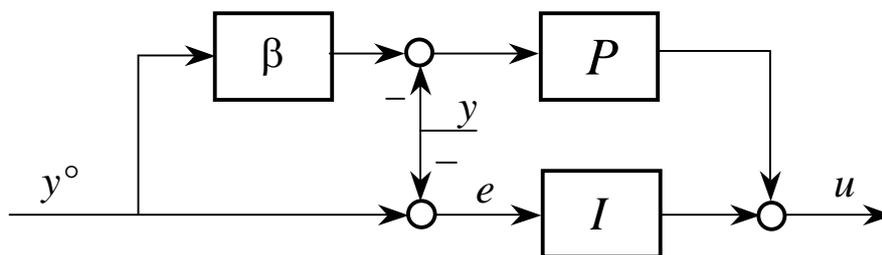


Fig. 6.6 : Modulo *PI* con azione proporzionale a riferimento pesato.

Naturalmente, la funzione di trasferimento dei blocchi *P* e *I* è rispettivamente data da  $K_p$  e da  $K_p/(s T_i)$ . E' immediato riconoscere che la funzione di trasferimento da  $y$  a  $u$  è  $-R_{PI}(s)$  qualunque sia il valore di  $\beta$ , mentre quella da  $y^o$  a  $u$  è data da:

$$\beta K_p + \frac{K_p}{s T_i} = K_p \frac{1 + \beta s T_i}{s T_i} = \tilde{H}^o(s; \beta) R_{PI}(s) \quad , \quad \tilde{H}^o(s; \beta) := \frac{1 + \beta s T_i}{1 + s T_i} .$$

Si può quindi concludere che lo schema di Fig.6.6 è equivalente a quello di Fig.6.7 e pertanto anche l'esclusione del riferimento dall'azione proporzionale equivale ad inserire un filtro (tipo zero, guadagno unitario) sul segnale di riferimento.

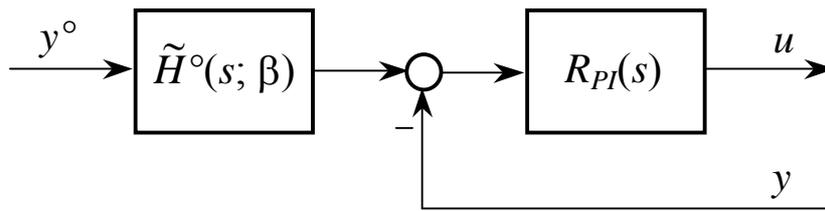


Fig. 6.7 : Rappresentazione equivalente dello schema di Fig.6.6.

In Fig.6.8 è mostrato, per diversi valori di  $\beta$ , l'andamento della risposta a scalino del filtro, nel caso  $T_i = 1$ .

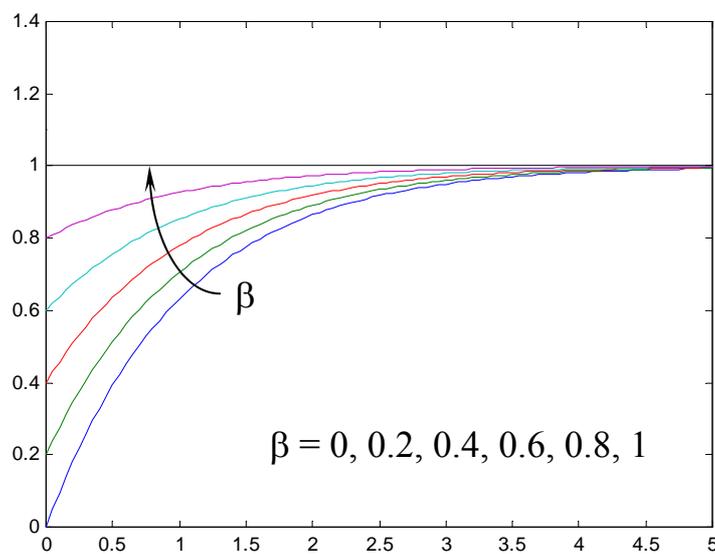


Fig. 6.8 : Risposta a scalino del filtro al variare di  $\beta$  (per  $\beta = 1$ , il filtro è assente).

Valgono pertanto anche per l'azione proporzionale a riferimento pesato tutte le considerazioni già fatte a proposito dell'effetto che può avere sulle prestazioni del sistema di controllo la parziale o totale esclusione del riferimento dall'azione derivativa.

#### **Osservazione 6.** *Carica integrale*

Quando, in cascata a un controllore dotato di azione integrale (*I*, *PI*, *PID*), opera un elemento spontaneamente o volutamente saturante, può manifestarsi nel sistema di controllo un anomalo allungamento dei tempi di risposta dovuto alla cosiddetta *carica integrale* (“integral windup” o “reset windup”).

Il fenomeno della saturazione (Fig.6.9), che è connesso al funzionamento “spontaneo” di molti componenti dei sistemi di controllo, in particolare gli attuatori, dev'essere d'altro canto deliberatamente introdotto nei controllori

industriali prodotti in serie per far sì che la variabile di controllo effettivamente operi entro i limiti imposti dagli standard internazionali:  $u(t) \in [u_m, u_M], \forall t$ .

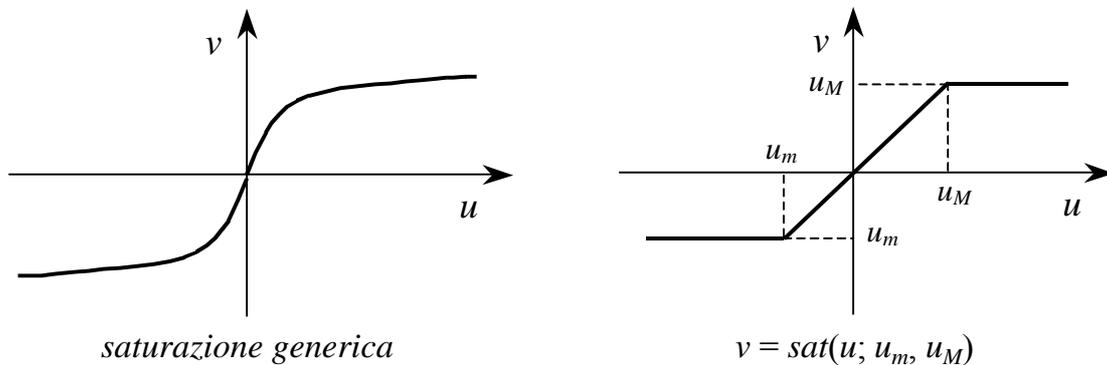


Fig. 6.9 : Saturazione generica e definizione della funzione  $sat(\cdot; u_m, u_M)$

Con riferimento ad un controllore  $PI$ , un modo ingenuo d'imporre i dovuti limiti alla variabile di controllo  $u$  è mostrato in Fig.6.10.

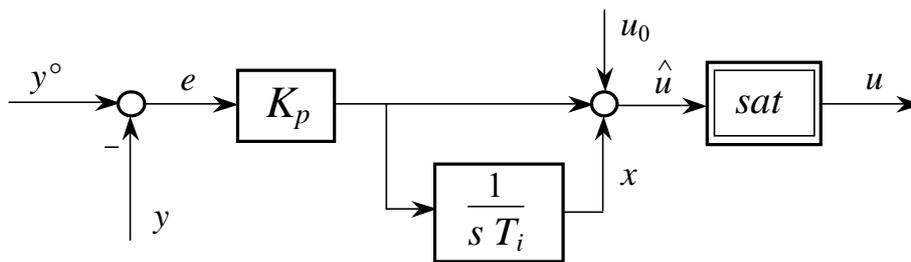


Fig. 6.10 : Modulo  $PI$  con saturazione in uscita.

Lo schema di Fig.6.10 è infatti tale da produrre uno sgradevole inconveniente che può essere sommariamente descritto a parole nel modo seguente. Se, per vicende inerenti al funzionamento del sistema sotto controllo, l'errore  $e$  resta a lungo dello stesso segno, ad esempio positivo ( $y < y^\circ$ ), la variabile di stato  $x$  dell'integratore tende a crescere indefinitamente e può spingere la  $\hat{u}$  ad assumere valori molto maggiori di  $u_M$ .

Quando, grazie all'azione del controllore ( $u(t) = u_M$ ), la variabile  $y$  finirà per assumere valori superiori a  $y^\circ$ , con conseguente inversione di segno di  $e$ , buon senso vorrebbe che il valore della variabile di controllo  $u$  cominciasse immediatamente a diminuire. Ma se  $x$  aveva precedentemente raggiunto valori altissimi, occorrerà molto tempo prima che i valori negativi dell'errore riescano a forzare  $\hat{u}$ , e quindi anche  $u$ , a scendere al di sotto di  $u_M$ . Si manifesta, cioè, nel sistema di controllo, uno spiacevole deterioramento della rapidità di risposta.

Il fenomeno sommariamente appena descritto è dunque legato a una “carica sconsiderata” (dopo che la variabile di controllo  $u$  entra in saturazione) dell’elemento che realizza l’azione integrale. Per questo, ad esso si dà il nome di **carica integrale** (in inglese, “integral windup” o “reset windup”) e vengono detti **anti carica integrale** (“anti integral windup”) gli accorgimenti atti ad evitarlo.

Nel caso dei moduli  $PI$ , uno dei più semplici accorgimenti anti carica integrale fa riferimento ad un modo apparentemente un po’ curioso di configurare un  $PI$  ideale. E’ infatti facile riconoscere che la funzione di trasferimento del sistema di Fig.6.11 coincide con quella di un  $PI$  ideale. Infatti, si ha:

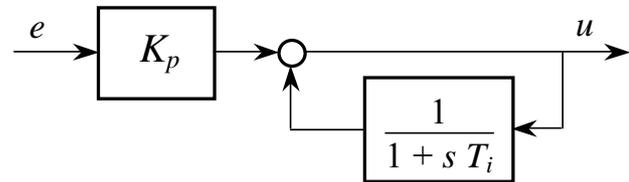


Fig. 6.11 : Un modulo  $PI$  lineare.

$$R(s) = K_p \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + s T_i}} = K_p \frac{1 + s T_i}{1 + s T_i - 1} = K_p \left(1 + \frac{1}{s T_i}\right) = R_{PI}(s) .$$

Un controllore  $PI$  (ovviamente non lineare) con l’uscita limitata all’intervallo  $[u_m, u_M]$  e un assetto anti carica integrale si ottiene dallo schema precedente con la semplice aggiunta di una saturazione sulla linea d’andata dell’anello di retroazione (Fig.6.12).

