

Capitolo 4

***Sistemi lineari tempo-invarianti:
analisi nel dominio della frequenza***

1. *Introduzione*

In questo capitolo ci occuperemo dell'analisi "nel dominio della frequenza" di sistemi dinamici lineari tempo-invarianti. Vale a dire dello studio delle loro principali proprietà condotto rappresentando i segnali tramite le loro trasformate.

Nei paragrafi che seguono torneremo innanzitutto ad esaminare il movimento (dello stato) e la risposta (o movimento dell'uscita) di un sistema S , prodotti da un assegnato segnale d'ingresso, a partire da un assegnato stato iniziale. Più precisamente ci chiederemo quale sia la trasformata di Laplace dei suddetti movimenti, noti che siano lo stato iniziale e la trasformata di Laplace dell'ingresso. Il risultato ottenuto consentirà di riconoscere, anche in questo contesto, che chiamiamo "dominio della frequenza", diverse versioni del cosiddetto principio di sovrapposizione degli effetti.

L'esame della risposta di un sistema lineare tempo-invariante (a un ingresso e un'uscita), ci porterà direttamente al concetto di funzione di trasferimento, che nel caso di più ingressi o più uscite si generalizza in matrice (di funzioni di) di trasferimento. Per comprendere il significato profondo insito nella nozione di funzione di trasferimento dovremo tornare, sia pure sommariamente, all'analisi "nel dominio del tempo" di un sistema dinamico lineare tempo-invariante e osservare come siano possibili, nello spazio di stato, diverse rappresentazioni equivalenti del medesimo sistema. Fra le infinite rappresentazioni possibili, primario è il ruolo concettualmente svolto dalla scomposizione canonica di Kalman, grazie alla quale l'efficacia e i limiti della nozione di funzione di trasferimento vengono messi nella giusta luce.

Prima di affrontare il problema della realizzazione di una funzione di trasferimento, o più precisamente il problema delle sue possibili realizzazioni, si esaminerà brevemente il calcolo della funzione di trasferimento di un sistema descritto in forma ingresso-uscita.

Strettamente legato alla nozione di funzione di trasferimento è il concetto di risposta in frequenza. Sulle principali proprietà della risposta in frequenza si fondano ad esempio, da una parte, la teoria classica dei filtri, dall'altra, il funzionamento delle reti elettriche, che notoriamente operano in regime fondamentalmente sinusoidale, così come i più semplici procedimenti di identificazione di un sistema dinamico lineare tempo-invariante.

A chiusura del capitolo, verranno infine introdotti gli schemi a blocchi, come efficace ed espressivo strumento per la descrizione e l'analisi di sistemi interconnessi.

2. Analisi nel dominio della frequenza: generalità

Consideriamo, un sistema dinamico lineare, tempo-invariante, di ordine n , in forma normale, con m ingressi e p uscite:

$$S : \begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) & \text{equazione di stato} \\ y(t) = C x(t) + D u(t) & \text{equazione d'uscita .} \end{cases}$$

Le matrici A , B , C e D avranno dunque dimensioni $n \times n$, $n \times m$, $p \times n$ e $p \times m$, rispettivamente.

Fissiamo innanzitutto l'attenzione sull'*equazione di stato*.

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) .$$

Applicando la trasformazione di Laplace e ricordandone alcune importanti proprietà, si ottiene immediatamente la seguente equazione (vettoriale) lineare *algebraica*:

$$s X(s) - x(0) = A X(s) + B U(s) .$$

Risolvendo rispetto a $X(s)$, si ha:

$$s X(s) - A X(s) = x(0) + B U(s)$$

$$(s I - A) X(s) = x(0) + B U(s)$$

da cui, pre-moltiplicando per $(s I - A)^{-1}$:

$$X(s) = (s I - A)^{-1} x(0) + (s I - A)^{-1} B U(s) .$$

Questa relazione, puramente algebrica, è dunque l'equivalente, nel "dominio della frequenza", della formula di Lagrange. La trasformata di Laplace del movimento dello stato, prodotto dall'ingresso $u(\cdot)$ a partire dallo stato iniziale $x(0)$, è la somma della trasformata di Laplace del movimento libero, prodotto dal solo stato iniziale, e della trasformata di Laplace del movimento forzato da $u(\cdot)$. Come sappiamo, questa non è che una delle varie forme in cui può esprimersi il *principio di sovrapposizione degli effetti*.

Applicando ora la trasformazione di Laplace all'equazione d'uscita, si ha:

$$Y(s) = C X(s) + D U(s) ;$$

quindi, sostituendo:

$$Y(s) = C (s I - A)^{-1} x(0) + [C (s I - A)^{-1} B + D] U(s) .$$

Anche in questa relazione, traspare il principio di sovrapposizione degli effetti. Ma c'è di più. Un semplice sguardo consente di rilevare che la trasformata di Laplace della risposta forzata da $u(\cdot)$, vale a dire dell'effetto prodotto da u su y , si ottiene pre-moltiplicando $U(s)$ per una funzione della variabile s che non dipende dal particolare ingresso preso in considerazione, ma solo da A, B, C e D ; cioè dal sistema S . La funzione

$$G(s) := C (s I - A)^{-1} B + D$$

è una matrice $p \times m$ il cui generico elemento $G_{hk}(\cdot)$ è la *funzione di trasferimento* di S , dall'ingresso u_k all'uscita y_h . Limitandoci alla risposta forzata ($x(0) = 0$), si ha infatti, per ogni $h = 1, 2, \dots, p$:

$$Y_h(s) = \sum_{k=1}^m G_{hk}(s) U_k(s) := \sum_{k=1}^m Y_{hk}(s) .$$

Nel caso in cui il sistema S abbia un solo ingresso e una sola uscita ($m=p=1$), $G(\cdot)$ è, con ogni evidenza, *la* funzione di trasferimento di S ; a parole, essa è quella particolare funzione di s che, moltiplicata per la trasformata di Laplace dell'ingresso, dà la trasformata di Laplace dell'effetto prodotto dall'ingresso sull'uscita. In tutti gli altri casi ($m + p > 2$), $G(\cdot)$ è invece una matrice di funzioni di trasferimento, detta per brevità *matrice di trasferimento* di S .

3. Prime proprietà delle funzioni di trasferimento

Fissiamo innanzitutto l'attenzione su un sistema S a un ingresso e un'uscita, lineare, tempo-invariante (verifichi il lettore come la possibilità stessa di definire una funzione di trasferimento non sussista nel caso di sistemi non lineari, o anche lineari ma tempo-varianti) descritto da:

$$S : \begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \\ y(t) = C x(t) + D u(t) \end{cases} .$$

La funzione di trasferimento di S è data da:

$$G(s) := C (s I - A)^{-1} B + D .$$

Per mettere in luce le principali proprietà di $G(s)$, cominciamo ad osservare che

$$(s I - A)^{-1} = \frac{1}{\det(s I - A)} \Theta(s)$$

dove $\Theta(s) := (s I - A)^*$ è una matrice di polinomi detta *aggiunta* di $s I - A$. Per ogni matrice quadrata M , l'aggiunta M^* è una matrice delle stesse dimensioni di M il cui generico elemento μ_{hk} è il complemento algebrico del corrispondente elemento di M' (la trasposta di M). In altri termini, μ_{hk} è dato da $(-1)^{h+k}$ moltiplicato per il determinante della matrice che si ottiene rimuovendo da M la k -esima riga e la h -esima colonna (rimuovendo, cioè, l'elemento M_{kh} con la riga e la colonna che lo riguardano). Dovrebbe dunque essere evidente che ogni elemento $\vartheta_{hk}(s)$ dell'aggiunta di $s I - A$ è un polinomio in s , al più di grado $n - 1$.

Ma

$$G(s) := C (s I - A)^{-1} B + D = \frac{1}{\det(s I - A)} C \Theta(s) B + D := \frac{b(s)}{a(s)} + D$$

dove: $a(s) := \det(s I - A)$ è il polinomio caratteristico di A , mentre

$$b(s) := C \Theta(s) B = \sum_{h=1}^n C_h \sum_{k=1}^n \vartheta_{hk}(s) B_k = \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^n \vartheta_{hk}(s) C_h B_k .$$

Si osservi che $b(s)$, essendo una combinazione lineare di polinomi di grado non superiore a $n - 1$, è essa stessa un polinomio di grado non superiore a $n - 1$.

Una breve riflessione consente anche di notare che, se $C_h = 0$, cioè se è nullo l' h -esimo elemento di C (che per ipotesi è un vettore riga), allora l' h -esima riga dell'aggiunta $\Theta(s)$ non concorre a determinare $G(s)$. Analogamente, se $B_k = 0$, allora la k -esima colonna di $\Theta(s)$ non concorre a determinare $G(s)$.

La funzione di trasferimento di S è, in ogni caso, una funzione razionale. Se S è dinamico in senso proprio ($D = 0$), $G(s)$ è razionale propria: il suo grado relativo, vale a dire la differenza fra il grado del denominatore e quello del numeratore, è maggiore di zero.

Ricordiamo che si chiamano *zeri* di $G(s)$ i valori di s in corrispondenza dei quali la funzione $G(\cdot)$ si annulla, mentre si chiamano *poli* di $G(s)$ i valori di s in corrispondenza dei quali la funzione $G(\cdot)$ va all'infinito. A prima vista, si potrebbe pensare che gli zeri di $G(s)$ siano le radici del numeratore, mentre i poli

di $G(s)$ siano le radici del denominatore. In realtà, non è sempre così. Può infatti accadere che numeratore e denominatore abbiano delle *radici in comune*, dove non è detto che la funzione $G(\cdot)$ si annulli, o vada all'infinito. Ad esempio, se

$$G(s) = \frac{10(s+3)}{(s+1)(s+3)^r} \quad , \quad r > 0 \quad ,$$

allora $\bar{s} = -3$ è palesemente una radice tanto del numeratore quanto del denominatore; ma non è uno zero di $G(s)$, ed è un polo solo se $r > 1$.

Sia ora $q(s)$ il massimo comun divisore di $a(s)$ e di $b(s)$; un polinomio, cioè, le cui radici siano tutte e sole quelle comuni ad $a(s)$ e $b(s)$. Sia inoltre:

$$a(s) := a_r(s) q(s) \quad , \quad b(s) := b_r(s) q(s)$$

allora

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)} + D = \frac{b_r(s)}{a_r(s)} + D = \frac{b_r(s) + D a_r(s)}{a_r(s)} \quad .$$

Ad esempio, se

$$G(s) = \frac{10(s+3)(s+5)^2}{(s+1)(s+3)^3(s+5)^2} + 2 \quad ,$$

allora: $q(s) = (s+3)(s+5)^2$, $a_r(s) = (s+1)(s+3)^2$, $b_r(s) = 10$ e quindi

$$G(s) = \frac{10 + 2(s+1)(s+3)^2}{(s+1)(s+3)^2} \quad .$$

Per definizione, i polinomi $a_r(s)$ e $b_r(s)$ sono *relativamente primi*; non hanno, cioè, radici in comune. Si noti che anche i polinomi $b_r(s) + D a_r(s)$ e $a_r(s)$ sono relativamente primi qualunque sia D . Infatti, una radice di $a_r(s)$ che fosse anche radice del polinomio $b_r(s) + D a_r(s)$ dovrebbe necessariamente essere una radice di $b_r(s)$, mentre $a_r(s)$ e $b_r(s)$ sono, per definizione, relativamente primi.

Una funzione di trasferimento nella quale il numeratore e il denominatore siano relativamente primi si dice in *forma ridotta* (o minima). Gli zeri di una funzione di trasferimento in forma ridotta sono le radici del numeratore; i poli sono le radici del denominatore.

Salvo contrario avviso, per funzione di trasferimento di un sistema S s'intende sempre la funzione di trasferimento in forma ridotta; quella cioè che si ottiene dopo aver eseguito, tra i polinomi $a(s)$ e $b(s)$, tutte le semplificazioni possibili.