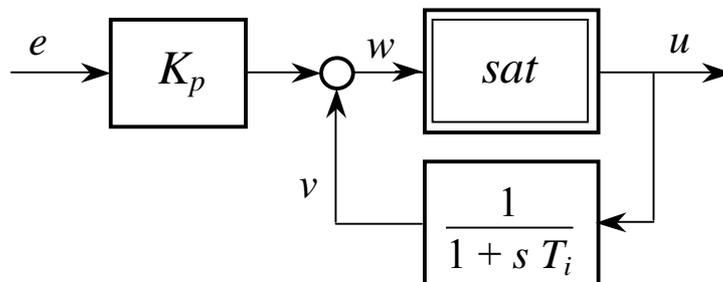


Fig. 6.12 : Modulo  $PI$  ad uscita limitata e in assetto anti carica integrale.

Ora, se  $e$  resta a lungo dello stesso segno (ad esempio, positivo)  $u$  va (esattamente come prima) in saturazione ( $u(t) = u_M$ ); in seguito a ciò,  $v$  tende asintoticamente a  $u_M$ . Non appena  $e$  cambia segno (diventa negativo), si ha:

$$w(t) = v(t) + K_p e(t) < u_M + K_p e(t) < u_M \quad \Rightarrow \quad u(t) < u_M ;$$

si ha, cioè, un’immediata diminuzione di  $u$  e un contestuale rientro del controllore, con la fine della saturazione, in zona di funzionamento lineare ( $PI$  ideale).

Esistono molti altri accorgimenti atti ad evitare il fenomeno della carica integrale, intimamente legati, a volte, alla tecnologia e persino allo specifico funzionamento dei singoli componenti usati per realizzare fisicamente il controllore. Non ci addentreremo in questa variegata casistica, limitandoci a segnalare la relativa importanza del problema e l'esigenza d'imparare a decifrare, anche da questo punto di vista, l'apparente complessità delle soluzioni proposte dai diversi costruttori. La varietà degli schemi, enfatizzata a volte

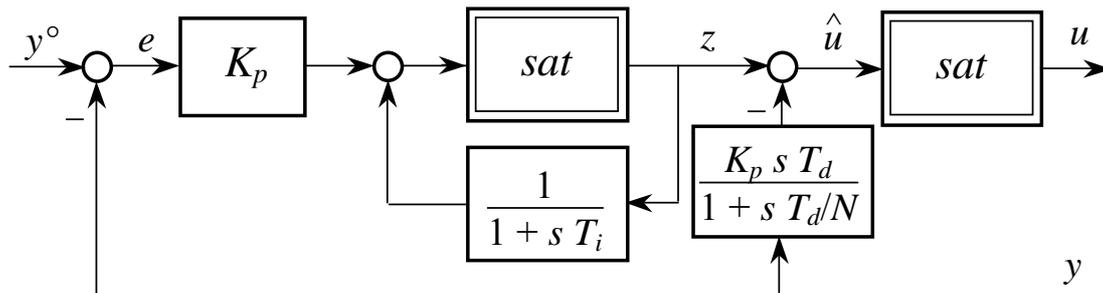


Fig. 6.13 : Controllore *PID* ad uscita limitata e a derivazione dell'uscita, in assetto anti carica integrale.

anche per interessi commerciali, deriva non solo dalla molteplicità delle soluzioni disponibili per ogni singolo problema, ma anche dalla sovrapposizione, nel medesimo schema, di accorgimenti diversi per far fronte alle varie difficoltà che, come s'è visto in questa e nelle precedenti "osservazioni", possono influenzare le prestazioni dei controllori reali. Ad esempio, in Fig.6.13 è mostrato lo schema a blocchi di un controllore *PID* ad uscita limitata ( $u(t) \in [u_m, u_M]$ ) e a derivazione dell'uscita (il riferimento è escluso dall'azione derivativa), in assetto anti carica integrale. Si noti come l'azione derivativa, componendosi con l'uscita  $z$  del modulo *PI*, possa far uscire la variabile risultante  $\hat{u}$  dall'intervallo ammissibile  $[u_m, u_M]$ . Ad evitare che ciò si verifichi per la variabile di controllo  $u$ , si rende necessaria l'aggiunta di un secondo elemento di saturazione, identico a quello inserito nel modulo *PI*.

## 7. Controllori non lineari a commutazione

Il *connotato qualificante* dei controllori non lineari a commutazione (o a relé, secondo una terminologia più datata) riguarda l'insieme dei valori possibili della variabile di controllo, e precisamente il fatto che tale insieme sia costituito da un numero *finito* e di solito molto piccolo di elementi (2 o 3).

Il legame che questi controllori invariabilmente impongono fra le loro variabili d'ingresso e d'uscita è descritto da uno schema a blocchi ormai familiare e semplicissimo (Fig.7.1).

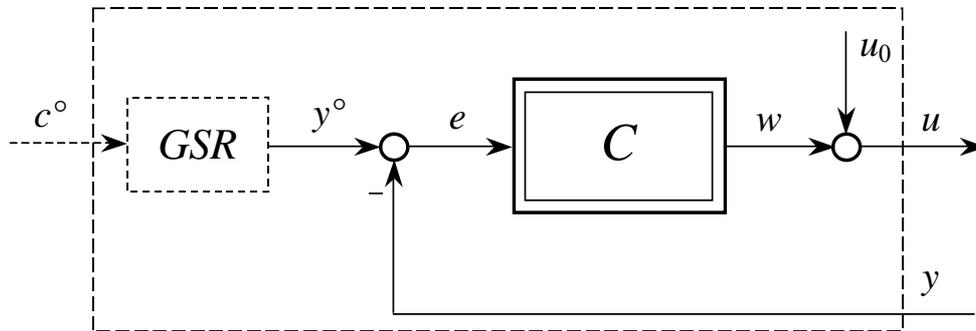


Fig. 7.1 : Schema di principio del controllore.

Il blocco  $C$  materializza, per così dire, i criteri secondo i quali, sulla base delle informazioni disponibili, il controllore fa commutare  $u$  dall'uno all'altro dei suoi valori possibili.

Quello di gran lunga più diffuso (l'unico al quale dedicheremo qui una certa attenzione) è il *controllore a commutazione a due livelli con isteresi*, il cui comportamento corrisponde alla caratteristica del blocco  $C$  di Fig.7.2-a.

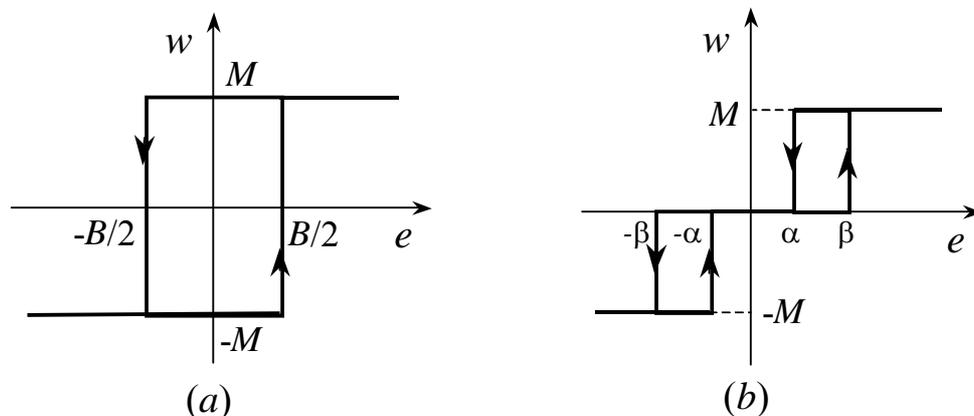


Fig. 7.2 : Caratteristiche di  $C$ . a) A due livelli con isteresi ( $MB/2$ ), b) a tre livelli con doppia isteresi.

Stante la denominazione dei due parametri che specificano questa caratteristica, il controllore che ne risulta è anche detto, con lessico strettamente "locale", *controllore  $MB/2$*  (leggi *emmebimezzi*).

La Fig.7.2-b mostra invece uno dei possibili esempi di caratteristica a tre livelli. I controllori a commutazione sono abitualmente dei *regolatori* ( $y^\circ$ ,  $u_0$  parametri costanti, da aggiungere a quelli della caratteristica di  $C$ ). Ad esempio, i parametri di un controllore  $MB/2$  sono tipicamente quattro:  $M$ ,  $B$ ,  $y^\circ$  e  $u_0$ .

## 8. Taratura dei controllori: generalità

Quando, per la soluzione di un problema di controllo, si sia deciso di adottare un controllore a struttura prefissata ma dotato di parametri a valore relativamente arbitrario, il *progetto* del controllore si riduce ovviamente alla scelta del valore da attribuire ai parametri (*taratura* o “tuning”, in inglese).

Con particolare riferimento ai regolatori industriali, i metodi di taratura possono essere suddivisi in due categorie: *metodi empirici* e *metodi razionali*. Occorre tuttavia prestare attenzione a non farsi ingannare dalle superficiali suggestioni del lessico. Non è infrequente l’affermazione che i metodi empirici sono quelli “basati sull’esperienza”. Quasi che quelli razionali non lo fossero. In ingegneria, non esistono rispettabili metodi di progetto, o di taratura, che non siano direttamente o indirettamente “basati sull’esperienza”. L’affermazione è altrettanto inconsistente quanto considerare “irrazionali” i metodi empirici.

Si va già più vicini al vero affermando che i metodi empirici sono quelli *quasi esclusivamente* basati su semplici esperimenti, ben codificati e di non troppo difficile esecuzione, mentre i metodi razionali fanno leva soprattutto sulla costruzione, la messa a punto e l’impiego di *modelli matematici*, atti a descrivere con accuratezza e semplicità adeguate il sistema sotto controllo e gli obiettivi da perseguire.

Il quadro è più compiutamente descritto dalla Fig.8.1, nella quale trovano anche appropriata collocazione le principali aree disciplinari dell’automatica.

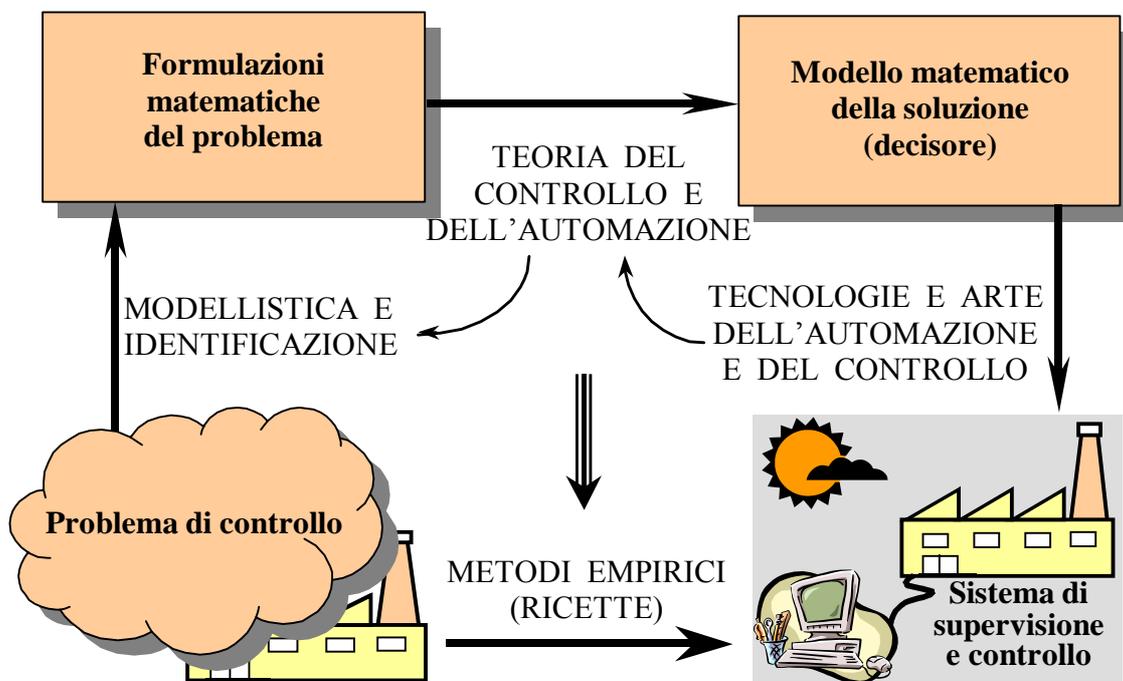


Fig. 8.1 : Metodi empirici e metodi razionali.

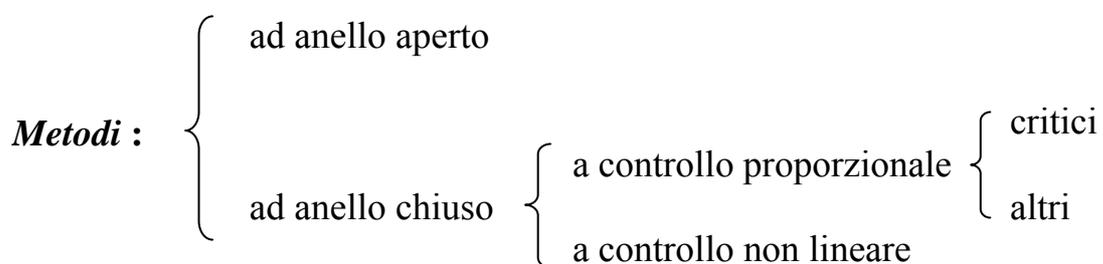
I metodi empirici di taratura dei controllori industriali consistono, essenzialmente, nell'applicazione di opportune *ricette*, le quali specificano come saggiare il comportamento del sistema sotto controllo eseguendo, con le dovute precauzioni, alcune semplici manovre. A volte, gli esperimenti da eseguire richiedono la preliminare (cauta) installazione e il successivo impiego del controllore. Dall'esito di questa prima fase, per così dire "di assaggio", e con elaborazioni del tutto elementari, si ricavano valori di prima approssimazione da attribuire ai parametri del controllore. Una fase di messa a punto finale da parte di un operatore addestrato conclude abitualmente le operazioni. Recentemente, molta attenzione è stata posta sullo sviluppo e l'affinamento dei metodi di *taratura automatica* tendenti a ridurre drasticamente, se non ad eliminare del tutto, il ruolo attivo dell'operatore, al quale si tende a lasciare semplici, anche se importanti, funzioni di mera sorveglianza.

A seconda della natura del sistema sotto controllo e, in particolare, alla maggiore o minore mutevolezza nel tempo del suo comportamento dinamico, la taratura (manuale o automatica) del controllore può avvenire una volta per tutte (*una tantum*), all'atto della messa in opera del sistema di controllo, oppure può essere ripetuta secondo una programmazione che, a sua volta, può essere *periodica*, o determinata dal verificarsi di specifici eventi (*quando serve*).

## 9. Taratura dei controllori PID

Benché esista una grande varietà di metodi, accentuata dalla tendenza delle case costruttrici a sottolineare le differenze più che le analogie, sono relativamente pochi i principi e le linee guida alle quali essi s'ispirano, almeno nella grande maggioranza dei casi.

I metodi più frequentemente impiegati possono essere classificati nel modo seguente.



I metodi "ad anello aperto" sono quelli che, nella fase di sperimentazione iniziale, non richiedono (necessariamente) l'installazione e l'impiego del controllore. Quelli "a controllo proporzionale" richiedono l'attivazione, nella fase iniziale, della sola azione proporzionale e si dicono "critici" se prescrivono

di portare il sistema “al limite di stabilità”; in una condizione, cioè, nella quale un incremento comunque piccolo del coefficiente dell’azione proporzionale produce, nel sistema di controllo, l’insorgere di oscillazioni d’ampiezza crescente. I metodi “a controllo non lineare” prevedono l’impiego temporaneo (nella sola fase di sperimentazione iniziale) di un controllore a commutazione.

Com’è già stato sottolineato più volte, l’obiettivo primario di un metodo empirico per la taratura dei parametri di un *PID* è quello di consentire la messa in opera, l’avviamento e la messa a punto di un sistema di controllo, evitando l’esplicita costruzione di un appropriato modello matematico del sistema sotto controllo. In questo modo, i protocolli di taratura, che traducono in precise ricette i metodi empirici, possono essere messi in atto da operatori non necessariamente dotati di una qualche familiarità con i sistemi dinamici e con la teoria del controllo. Nei casi più semplici, che sono la maggioranza di quelli d’interesse industriale corrente, le “reazioni” del sistema sotto controllo corrispondono abbastanza bene alle attese, e i risultati ottenuti, anche se tecnicamente modesti, sono tuttavia soddisfacenti. Naturalmente il discorso cambia se, nell’applicazione della procedura prevista dal metodo empirico preso in considerazione, si verifica qualche evento anomalo o se le prestazioni finali del sistema risultano inaccettabilmente scadenti. In questi casi, per escogitare rimedi efficaci non basta saper eseguire correttamente quanto prescritto da una o più ricette, ma occorre conoscere le ragioni per le quali quelle ricette in molti casi funzionano e in altri no; bisogna saper riconoscere le circostanze che possono rendere critico il loro impiego: è indispensabile, cioè, una buona conoscenza tanto della teoria del controllo quanto del particolare comportamento dinamico del sistema da controllare. La conclusione da trarre è che per la creazione e la messa a punto di un metodo empirico, per il suo adattamento ad un particolare contesto operativo, o per un suo impiego avveduto in condizioni “anomale”, la teoria del controllo è uno strumento assolutamente indispensabile. Alla base di ogni metodo sta, infatti, l’idea che il comportamento di un’ampia classe di sistemi sotto controllo possa essere approssimativamente descritto da un modello matematico connotato, a sua volta (come il controllore), da un numero finito e piccolo di parametri. Le manovre previste nella prima fase di ogni metodo empirico e le conseguenti rilevazioni sono precisamente intese a raccogliere informazioni atte ad individuare (implicitamente) dei valori plausibili per i parametri di un modello elementare del sistema sotto controllo. Le formule o le tabelle che consentono il passaggio dalle rilevazioni sperimentali a valori plausibili dei parametri di un *PID* escludendo il ricorso alla teoria, sono invariabilmente frutto di elaborazioni fondate anzitutto sulla teoria.

Uno dei modelli matematici più comunemente adottati per descrivere in modo sintetico la dinamica del sistema sotto controllo e costituire la base su cui

fondare un particolare metodo empirico è lineare, tempo-invariante e caratterizzato da tre parametri:

$$G(s; \mu, \tau, T) = \frac{\mu e^{-\tau s}}{1 + s T} .$$

La corrispondente risposta a scalino (unitario) è mostrata in Fig.9.1.

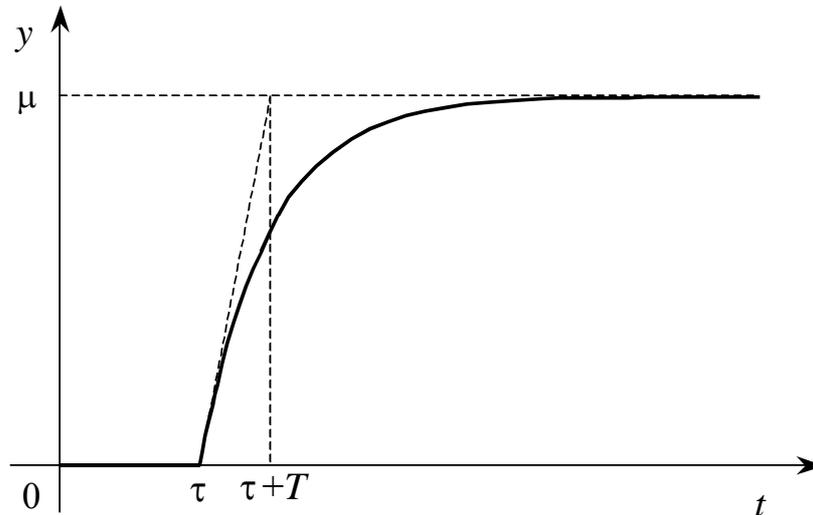


Fig. 9.1 : Risposta a scalino unitario di un sistema del prim'ordine comprendente un ritardo.