Esempio. Sia:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -12 & -6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [3 \quad 4 \quad 2], \quad D = 0.$$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 8 & 12 & s+6 \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{A}_{hk}(s) = (-1)^{h+k} \det \mathbf{A}_{kh}(s)$$

$$\mathbf{A}_{11}(s) = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 12 & s+6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{21}(s) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 12 & s+6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{31}(s) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ s & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{12}(s) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 8 & s+6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{22}(s) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 8 & s+6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{32}(s) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{13}(s) = \begin{bmatrix} 0 & s \\ 8 & 12 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{23}(s) = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 8 & 12 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{33}(s) = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

$$\Theta(s) := (sI - A)^* = \begin{bmatrix} s(s+6)+12 & (s+6) & 1 \\ -8 & s(s+6) & s \\ -8s & -(12s+8) & s^2 \end{bmatrix}, \quad \Theta(s)B = \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ s^2 \end{bmatrix}$$

$$b(s) := C \Theta(s) B = [3 \quad 4 \quad 2] \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ s^2 \end{bmatrix} = 2s^2 + 4s + 3$$

$$a(s) := \det(sI - A) = s^2(s+6) + 8 + 12s = s^3 + 6s^2 + 12s + 8$$

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{2s^2 + 4s + 3}{s^3 + 6s^2 + 12s + 8}$$

Poiché il sistema considerato è dinamico in senso proprio ($D = 0$), la sua funzione di trasferimento è razionale propria: il grado relativo, uguale a 1, è maggiore di zero.

Possiamo ora chiederci se $G(s)$ sia in forma ridotta. Per questo, osserviamo che il denominatore è uguale a $(s + 2)^3$; ha, cioè, 3 radici coincidenti in -2 . A questo punto, è facile verificare che -2 non è una radice del numeratore $b(s)$; infatti $b(-2) = 3 \neq 0$, quindi $G(s)$ è in forma ridotta: tutte le radici del numeratore sono zeri di $G(s)$ e tutte le radici del denominatore sono poli di $G(s)$; inoltre, il denominatore coincide con il polinomio caratteristico di A quindi i poli di $G(s)$ sono *gli* autovalori di A .

Ma non è sempre così. Se, a parità di A e B , fosse stato, ad esempio:

$$C = [4 \quad 6 \quad 2]$$

si sarebbe ottenuto:

$$G(s) = \frac{2s^2 + 6s + 4}{s^3 + 6s^2 + 12s + 8} = 2 \frac{(s+1)(s+2)}{(s+2)^3} = 2 \frac{s+1}{(s+2)^2};$$

si sarebbe, cioè, riconosciuto che i due poli di $G(s)$ sono autovalori di A , ma non tutti gli autovalori di A (tre) sono poli di $G(s)$.

□

L'esempio appena discusso ha consentito di mettere in ulteriore evidenza che tutti i poli della funzione di trasferimento $G(s)$ di un sistema S (lineare, tempo-invariante, monovariabile) descritto dalle matrici (A, B, C, D) sono autovalori della matrice dinamica A , ma *non tutti gli autovalori di A sono necessariamente poli di $G(s)$* . Precisamente, con la notazione precedentemente introdotta, non sono poli di $G(s)$ gli autovalori di A che, annullando $b(s)$, producono una semplificazione. A questo punto dobbiamo chiederci perchè alcuni autovalori di A scompaiono da $G(s)$ a seguito di una semplificazione, e altri no. La questione ha ovviamente importanti conseguenze sulla possibilità di valutare la stabilità di S esaminandone la funzione di trasferimento.

Per chiarire i termini del problema, possiamo innanzitutto osservare che, per definizione, la funzione di trasferimento di un sistema S descrive il comportamento *ingresso-uscita* di S . Descrive, cioè, nel dominio della frequenza, l'effetto prodotto dall'ingresso sull'uscita. Appare dunque plausibile che non tutte le parti di un sistema articolato e composito partecipino a

determinare la relazione esistente fra l'ingresso e l'uscita. Ed è naturale che gli autovalori di quelle parti del sistema che non intervengono nella relazione ingresso-uscita non compaiano nella funzione di trasferimento. Ma quali parti di un sistema possono dimostrarsi estranee alla relazione ingresso-uscita? Che cosa le contraddistingue? Come possono essere individuate? E quali problemi pone la loro esistenza? Per rispondere a tutte queste domande occorre fare un passo indietro, tornare all'analisi nel dominio del tempo dei sistemi dinamici lineari tempo-invarianti ed esplorare un po' più a fondo la *struttura interna* del sistema. Dovremo innanzitutto mettere in evidenza come il medesimo sistema ammetta un'infinità di rappresentazioni equivalenti e, fra queste, quali siano quelle che ne descrivono nel modo più efficace la struttura interna. Tutto ciò ci porterà a riconoscere l'esistenza e l'importanza della cosiddetta *scomposizione canonica* di un sistema dinamico lineare tempo-invariante.

4. Rappresentazioni equivalenti di un medesimo sistema

Consideriamo un sistema S dinamico (in senso proprio), lineare e tempo invariante, descritto da una terna di matrici (A, B, C) :

$$S : \begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \\ y(t) = C x(t) \end{cases} .$$

Vedremo nel seguito come l'eventuale presenza di una connessione diretta fra l'ingresso e l'uscita ($D \neq 0$) non alteri in alcun modo le conclusioni raggiunte.

Lo scopo di questo paragrafo è mostrare come la corrispondenza fra sistema S e terne di matrici (matrice dinamica A , matrice d'ingresso B e matrice d'uscita C) sia tutt'altro che biunivoca. Vedremo anzi che il sistema S può essere descritto da un'infinità di terne diverse.

Per comprendere come questo possa accadere, è necessario ricordare che i vettori di un determinato insieme si dicono *linearmente indipendenti* se nessuno di essi può essere espresso come combinazione lineare degli altri. Ogni insieme di n vettori linearmente indipendenti di \mathbf{R}^n può costituire una *base*. Con riferimento a una determinata base $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$, gli elementi di un generico vettore $x_P \in \mathbf{R}^n$ possono essere interpretati come le *coordinate* di un punto P (Fig.4.1). Il punto P è pertanto un'utile rappresentazione geometrica del vettore x_P , rispetto alla base $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$.