Essa mette immediatamente in evidenza come il modello suddetto si presti a descrivere con buona approssimazione sistemi caratterizzati da una risposta a scalino crescente (o decrescente, se  $\mu < 0$ ), molto comuni nelle applicazioni industriali correnti; ad esempio i casi in cui, avendo posto  $\delta u(t) = U sca(t)$  (a partire da una condizione di equilibrio), si ottenga una risposta che, eventualmente divisa per l'ampiezza  $U$  dello scalino (*curva di reazione*), sia del tipo di quella mostrata in Fig.9.2.

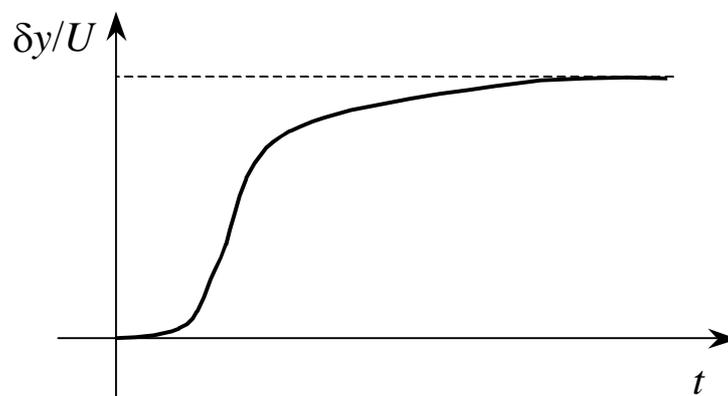


Fig. 9.2 : Curva di reazione monotona (crescente).

L'adeguatezza di un modello cosiffatto diventa invece opinabile quando la risposta a scalino (o la curva di reazione) abbia un avvio visibilmente diretto “dalla parte sbagliata” (nel gergo: “risposta inversa”) oppure e a maggior ragione un carattere marcatamente oscillatorio, come nei due esempi di Fig.9.3.

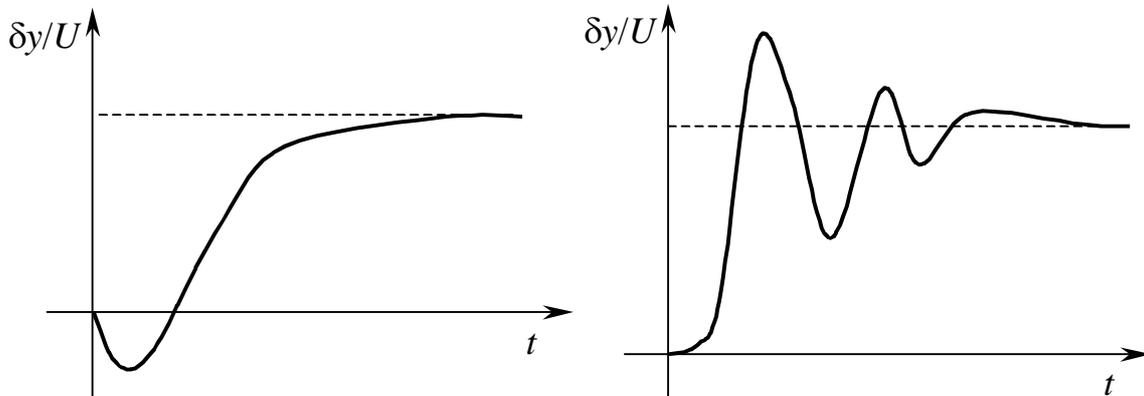


Fig. 9.3 : Curve di reazione rivelatrici di una dinamica non elementare.

E' noto, infatti, che per approssimare bene il fenomeno della “risposta inversa” occorre un modello (lineare e tempo-invariante) “a fase non minima”, un modello cioè asintoticamente stabile ma con almeno uno zero nel semipiano destro (almeno una costante di tempo negativa al numeratore); mentre per approssimare bene una risposta di tipo marcatamente oscillatorio occorre un modello (a tempo continuo) che presenti almeno una coppia di poli complessi coniugati (con fattore di smorzamento inferiore a circa 0.5). Tutto ciò consente di comprendere come non sia facile produrre ricette di validità universale. Maggiore luce sull'intera questione sarà gettata dai fondamenti della teoria del controllo che costituiscono l'oggetto del prossimo capitolo.

A titolo esemplificativo, descriviamo ora in qualche dettaglio alcuni dei più classici metodi empirici di taratura dei *PID*.

### ***I metodi di Ziegler e Nichols***

Benché l'impiego di controllori ad azione proporzionale, integrale e derivativa sia documentato in letteratura fin dagli anni '20 (del secolo scorso) fu solo grazie ai metodi concepiti, sviluppati e resi pubblici in un celebre articolo del 1942 da J. G. Ziegler e N. B. Nichols che essi assunsero un ruolo sempre più rilevante e sistematico nella realtà industriale di tutti i paesi tecnologicamente avanzati. Per questa ragione, verranno qui sommariamente descritti due metodi proposti in quell'articolo, uno ad anello aperto e l'altro ad anello chiuso (a controllo proporzionale, critico), che costituiscono tuttora un valido termine di confronto e che hanno dato vita, nei decenni scorsi, ad un gran numero di

modifiche, adattamenti e varianti con esiti interessanti per ambiti applicativi particolari, ma non così rivoluzionari da rendere obsolete le proposte originarie.

### *Metodo della risposta a scalino*

Il metodo consiste nel rilevare, prima di tutto, una risposta a scalino del sistema sotto controllo. Precisamente, si tratta di far assestare il sistema sotto controllo  $P$ , con ingresso  $u$  e uscita  $y$ , in una condizione di equilibrio rappresentativa delle sue normali condizioni di funzionamento. A partire da tale condizione di equilibrio, si dà all'ingresso  $u$  una variazione a scalino di ampiezza  $U$  e si rileva il conseguente andamento dell'uscita  $y$ . La Fig.9.4 mostra come sia possibile ricavare dalla curva di reazione (risposta a scalino normalizzata) una stima dei parametri di  $G(s; \mu, \tau, T)$ . Le stime (a volte alquanto soggettive, a causa del rumore sovrapposto a  $y$ ) sono indicate con  $\hat{\mu}$ ,  $\hat{\tau}$  e  $\hat{T}$ , rispettivamente.

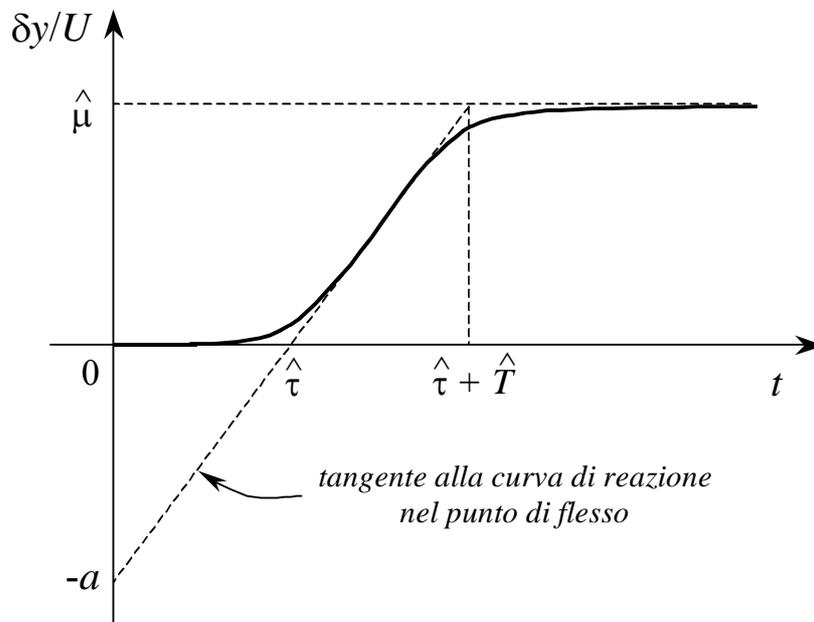


Fig. 9.4 : Stima di  $\mu$ ,  $\tau$ ,  $T$ .

Per la taratura dei parametri del  $PID$ , non tutte le stime suddette sono rilevanti. Indicando con  $w$  la cosiddetta “velocità di reazione”, vale a dire la pendenza della retta tangente alla curva di reazione nel punto di flesso, e con  $-a$  l’ordinata del punto d’intersezione di tale retta con la verticale passante per l’origine, palesemente si ha:

$$w = \frac{\hat{\mu}}{\hat{T}} = \frac{a}{\hat{\tau}}.$$

Ziegler e Nichols suggeriscono di far dipendere i parametri del controllore da  $\hat{\tau}$  e da  $a$ , nel modo seguente. Se il controllore è puramente proporzionale ( $P$ ),

$K_p=1/a$ ; se il controllore è un *PI*,  $K_p=0.9/a$  e  $T_i=3.3 \hat{\tau}$ ; se è un *PID*,  $K_p=1.2/a$ ,  $T_i=2 \hat{\tau}$  e  $T_d=\hat{\tau}/2$ .

Vi sono altri modi per rilevare, dalla curva di reazione, una stima dei parametri  $\mu$ ,  $\tau$  e  $T$ . Citiamo, ad esempio, il cosiddetto *metodo delle aree*, che ha goduto di una certa considerazione.

Indichiamo con  $A_1$  l'area della regione (Fig.9.5) compresa fra la curva di reazione e il suo asintoto (che interseca la verticale passante per l'origine in un punto di ordinata  $\hat{\mu}$ ), con  $T_s$  la base di un rettangolo che abbia altezza  $\hat{\mu}$  e area  $A_1$  ( $T_s:=A_1/\hat{\mu}$ ), e con  $A_2$  l'area della regione compresa fra la curva di reazione e l'asse dei tempi, limitatamente all'intervallo  $[0, T_s]$ .

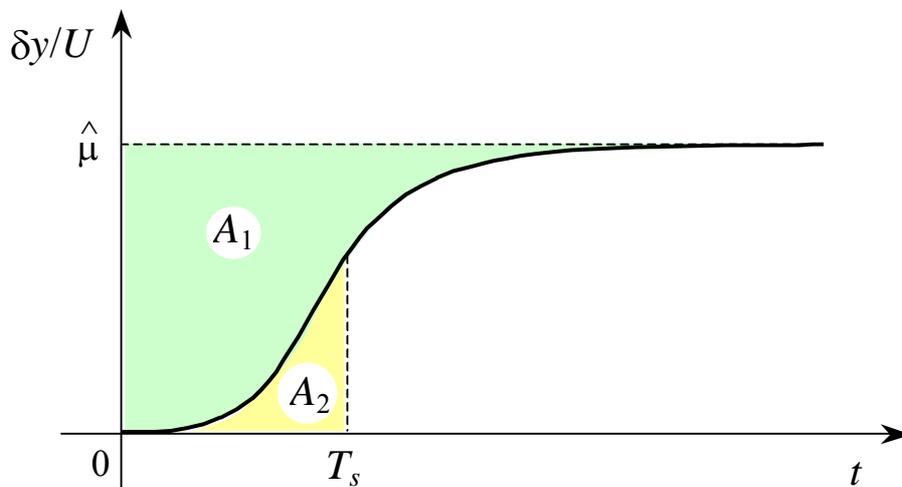


Fig. 9.5 : Il metodo delle aree.

Ora, se si fa riferimento alla risposta a scalino (unitario) di  $G(s; \mu, \tau, T)$ , è facile riconoscere che:

$$A_1 = \mu (\tau + T) \quad , \quad T_s = \tau + T \quad , \quad A_2 = \mu T/e \quad .$$

E' quindi naturale porre:

$$\hat{T} = \frac{A_2 e}{\hat{\mu}} \quad , \quad \hat{\tau} = \frac{A_1}{\hat{\mu}} - \hat{T} \quad .$$

Per tornare alle tarature suggerite da Ziegler e Nichols, basta ricordare che:

$$a = \frac{\hat{\mu}}{\hat{T}} \hat{\tau} = \frac{\hat{\mu}^2 \hat{\tau}}{A_2 e} \quad .$$

Affinché  $\hat{\tau}$  risulti positivo (e quindi il metodo delle aree abbia un minimo di coerenza e affidabilità) occorre che sia:  $A_1 > A_2$  e  $\cong 2.7 A_2$ .

### Metodo dell'oscillazione periodica limite

Questo metodo, certamente il più noto (e il più imitato) dei metodi di Ziegler e Nichols, tanto da essere a volte semplicemente indicato come “metodo di Ziegler e Nichols” per antonomasia, richiede di determinare sperimentalmente, in via preliminare e facendo uso del controllore (azione proporzionale) il valore di due parametri che indicheremo nel seguito con  $K_c$  e  $T_c$  e chiameremo, rispettivamente, *guadagno critico* (“ultimate gain”) e *periodo critico* (“ultimate period”).

La determinazione sperimentale di  $K_c$  e  $T_c$  può essere effettuata eseguendo la sequenza di operazioni qui sommariamente descritta.

- a) Escludere le tre azioni del controllore (“ $K_p = 0$ ,  $T_d = 0$ ,  $T_i \rightarrow \infty$ ”) e connetterlo fisicamente al sistema sotto controllo (Fig.9.6), curando di evitare inutili sollecitazioni del sistema stesso (“bumpless connection”).

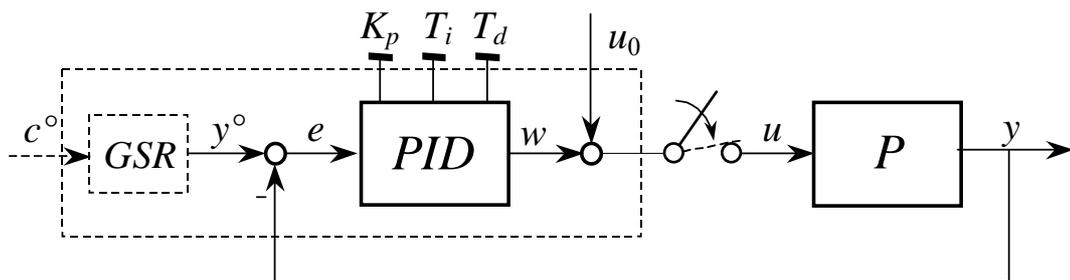


Fig. 9.6 : Connessione (prudente) del PID al sistema sotto controllo.

- b) Fissare  $c^\circ$  ( $y^\circ$ ) e portare (lentamente)  $y$  al valore desiderato ( $e = 0$ ), agendo su  $u_0$ .
- c) Aumentare progressivamente  $K_p$  (riattivando così la sola azione proporzionale) fintantoché una piccola perturbazione, ad esempio della variabile di riferimento:  $\delta y^\circ(t) = Y^\circ sca(t)$ , provochi nelle variabili del sistema l'innescò di un'oscillazione permanente; un'oscillazione, cioè, la cui ampiezza non aumenti né diminuisca nel tempo.

In Fig.9.7 è mostrata una tipica successione di andamenti della variabile  $y$  prodotta dal progressivo aumento di  $K_p$  fino al raggiungimento del *limite di stabilità*. Il guadagno critico  $K_c$  è quel valore di  $K_p$  in corrispondenza del quale la risposta  $y(\cdot)$  tende asintoticamente ad assumere un andamento *periodico*. Il periodo  $T_c$  di questa oscillazione limite è il cosiddetto periodo critico.

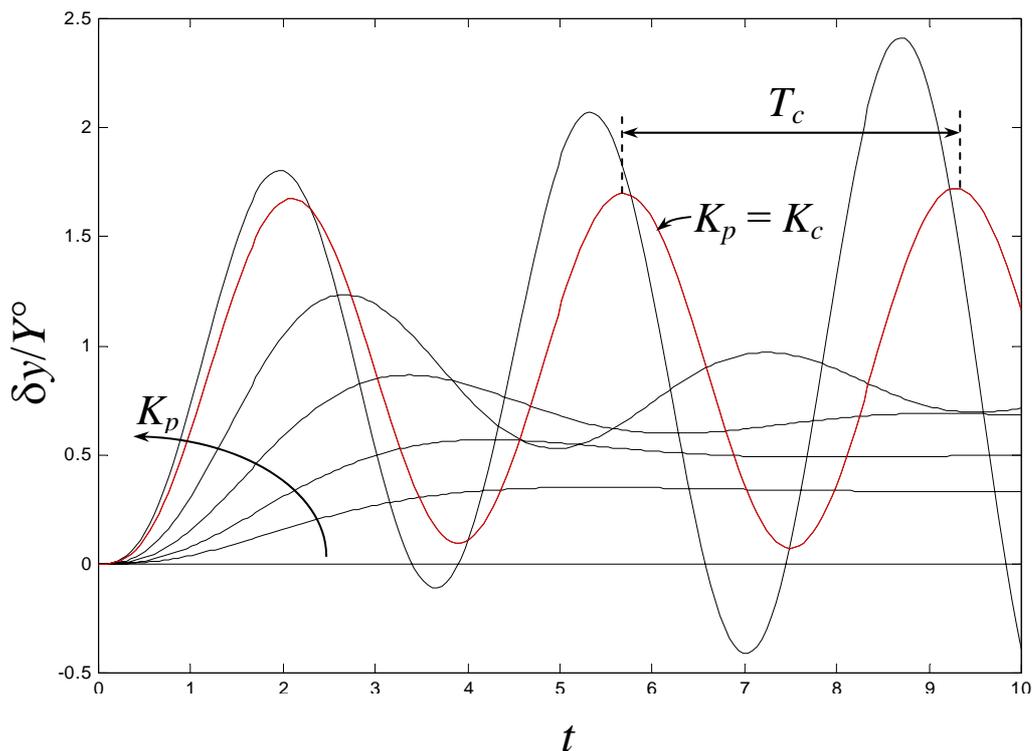


Fig. 9.7 : Tipica successione delle risposte a scalmo del sistema di Fig.9.6, al variare di  $K_p$ .

- d) Determinare valori di prima approssimazione per i parametri del controllore, avvalendosi delle formule riportate in tabella.

<b>Controllore</b>	$K_p$	$T_i$	$T_d$
<b>P</b>	$0.5 K_c$		
<b>PI</b>	$0.4 K_c$	$0.8 T_c$	
<b>PID</b>	$0.6 K_c$	$0.5 T_c$	$0.125 T_c$

Queste sono le tarature suggerite da Ziegler e Nichols. Altre tarature sono state proposte da vari autori o aziende costruttrici; ad esempio, nel caso di controllori *PID*:  $K_p = 0.33 K_c$ ,  $T_i = 0.5 T_c$ ,  $T_d = 0.33 T_c$ . Ogni formula può dimostrarsi migliore di altre, in particolari situazioni; nessuna, in tutte le circostanze possibili (per tutti gli eventi possibili di tutti i possibili sistemi sotto controllo). Quelle di Ziegler e Nichols godono tuttora, in ambito professionale, di un'ampia considerazione. Quasi sempre le prestazioni ottenute di prim'acchito sono mediocri (sovraelongazione superiore al 30%, tempo di risposta relativamente elevato) ed è utile, se non necessaria, una fase di *messa a punto finale*.

### *I metodi di taratura a controllo non lineare*

Quelli che, nell'ultimo decennio, hanno suscitato il maggior interesse sono basati sulla connessione temporanea del sistema sotto controllo con un *controllore a commutazione* di tipo *MB/2* manovrato in modo da instaurare (se possibile) nel sistema di controllo un *regime periodico* al quale tendano asintoticamente i movimenti spontanei; occorrerà cioè che, a *MB/2* inserito, ogni movimento (asintoticamente periodico) che parta da un possibile stato iniziale, sia compatibile con i vincoli operativi imposti dal sistema sotto controllo

Accenneremo brevemente solo al capostipite di questi metodi che, come molti altri da esso derivati per variazioni, arricchimenti ed aggiunte, è stato proposto da K. Åström e T. Hägglund in una serie di articoli iniziata nel 1984 e poi culminata nella pubblicazione di un libro di ampia diffusione. Metodi di taratura automatica basati su procedure di questo tipo sono ormai entrati stabilmente fra le opzioni offerte da numerose case costruttrici.