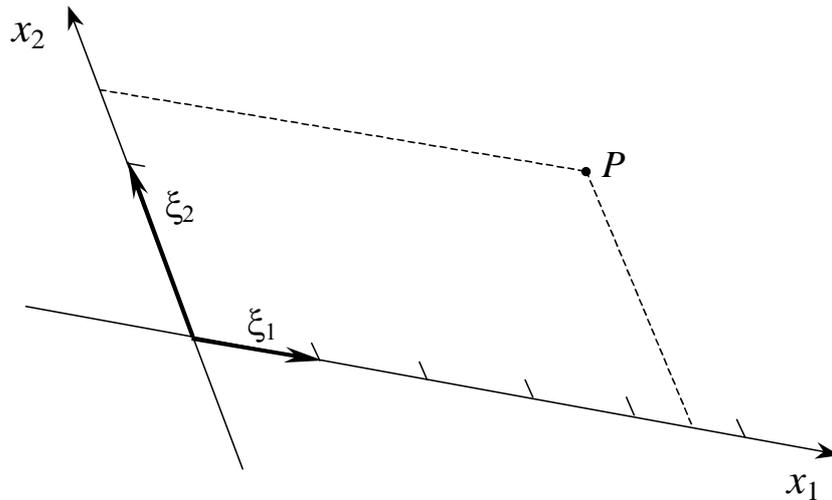


Fig. 4.1 : Con riferimento alla base $\{\xi_1, \xi_2\}$ di \mathbf{R}^2 , il punto P è una rappresentazione geometrica del vettore $x_P = [4.5 \ 1.5]'$.

Con riferimento all'esempio di Fig.4.1, si noti che ξ_1 rappresenta il vettore $[1 \ 0]'$, mentre ξ_2 rappresenta il vettore $[0 \ 1]'$. In generale, in ogni rappresentazione geometrica, gli elementi della base rappresentano le colonne della matrice identità.

Se si sceglie una base $\{\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n\}$ diversa da $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$, è evidente che le coordinate del punto P precedentemente considerato cambieranno. In altre parole, il medesimo punto P sarà la rappresentazione geometrica di un altro vettore che chiameremo z_P .

E' interessante chiedersi quale relazione intercorra fra il vettore x_P delle coordinate di P rispetto alla vecchia base e il vettore z_P delle coordinate di P rispetto alla nuova base. Una breve riflessione consente di concludere che tale relazione $\tau(\cdot)$ è una trasformazione lineare ($\tau(\alpha x) = \alpha \tau(x)$, $\tau(x_a + x_b) = \tau(x_a) + \tau(x_b)$), per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$ e ogni $x, x_a, x_b \in \mathbf{R}^n$; in altre parole, si avrà: $z = T x$, dove T è un'opportuna matrice $n \times n$. Per caratterizzare completamente la matrice T , indichiamo con x_1, x_2, \dots, x_n gli n vettori che, con riferimento alla vecchia base, individuano gli elementi della nuova. Sappiamo per altro come i vettori che individuano gli elementi della nuova base rispetto alla stessa nuova base siano semplicemente le colonne della matrice identità. Dunque, fissando l'attenzione sugli elementi della nuova base e indicando con X una matrice $n \times n$ avente come colonne i vettori x_1, x_2, \dots, x_n , dovrà essere: $T X = I$. Poiché i vettori che costituiscono una base sono, per definizione, linearmente indipendenti, X è certamente non singolare. Pertanto: $T = X^{-1}$.

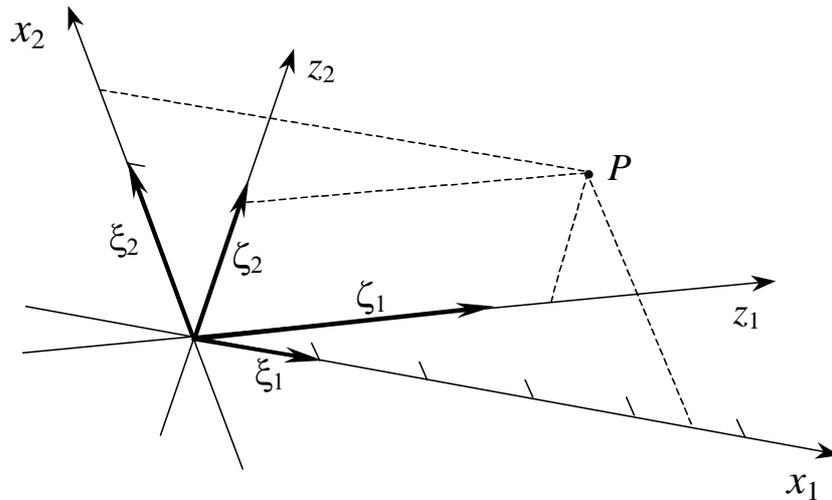


Fig. 4.2 : Cambiamento di base.

Con riferimento all'esempio di Fig.4.1, se gli elementi ζ_1 e ζ_2 della nuova base corrispondono, nella vecchia, ai vettori: $x_1 = [3 \ 0.5]'$ e $x_2 = [1 \ 1]'$, allora:

$$T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.4 \\ -0.2 & 1.2 \end{bmatrix} .$$

Il punto P che rispetto alla vecchia base era individuato dal vettore di coordinate $x_P = [4.5 \ 1.5]'$, rispetto alla nuova base è individuato dal vettore di coordinate $z_P = T x_P = [1.2 \ 0.9]'$ (Fig.4.2).

Tornando al sistema S introdotto all'inizio di questo paragrafo e descritto dalla terna di matrici (A, B, C) , ci chiediamo quali conseguenze produca sulla *descrizione* di S un cambiamento di base nello spazio di stato. E' ovvio per altro che un cosiffatto cambiamento non può alterare la natura del sistema, ma solo il modo di descriverlo.

Abbiamo visto come ad ogni cambiamento di base nello spazio di stato corrisponda una matrice T non singolare tale che il legame fra le nuove e le vecchie coordinate è dato da: $z = T x$. Per contro, ad ogni matrice T non singolare corrisponde uno specifico cambiamento di base nello spazio di stato.

Sia dunque:

$$z(t) = T x(t)$$

con T non singolare e per altro arbitraria; ovviamente, $x(t) = T^{-1} z(t)$.