L'assetto tipico usato nell'applicazione di un metodo "alla Åström e Hägglund" è mostrato in Fig.9.8. Il controllore *MB/2* è usato solo nella fase di sperimentazione iniziale intesa a ricavare valori di prima approssimazione da attribuire ai parametri del *PID*.

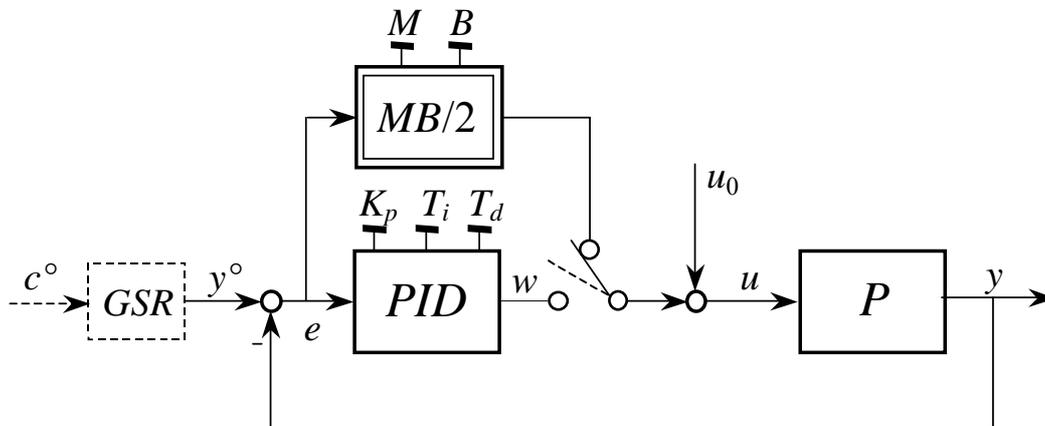


Fig. 9.8 : Metodo di taratura a controllo non lineare.

Vediamo ora, a titolo esemplificativo, uno dei metodi più semplici che porta a un procedimento *non critico* per la determinazione dei parametri  $T_c$  e  $K_c$ , connessi all'oscillazione periodica limite. Questo procedimento, alternativo rispetto a quanto proposto da Ziegler e Nichols, non è critico nel senso che non richiede di portare il sistema al limite di stabilità. Si fissa il valore desiderato di  $c^\circ$  ( $y^\circ$ ); si pone:  $M=0$  e  $B=0$ ; si connette il controllore *MB/2* al sistema sotto controllo, quindi, agendo su  $u_0$ , si porta (lentamente)  $y$  al valore desiderato ( $e = 0$ ). A questo punto, un valore di  $M$  anche molto piccolo, rispetto a  $u_M - u_m$ , innesca quasi sempre nel sistema un'oscillazione asintoticamente periodica.

Concentrando l'attenzione su  $e$  (errore apparente), si aumenta progressivamente  $M$  e, di conseguenza, l'ampiezza dell'oscillazione. Si procede fino a far diventare l'oscillazione di  $e$  dominante sul rumore di misura, senza arrivare a compromettere con oscillazioni di ampiezza eccessiva l'integrità del sistema sotto controllo. In corrispondenza del regime periodico così ottenuto ( $M := M^*$ ), si misurano l'ampiezza  $E$  e la pulsazione  $\Omega$  della sinusoide che meglio approssima  $e(\cdot)$ .

Con riferimento al secondo metodo di Ziegler e Nichols, si pone:

$$T_c = \frac{2 \pi}{\Omega} \quad , \quad K_c = \frac{4 M^*}{\pi E}$$

e con questi valori si possono tarare i parametri del *PID* utilizzando la tabella suggerita da Ziegler e Nichols o una qualunque delle sue varianti, ritenuta più adatta al caso.

Le formule per  $T_c$  e  $K_c$  non sono ovvie. Una loro giustificazione può essere facilmente trovata nell'ambito del *Metodo della funzione descrittiva*, al quale si rimanda per ogni eventuale approfondimento.

Altri metodi a controllo non lineare per la taratura dei parametri di un *PID* portano a formule del tutto indipendenti da quelle di Ziegler e Nichols offrendo, per classi particolari di sistemi sotto controllo, prestazioni interessanti e assolutamente competitive. Per maggiori dettagli su questo tema, ch'è ancora oggetto nei maggiori paesi industrializzati di una significativa attività di ricerca, si rimanda alla letteratura specializzata.

## 10. Sulla taratura dei controllori MB/2 (cenno)

E' innanzitutto importante riconoscere che, per valori costanti di  $y^\circ$  (e naturalmente di  $u_0$ ), il legame che un controllore *MB/2* impone fra  $y$  e  $u$  può essere equivalentemente (e in molti casi convenientemente) descritto da una semplice caratteristica nel piano  $(y, u)$ .

L'esatta corrispondenza fra le due descrizioni è illustrata in Fig.10.1. Interpretando il comportamento del controllore in base alla caratteristica nel piano  $(y, u)$ , si può comprendere che l'obiettivo intrinsecamente perseguito è, in questo caso, far sì che il sistema di controllo abbia, *non uno stato di equilibrio* stabile in corrispondenza del quale l'errore (effettivo) sia sufficientemente piccolo, *ma un regime periodico* stabile, in corrispondenza del quale *l'intero andamento* (ovviamente periodico) della variabile controllata si mantenga sufficientemente prossimo a un valore desiderato ( $y(t) \in [y_{min}, y_{max}]$ ).

Un tipico problema atto ad essere risolto mediante un controllore  $MB/2$  può dunque essere formulato nel modo seguente.

**Problema:** Dati  $y_{min}$  e  $y_{max}$ , determinare  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $y_1$  e  $y_2$ , o equivalentemente  $M$ ,  $B$ ,  $y^\circ$  e  $u_0$ , in modo tale che, qualunque sia (fra quelli ammissibili) lo stato iniziale del sistema di controllo e il valore o l'andamento delle variabili indipendenti incerte di  $P$ ,  $y(t)$  tenda, dopo un transitorio ragionevolmente breve, ad entrare definitivamente nella fascia  $[y_{min}, y_{max}]$ .

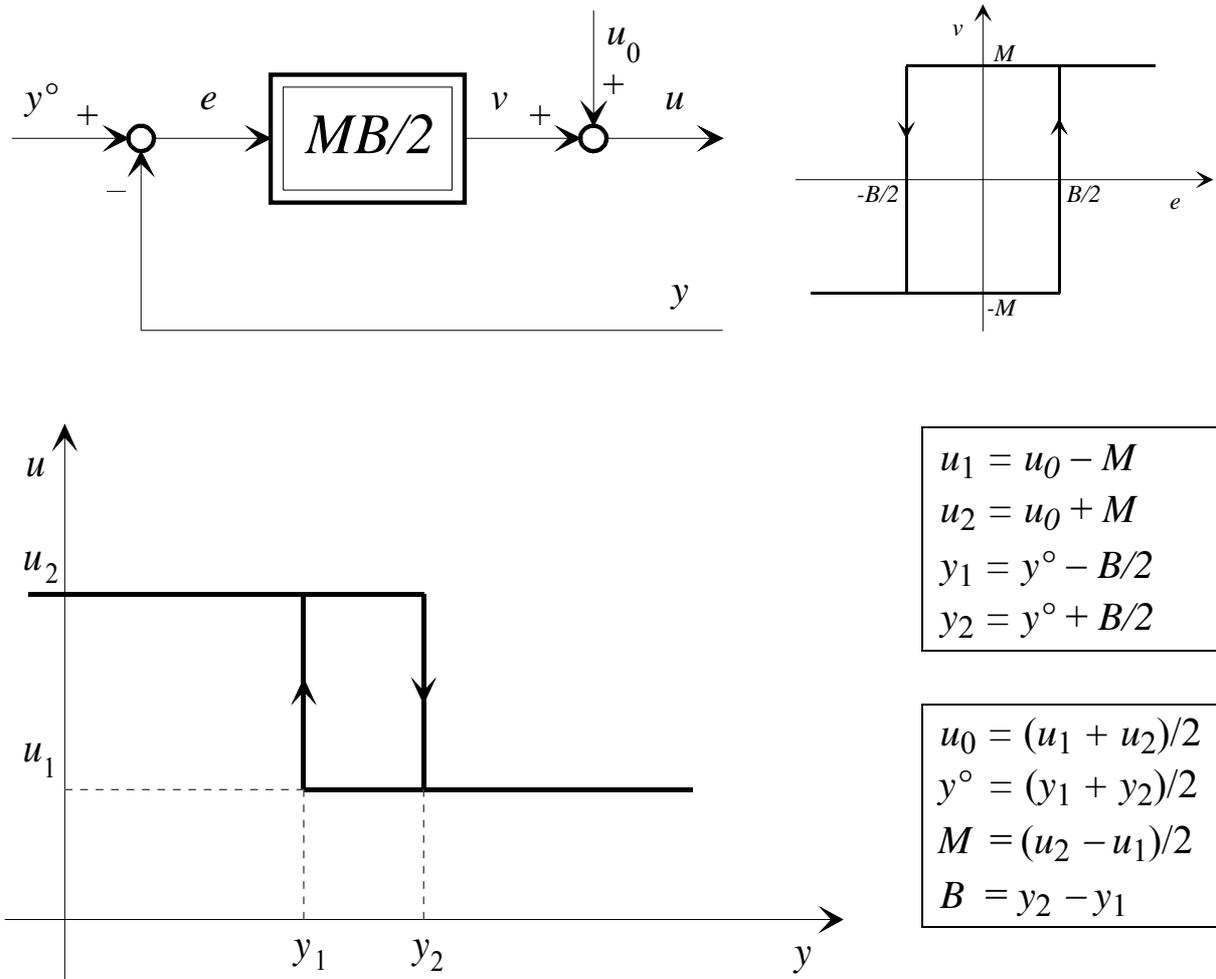


Fig. 10.1 : Rappresentazioni equivalenti di un controllore a commutazione  $MB/2$ .

La strategia di soluzione consiste nel fare in modo che il regime periodico instaurato dal controllore  $MB/2$  sia stabile (in un senso opportuno) e tale che il corrispondente andamento di  $y$  sia tutto compreso tra  $y_{min}$  e  $y_{max}$ .

### Scelta di $y_1$ e $y_2$

Intuizione e buon senso suggeriscono che, in vista delle possibili escursioni di  $y$  successive alla commutazione di  $u$ , l'intervallo  $[y_1, y_2]$  debba essere tanto più

strettamente interno a  $[y_{min}, y_{max}]$  quanto maggiore è l'inerzia (in senso generico, non solamente meccanico) con cui  $y$  risponde all'azione di controllo (Fig.10.2).

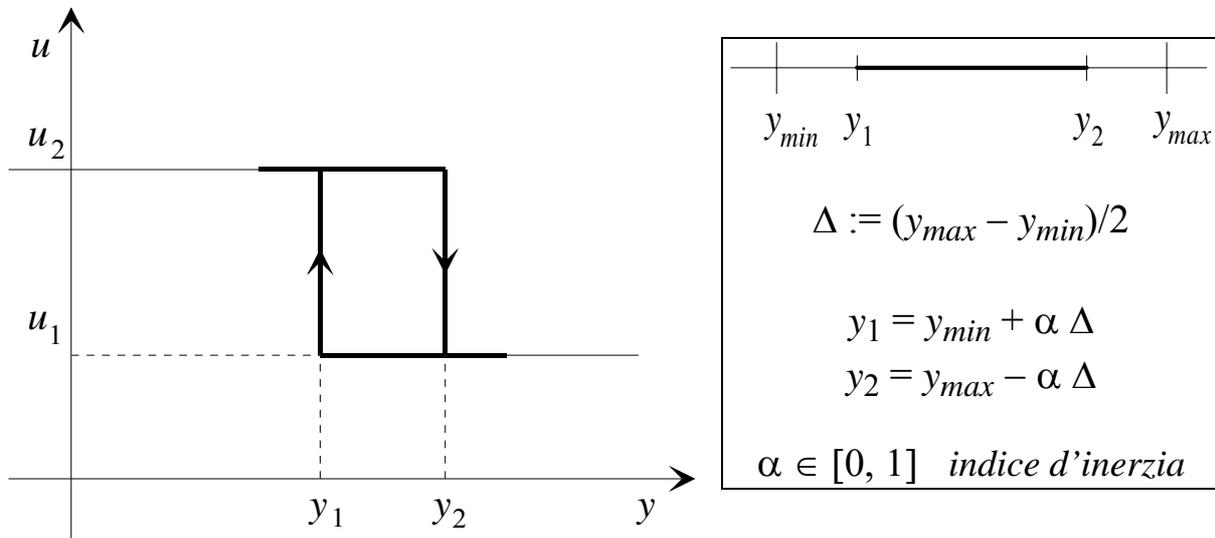
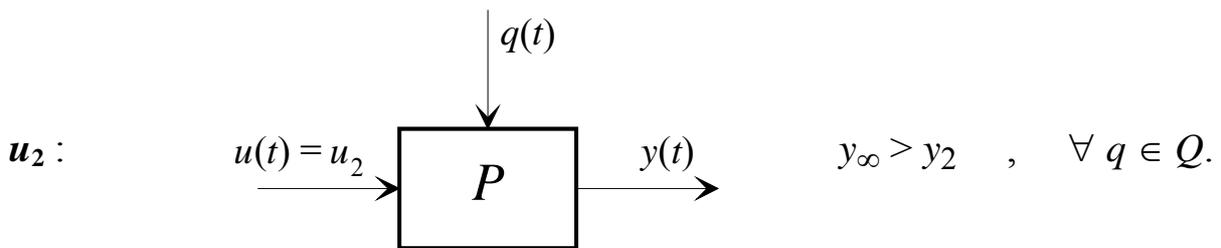


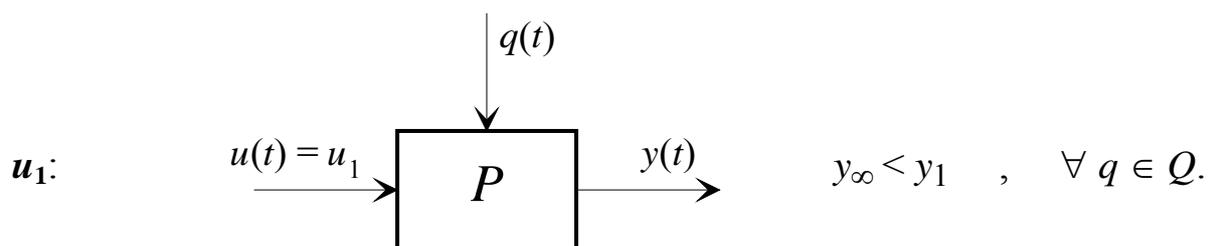
Fig. 10.2 : Scelta di  $y_1$  e  $y_2$ .

**Scelta di  $u_1$  e  $u_2$**

Supponendo che  $P$  sia tale da far corrispondere (almeno a lungo termine) a un aumento di  $u$  un aumento di  $y$ ,  $u_2$  dev'essere scelto in modo tale che, con  $u(t)=u_2$ ,  $y(t)$  tenda ad assumere prima o poi valori maggiori di  $y_2$ , qualunque sia il valore o l'andamento delle variabili indipendenti incerte. Stenograficamente:



Analogamente,  $u_1$  dev'essere scelto in modo tale che, con  $u(t)=u_1$ ,  $y(t)$  tenda ad assumere prima o poi valori minori di  $y_1$ , qualunque sia il valore o l'andamento delle variabili indipendenti incerte. Stenograficamente:



Se invece  $P$  è tale da far corrispondere (almeno a lungo termine) un aumento di  $y$  ad una diminuzione di  $u$ , allora i ruoli vanno invertiti. Precisamente,  $u_2$  dev'essere scelto in modo tale che, con  $u(t) = u_2$ ,  $y(t)$  tenda ad assumere prima o poi valori minori di  $y_1$ , qualunque sia il valore o l'andamento delle variabili indipendenti incerte; mentre  $u_1$  dev'essere scelto in modo che, con  $u(t) = u_1$ ,  $y(t)$  tenda ad assumere prima o poi valori maggiori di  $y_2$ , qualunque sia il valore o l'andamento delle variabili indipendenti incerte.

### Esempio 1

Il sistema sotto controllo  $P$  sia lineare e invariante nel tempo, con funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{10}{1 + 3s} ;$$

sia inoltre:  $y_{min} = 20$ ,  $y_{max} = 24$ .

Il sistema, del prim'ordine, è manifestamente privo di "inerzia", come si potrebbe constatare con un semplice esperimento o anche dedurre riconoscendo che una variazione a scalino di  $u$  provoca istantaneamente una variazione di  $\dot{y}$  (si pensi, ad esempio, alla realizzazione di  $G(\cdot)$ :  $3 \dot{y}(t) = -y(t) + 10 u(t)$ ). Pertanto, possiamo provare a porre  $\alpha=0$ ,  $\Rightarrow y_1 = y_{min}$ ,  $y_2 = y_{max}$ .

Poiché  $P$  è un sistema lineare, tempo-invariante, di tipo zero e asintoticamente stabile, sappiamo che tutte le risposte a un ingresso costante  $u(t) = \bar{u}$  tendono asintoticamente a  $y_{\infty} = 10 \bar{u}$ ; quindi possiamo porre:  $u_2 = 4$ ,  $u_1 = 1$ .

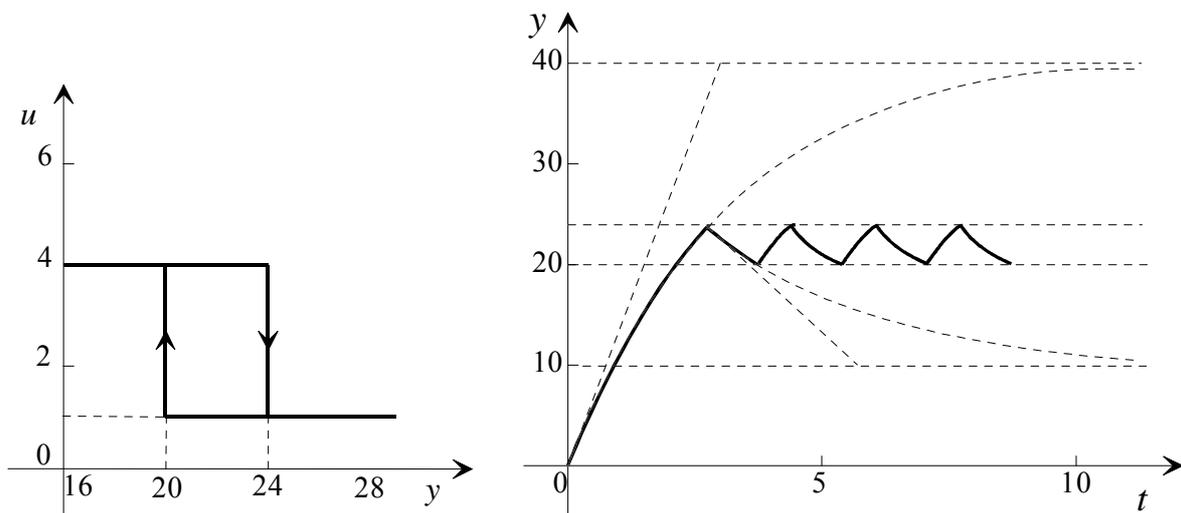


Fig. 10.3 : Caratteristica ingresso-uscita del controllore  $MB/2$  e transitorio di avviamento.

In Fig.10.3 è mostrato il transitorio di avviamento ( $y(0)=0$ ) del sistema di controllo risultante. Poiché  $y(0)=0$ , si ha  $u(0)=u_2=4$ ; quindi  $y$  tende a  $y_{\infty 2}=40$ . Quando, però,  $y$  raggiunge il valore  $y_2=24$  il controllore commuta e attribuisce a  $u$  il valore  $u_1 = 1$ . Sotto l'azione di questo ingresso,  $y$  tende a  $y_{\infty 1}=10$ ; ma quando

arriva a  $y_1=20$ , il controllore commuta di nuovo e attribuisce a  $u$  il valore  $u_2 = 4$ . Il resto della storia è ormai chiaro.

*Commento.* Si noti come la scelta  $\alpha=0$  non sia stata "scorretta", anche se un valore di  $\alpha$  pari a 0.2 ( $y_1 = 20.4, y_2 = 23.6$ ) potrebbe forse essere ritenuto più prudente.