Sostituendo, le equazioni di stato e di uscita di S diventano:

$$S : \begin{cases} T^{-1} \dot{z}(t) = A T^{-1} z(t) + B u(t) \\ y(t) = C T^{-1} z(t) \end{cases}$$

e quindi:

$$S : \begin{cases} \dot{z}(t) = T A T^{-1} z(t) + T B u(t) \\ y(t) = C T^{-1} z(t) \end{cases} .$$

La conclusione è che due terne (A, B, C) e $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ legate dalla relazione:

$$\tilde{A} := T A T^{-1} \quad , \quad \tilde{B} := T B \quad , \quad \tilde{C} := C T^{-1}$$

con T quadrata, non singolare e per altro arbitraria, descrivono *il medesimo sistema S*. Per questo motivo, le due terne possono dirsi *equivalenti*.

A riprova di quanto appena affermato, mostriamo che la risposta del sistema descritto dalla terna (A, B, C) , a partire da uno stato iniziale $x(0)$, sotto l'azione di un ingresso $u(\cdot)$ è identica alla risposta del sistema descritto dalla terna equivalente $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$, sotto l'azione del medesimo ingresso $u(\cdot)$, a partire dallo stato iniziale $z(0) = T x(0)$.

Per quanto riguarda la terna (A, B, C) , nel secondo capitolo avevamo trovato che

$$y(t) = C e^{A t} x(0) + C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau .$$

Analogamente, nel caso di un sistema descritto dalla terna $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$, si avrà:

$$\tilde{y}(t) = \tilde{C} e^{\tilde{A} t} z(0) + \tilde{C} \int_0^t e^{\tilde{A}(t-\tau)} \tilde{B} u(\tau) d\tau .$$

Ma, per definizione,

$$e^{\tilde{A} t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \tilde{A}^k t^k$$

e $\tilde{A}^2 = \tilde{A} \tilde{A} = T A T^{-1} T A T^{-1} = T A^2 T^{-1}$; più in generale: $\tilde{A}^k = T A^k T^{-1}$. Perciò:

$$e^{\tilde{A} t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \tilde{A}^k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} T A^k T^{-1} t^k = T \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k \right] T^{-1} = T e^{A t} T^{-1} .$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned} \tilde{y}(t) &= C T^{-1} T e^{A t} T^{-1} T x(0) + C T^{-1} \int_0^t T e^{A(t-\tau)} T^{-1} T B u(\tau) d\tau = \\ &= C e^{A t} x(0) + C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau = y(t) . \end{aligned}$$

Sempre a titolo di (sia pur scontato) esercizio, mostriamo che un sistema S a un ingresso e un'uscita descritto dalla terna (A, B, C) ha funzione di trasferimento identica a quella del sistema descritto da una terna equivalente $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$.

Per quanto riguarda il sistema descritto dalla terna (A, B, C) , sappiamo che:

$$G(s) = C (s I - A)^{-1} B .$$

Analogamente, la funzione di trasferimento del sistema descritto da $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ è data da:

$$\begin{aligned} \tilde{G}(s) &= \tilde{C} (s I - \tilde{A})^{-1} \tilde{B} = C T^{-1} (s I - T A T^{-1})^{-1} T B = C T^{-1} (T (s I - A) T^{-1})^{-1} T B = \\ &= C T^{-1} T (s I - A)^{-1} T^{-1} T B = C (s I - A)^{-1} B = G(s) ; \end{aligned}$$

è infatti facile riconoscere che, se M e N sono due matrici quadrate non singolari, $(M N)^{-1} = N^{-1} M^{-1}$.

La possibilità di descrivere il medesimo sistema con un'infinita varietà di terne, originate dalla scelta di diverse matrici T non singolari, suggerisce un *problema nuovo* e stimolante: dato un sistema S descritto dalla generica terna (A, B, C) , cercare una matrice T non singolare (una nuova base dello spazio di stato) tale che le matrici: $\tilde{A} := T A T^{-1}$, $\tilde{B} := T B$, $\tilde{C} := C T^{-1}$ assumano una forma particolarmente espressiva, interessante e utile: in una parola, una cosiddetta *forma canonica*. Avremo modo di tornare su questo punto nei paragrafi successivi.

Concludiamo invece questo paragrafo osservando che quando un modello matematico è costruito "dall'interno", descrivendo i fenomeni fisici elementari

che si verificano nel sistema reale e il modo in cui tali fenomeni interagiscono fra loro e con il mondo esterno, succede quasi sempre che le variabili di stato raccolte nel vettore x , e il valore da esse assunto, abbiano un preciso significato fisico, riferito a specifiche unità di misura. Naturalmente è estremamente raro che la stessa cosa possa dirsi per un insieme alternativo di variabili di stato legate alle precedenti dalla relazione: $z = T x$, con T non singolare ma per altro arbitraria. La cosa non ha, tuttavia, alcuna conseguenza di rilievo. Se, per il suo significato fisico, è interessante tenere in evidenza l'andamento nel tempo di una o più delle variabili di stato originarie (elementi di x), è sufficiente includere tali variabili nel vettore d'uscita y , adattando coerentemente la matrice C d'uscita.

5. La scomposizione canonica di Kalman

Per accostarci ai problemi connessi con la scelta di una base dello spazio di stato che sia particolarmente efficace nel rivelare la struttura interna di un assegnato sistema dinamico, consideriamo innanzitutto un sistema composito S' , strutturato nel modo indicato in Fig.5.1, dove sia S_a che S_b sono sistemi dinamici lineari tempo-invarianti, caratterizzati ciascuno da un vettore di variabili di stato x_a e x_b , rispettivamente. La Fig.5.1 dice che, nel sistema composito S' qui rappresentato, x_b dipende da x_a (può dipendere da x_a), mentre x_a è indipendente da x_b e da u . Quindi, ciò che accade in S_a è indipendente da u . Ne consegue che, nel sistema S' di Fig.5.1, l'effetto prodotto dall'ingresso u sull'uscita y , e quindi la funzione (o matrice) di trasferimento da u a y , è del tutto indipendente da come è fatto S_a : la funzione (o matrice) di trasferimento di S' coincide con quella di S_b e, come tale, è indipendente dagli autovalori della matrice dinamica di S_a . Poiché le variabili di stato di S_a sono indipendenti da u , diremo che S_a non è raggiungibile.

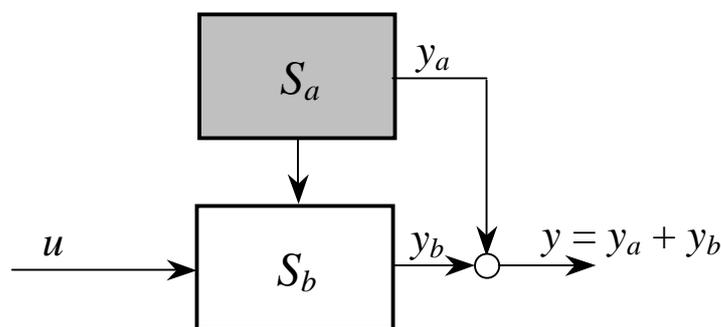


Fig. 5.1 : Sistema composito S' .

Specularmente, nel sistema composito S'' di Fig.5.2, è evidente che y è indipendente da quanto accade in S_a . L'effetto prodotto dall'ingresso u

Si noti che l'esame della Fig.5.3 consente di affermare con sicurezza che S_a e S_c non sono osservabili, ma non ci consente di dire se il resto di S , vale a dire S_b o S_d , contenga o meno altre parti non osservabili. Analogamente, possiamo dire che S_d e S_c non sono raggiungibili, ma non possiamo escludere che il resto di S , vale a dire S_a o S_b , contenga ancora altre parti non raggiungibili. Per essere certi di aver esercitato nella massima misura possibile la scomposizione messa in evidenza dalla Fig.5.3, si dovrebbe innanzitutto spostare in S_a ogni parte non osservabile e in S_d ogni parte non raggiungibile di S_b ; quindi, si dovrebbe spostare in S_c ogni parte non raggiungibile di S_a e ogni parte non osservabile di S_d . In questo modo, S_b sarebbe *interamente* raggiungibile ed osservabile: ogni sua parte contribuirebbe attivamente a determinare la relazione ingresso-uscita di S , mentre tutto il resto sarebbe estraneo alla relazione ingresso-uscita e quindi alla funzione (o matrice) di trasferimento di S .

Per comprendere meglio come quest'ultimo obiettivo di "completezza" della scomposizione possa essere perseguito, occorre esaminare più da vicino il nesso fra il modo in cui le parti del sistema S di Fig.5.3 interagiscono fra loro e la struttura delle matrici A , B , C che descrivono S .

Avendo indicato con x_a , x_b , x_c e x_d i vettori di stato di S_a , S_b , S_c e S_d , rispettivamente, poniamo: $x := [x_a' \quad x_b' \quad x_c' \quad x_d']'$. Allora, per coerenza con quanto espresso dalla Fig.5.3, dovrà essere:

$$A = \begin{bmatrix} A_a & A_{ab} & A_{ac} & A_{ad} \\ 0 & A_b & 0 & A_{bd} \\ 0 & 0 & A_c & A_{cd} \\ 0 & 0 & 0 & A_d \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_a \\ B_b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & C_b & 0 & C_d \end{bmatrix} .$$

Vale a dire che, ad esempio, il sistema S_b sarà descritto da:

$$S_b : \begin{cases} \dot{x}_b(t) = A_b x_b(t) + A_{bd} x_d(t) + B_b u(t) \\ y_b(t) = C_b x_b(t) \end{cases},$$

e così via per tutti gli altri. Si noti che gli zeri presenti nelle precedenti espressioni di A , B , C non sono semplici “numeri” ma, in generale, matrici nulle; cioè: matrici di dimensioni opportune e piene di zeri. C’è, quindi, un nesso evidente fra la trama delle interconnessioni del sistema composito S , illustrate in Fig.5.3, e la *struttura* delle matrici A , B , C ; dove per struttura s’intende, in questo caso, la presenza e la posizione di elementi *necessariamente* nulli all’interno delle suddette matrici (gli elementi delle matrici arbitrarie A_a , A_{ab} , ..., A_b , ..., , possono eventualmente ma non necessariamente essere nulli).

Sappiamo dal quarto paragrafo, che il sistema S , come ogni altro sistema lineare tempo-invariante, non è descritto da un’unica terna di matrici (A, B, C) ma, indifferentemente, da ognuna delle infinite terne $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ ad essa equivalenti. Pur supponendo che la terna (A, B, C) abbia una significativa struttura (zero)-(non zero), a riflesso della Fig.5.3, è evidente che tale struttura sarà del tutto scomparsa nelle terne $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$, che pure descrivono sempre il medesimo sistema di Fig.5.3. Ad esempio, se

$$A = \begin{pmatrix} -1.2 & -4 & 3 & -3 & 5 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0.1 & -3 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = [0 \mid 5 \quad -2 \mid 0 \mid 0.8]$$

e T è una qualsiasi matrice non singolare:

$$T = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 0 & 12 & 1 \\ 5 & 2 & 9 & 0 & -3 \\ 8 & -6 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -7 & 5 & 10 \\ 6 & -4 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det(T) = 13773$$

allora $\tilde{A} := T A T^{-1}$, $\tilde{B} := T B$ e $\tilde{C} := C T^{-1}$ hanno la forma seguente:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -0.9301 & 2.2010 & -2.6574 & 4.4951 & 1.8890 \\ 1.2933 & -5.4300 & -2.1430 & -5.2467 & 7.2445 \\ -1.2938 & -2.6773 & 17.6844 & -8.9686 & -23.8106 \\ -2.6140 & 2.6444 & 20.8980 & -2.5855 & -31.8103 \\ -0.6717 & -2.3705 & 11.8998 & -6.7478 & -15.5388 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} 15 \\ 33 \\ -30 \\ 0 \\ -18 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} -0.2250 & 0.6617 & -2.3191 & 1.4677 & 2.3908 \end{bmatrix}$$

dove si vede che ogni informazione sulla struttura interna di S (Fig.5.3) è completamente dissolta. Se ne deve dedurre che la struttura interna di un sistema (lineare), basata sulle nozioni di raggiungibilità e osservabilità, non è in generale deducibile da un esame superficiale delle matrici che lo descrivono. Data una terna $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ qualsiasi, la ricerca di una di quelle particolari terne equivalenti (A, B, C) capaci di rendere evidente la suddetta struttura non può che essere frutto di un'analisi molto più sottile e profonda. Un'analisi che consiste nel separare nettamente la parte raggiungibile dalla parte non raggiungibile e, contestualmente, la parte non osservabile dalla parte osservabile di S , culminando nell'individuazione di un'opportuna base dello spazio di stato (di un'opportuna trasformazione non singolare) capace di far passare dalla generica terna $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ a una terna strutturata (A, B, C) . Quella che ne risulta è la *scomposizione canonica*, detta anche *di Kalman* dal nome di chi, per primo, ha impostato e risolto correttamente il problema.