### Esempio 2

Si consideri il medesimo problema dell'esempio precedente, supponendo però che il sistema  $P$  sotto controllo sia descritto dal semplice schema a blocchi di Fig.10.4 (controllo di livello).

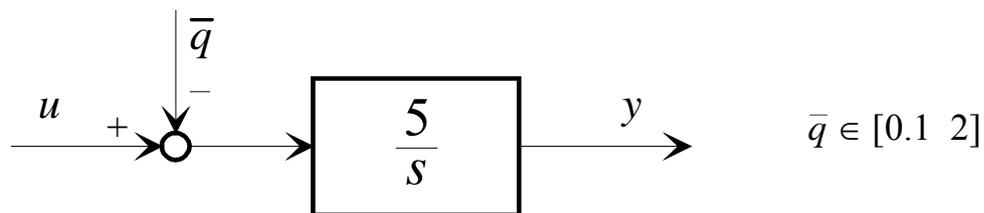


Fig. 10.4 : Sistema sotto controllo.

Per quanto riguarda la scelta di  $y_1$  e  $y_2$ , continuano a valere le considerazioni fatte nell'esempio precedente. Poniamo, quindi, ancora ( $\alpha=0$ ):  $y_1 = 20, y_2 = 24$ .

I valori di  $u_1$  e  $u_2$  vanno invece scelti in modo che l'ingresso dell'integratore sia sicuramente positivo, quando  $y$  deve crescere, e sicuramente negativo nel caso opposto; risulti cioè:

$$u_2 - \bar{q} > 0 \quad , \quad u_1 - \bar{q} < 0 \quad , \quad \forall \bar{q} \in [0.1 \ 2] .$$

Molte sono, ovviamente, le soluzioni possibili. Supponendo che  $u$  sia una portata soggetta al vincolo  $u(t) \geq 0$ , poniamo:  $u_1 = 0, u_2 = 2.1$ .

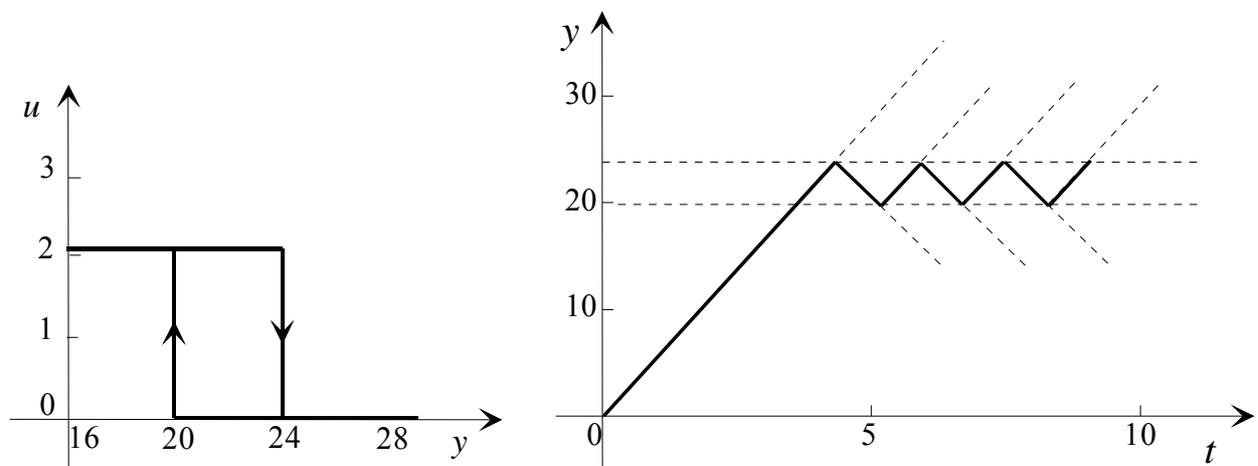


Fig. 10.5 : Caratteristica ingresso-uscita del controllore  $MB/2$  e transitorio di avviamento.

In Fig.10.5 è mostrato il transitorio di avviamento ( $y(0)=0$ ) del sistema di controllo così ottenuto, nel caso  $\bar{q}=1$ . A titolo di esercizio, si suggerisce al lettore di ricavare il transitorio di avviamento nel caso  $\bar{q} = 0.5$ .

### Esempio 3

Da ultimo, consideriamo il caso di un sistema descritto da un integratore doppio (controllo di posizione di un carrello senza attriti).

$$G(s) = \frac{\mu}{s^2} \quad , \quad \mu = 4.5 \text{ .}$$

Dati:  $y_{min} = 10$  e  $y_{max} = 20$ , teniamo conto dell'inerzia, certamente non trascurabile, del sistema ponendo "cautelativamente"  $\alpha=0.8$ ; quindi abbiamo:

$$y_1 = 14 \quad , \quad y_2 = 16 \text{ .}$$

Per quanto riguarda  $u_2$  e  $u_1$ , è sufficiente che siano uno positivo e l'altro negativo. Poniamo:  $u_2 = -u_1 = 2$ .

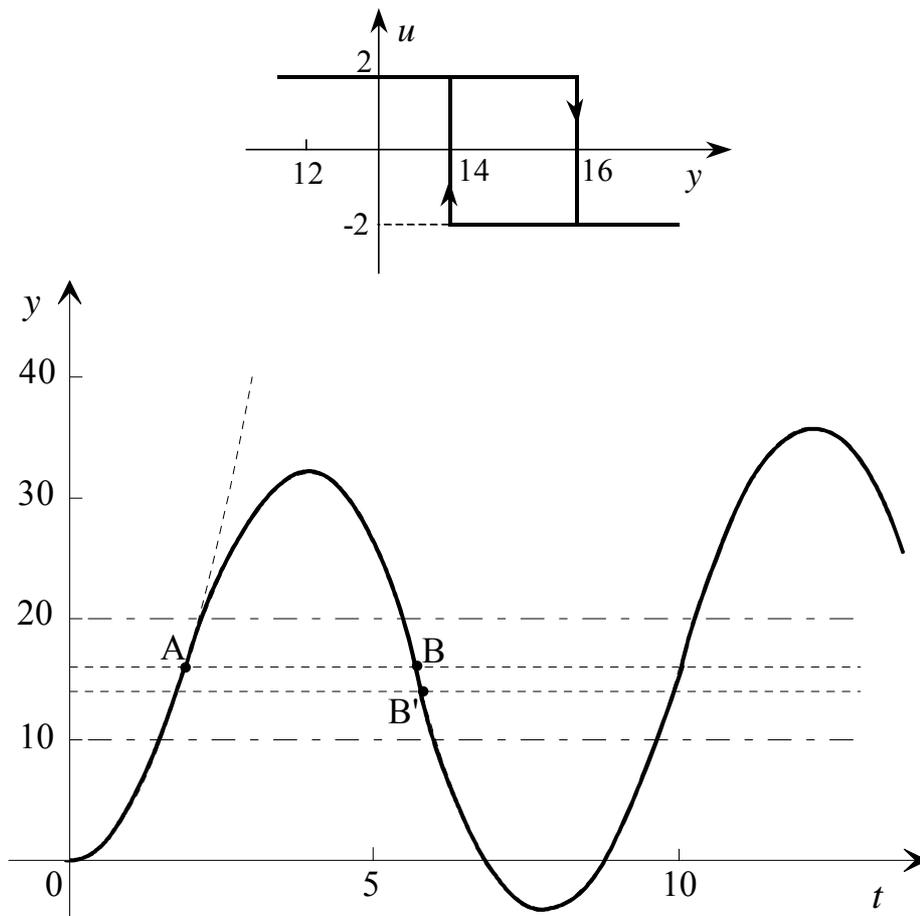


Fig. 10.6 : Caratteristica ingresso-uscita del controllore  $MB/2$  e transitorio di avviamento.

Per valutare il funzionamento del sistema di controllo così ottenuto, esaminiamo ancora una volta un transitorio di avviamento. Sotto l'azione di un ingresso costante  $u(t) = \bar{u}$ , l'uscita  $y$  di un "doppio integratore" è data da:

$$\begin{aligned}
 P: \quad \ddot{y}(t) &= 4.5 \bar{u} \\
 \dot{y}(t) &= 4.5 \bar{u} t + \dot{y}(0) \quad , \quad \forall t \geq 0 \\
 y(t) &= 2.25 \bar{u} t^2 + \dot{y}(0) t + y(0) \quad , \quad \forall t \geq 0 .
 \end{aligned}$$

Quindi, a seconda delle condizioni iniziali  $y(0)$  e  $\dot{y}(0)$ , l'uscita  $y$  descrive un arco di parabola ad asse verticale, concava se  $\bar{u} < 0$ , convessa nel caso opposto.

Partendo da condizioni iniziali nulle, si ha:  $u(0) = u_2 = 2$ . La variabile  $u$  resta uguale a 2 fino a che  $y$  raggiunge il valore 16 (punto A in Fig.10.6). In quel punto il controllore commuta e  $u$  assume il valore  $u_1 = -2$ . Da quel momento in poi, la  $y$  segue una parabola ad asse verticale uguale alla precedente, ma concava. Ciò accade finché  $y$  raggiunge il valore 14 (punto B' in Fig.10.6), dove si ha un'ulteriore commutazione della variabile  $u$  e da quel momento in poi  $y$  segue di nuovo la parabola convessa. Ora però è evidente, per simmetria, che:

$$|\dot{y}(t_{B'})| > |\dot{y}(t_B)| = |\dot{y}(t_A)| \quad ,$$

quindi l'ampiezza delle oscillazioni prodotte dal controllore è destinata ad aumentare compromettendo in modo irreparabile l'efficacia della sua azione. Si noti, inoltre, che l'esito è negativo *indipendentemente* dal valore di  $\alpha$ .

Per valutare a priori le prestazioni di un controllore a commutazione in casi più complessi, occorre disporre un metodo che consenta di stabilire: **a)** se il sistema di controllo ipotizzato ammette un'oscillazione permanente, **b)** quali sono il periodo e l'ampiezza di tale eventuale oscillazione, **c)** se essa sia stabile o no. A questo tipo di questioni può dare interessanti risposte il già citato *metodo della funzione descrittiva*.