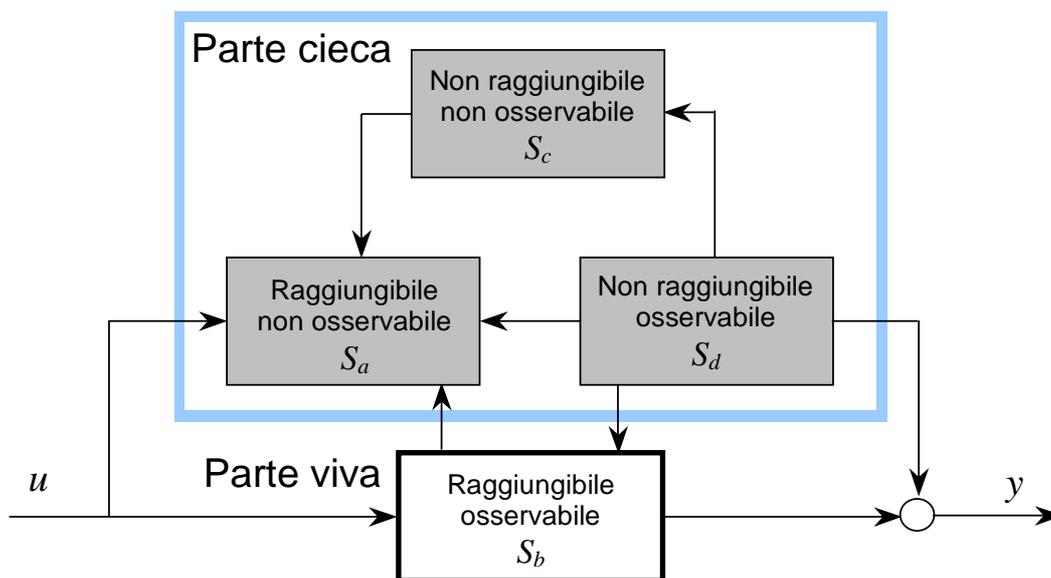


Fig. 5.4 : La scomposizione canonica.

La scomposizione canonica porta, in linea di principio, ad individuare quattro parti di ogni sistema dinamico S , sulla base dei concetti di raggiungibilità e osservabilità: la parte raggiungibile e osservabile, la parte raggiungibile ma non osservabile, la parte non raggiungibile ma osservabile e, infine, la parte non raggiungibile e non osservabile (Fig.5.4). Naturalmente, non è detto che le

quattro parti siano tutte presenti in ogni sistema: può benissimo accadere che, in un caso specifico, una o più di queste parti risulti vuota, cioè inesistente. Ad esempio, nel caso di sistemi relativamente piccoli, costruiti sulla base di una descrizione attenta dei fenomeni fisici elementari che notoriamente concorrono a determinare la relazione ingresso-uscita, è normale che l'intero sistema risulti raggiungibile e osservabile; che manchino quindi del tutto le parti non raggiungibili o non osservabili. Si noti tuttavia che quest'ultima osservazione non vale ad attenuare l'importanza dei concetti di raggiungibilità e osservabilità. Vedremo infatti nel seguito che, interconnettendo fra loro sistemi raggiungibili e osservabili, è possibile che si pervenga ad un sistema complessivo nel quale parti non raggiungibili o non osservabili sono invece presenti.

La nostra attenzione, in questo e nei capitoli che seguono, sarà essenzialmente concentrata sulla relazione ingresso-uscita dei sistemi in esame. Infatti, nei problemi che affronteremo, faremo sistematicamente e prevalentemente ricorso a descrizioni dei sistemi dinamici basate sulle funzioni di trasferimento. Da questo punto di vista, ciò che è essenziale nella scomposizione canonica è la distinzione fra la parte raggiungibile e osservabile, che concorre per intero a determinare la relazione ingresso-uscita di S , e tutto il resto (se c'è) che invece non vi concorre affatto. Con una terminologia che non è di uso corrente, ma è utile ad abbreviare e forse anche a rendere più incisive molte delle considerazioni che seguono, diremo che, con riferimento ad un ingresso u e ad un'uscita y , la parte raggiungibile e osservabile costituisce la *parte viva* di S , mentre tutto il resto ne costituisce la *parte cieca* (Fig.5.4). Questi ultimi aggettivi sono naturalmente suggeriti dall'osservazione che le strade senza uscita, ovvero i "vicoli ciechi", per quanto localmente utili e a volte inevitabili, non concorrono in alcun modo a quella che, da un punto di vista *esterno*, è invece la funzione primaria di una rete stradale, cioè rendere possibile l'attraversamento di una regione, o di una città.

Siamo ora in grado d'introdurre un concetto importante. Un sistema S , lineare e tempo-invariante, si dice *stabilizzabile* se la sua parte cieca, qualora esista, è asintoticamente stabile.

Naturalmente, le nozioni di stabilità (asintotica) e di stabilizzabilità non vanno confuse. Un sistema instabile, o non asintoticamente stabile, può essere stabilizzabile; è sufficiente, infatti, che tutti gli autovalori con parte reale non negativa, "responsabili" per così dire della non asintotica stabilità del sistema, appartengano alla sua parte viva (raggiungibile e osservabile). Per contro, un sistema asintoticamente stabile è certamente stabilizzabile! La terminologia appena introdotta relativamente al concetto di stabilizzabilità è coerente con il

fatto che un sistema la cui parte cieca non sia asintoticamente stabile non può essere reso asintoticamente stabile connettendolo con altri sistemi, comunque concepiti. Per contro, vedremo più avanti come sia sempre possibile, dato un sistema S stabilizzabile, trovare un altro sistema dinamico lineare e tempo-invariante che, connesso a S , rende il sistema complessivo asintoticamente stabile. In questo senso, un sistema stabilizzabile può in effetti “essere sempre reso asintoticamente stabile”.

6. Scomposizione canonica e funzione di trasferimento

Le considerazioni sviluppate nel paragrafo precedente consentono di trarre, nel caso di sistemi a un ingresso e un'uscita del tipo:

$$S : \begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \\ y(t) = C x(t) \end{cases},$$

le conclusioni seguenti:

- a) il legame fra l'ingresso u e l'uscita y è completamente ed esclusivamente descritto dalla parte viva (raggiungibile ed osservabile) di S ; pertanto, la funzione di trasferimento $G(s)$ non dipende dalla parte cieca di S e, in particolare, gli autovalori della parte cieca di S non sono poli di $G(s)$;
- b) il sistema S è stabilizzabile se e solo se gli autovalori di A che non sono poli di $G(s)$ hanno parte reale negativa; cioè: se e solo se è negativa la parte reale delle radici che $a(s) := \det(s I - A)$ ha in comune con $b(s) := C (s I - A)^* B$;
- c) se S è stabilizzabile, allora condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema sia asintoticamente stabile è che i poli di $G(s)$ abbiano parte reale negativa.

In conclusione: 1) un sistema non stabilizzabile è da ritenersi, dal nostro punto di vista, sostanzialmente privo di qualsiasi interesse pratico; 2) se un sistema è stabilizzabile, la sua parte cieca gioca, nella maggior parte dei problemi, un ruolo insignificante; 3) se un sistema è stabilizzabile la sua (asintotica) stabilità dipende esclusivamente dai poli della funzione di trasferimento.

Queste considerazioni potrebbero indurre a credere che circoscrivere qualunque trattazione di problemi che coinvolgano sistemi dinamici lineari e tempo-invarianti ai soli sistemi stabilizzabili, eventualmente affidando alla loro parte viva (raggiungibile e osservabile) o alla loro funzione di trasferimento il compito di descriverne il comportamento, sia accorgimento sufficiente ad

evitare errori e deduzioni ingannevoli. In realtà le cose non stanno sempre ed esattamente così. Nell'interconnettere sistemi dinamici stabilizzabili, può accadere (se non si presta attenzione) di pervenire (inavvertitamente) a sistemi composti non stabilizzabili. La questione esige ovviamente un approfondimento. Il tema sarà dunque ripreso negli ultimi paragrafi di questo capitolo, dove verrà introdotto ed illustrato un modo semplice, espressivo ed efficace di descrivere ed analizzare sistemi dinamici interconnessi, composti da elementi a un ingresso e un'uscita.

7. Funzione di trasferimento di un sistema in forma ingresso-uscita

Consideriamo un sistema S , a un ingresso e un'uscita, descritto da:

$$\begin{aligned} S : \quad \frac{d^n y}{dt^n}(t) + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}(t) + a_2 \frac{d^{n-2} y}{dt^{n-2}}(t) + \dots + a_n y(t) = \\ = b_1 \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}}(t) + b_2 \frac{d^{n-2} u}{dt^{n-2}}(t) + \dots + b_n u(t) \end{aligned}$$

Accingendoci ad applicare la trasformazione di Laplace a questa equazione, ricordiamo che, per definizione, la funzione di trasferimento di un sistema non dipende né dalle condizioni iniziali né dall'ingresso. Senza ledere la generalità, possiamo quindi supporre che i valori iniziali ($t=0$) dell'uscita, dell'ingresso e delle loro derivate siano nulli. Sotto questa ipotesi, si ha: $\mathcal{L} [d^k y/dt^k] = s^k Y(s)$; quindi, applicando a S la trasformazione di Laplace, si ottiene:

$$\begin{aligned} s^n Y(s) + a_1 s^{n-1} Y(s) + a_2 s^{n-2} Y(s) + \dots + a_n Y(s) = \\ = b_1 s^{n-1} U(s) + b_2 s^{n-2} U(s) + \dots + b_n U(s) \\ (s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n) Y(s) = (b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \dots + b_n) U(s) \\ G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \dots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n} := \frac{b(s)}{a(s)} \end{aligned}$$

La funzione di trasferimento $G(s)$ è razionale propria; quindi, il modello considerato è un sistema dinamico in senso proprio. In caso contrario (sistema dinamico improprio), nel secondo membro dell'equazione avrebbe dovuto essere presente anche la derivata n -esima di u .

Esempio

Il movimento di un pendolo semplice soggetto a una coppia al perno può essere descritto (Capitolo 1, Paragrafi 6 e 7) da:

$$S: \quad J \ddot{\vartheta}(t) + A \dot{\vartheta}(t) + m g L \sin(\vartheta(t)) = u(t).$$

Il sistema lineare δS tangente a S in una posizione di equilibrio $\bar{\vartheta}$ ha la forma:

$$\delta S: \quad J \delta \ddot{\vartheta}(t) + A \delta \dot{\vartheta}(t) + m g L \cos(\bar{\vartheta}) \delta \vartheta(t) = \delta u(t)$$

Per calcolarne la funzione di trasferimento, applichiamo a δS la trasformazione di Laplace supponendo, senza ledere la generalità, che le condizioni iniziali siano nulle ($\delta \vartheta(0) = \delta \dot{\vartheta}(0) = 0$):

$$J s^2 \Delta \Theta(s) + A s \Delta \Theta(s) + m g L \cos(\bar{\vartheta}) \Delta \Theta(s) = \Delta U(s)$$

$$(J s^2 + A s + m g L \cos(\bar{\vartheta})) \Delta \Theta(s) = \Delta U(s)$$

$$G(s) = \frac{\Delta \Theta(s)}{\Delta U(s)} = \frac{1}{J s^2 + A s + m g L \cos(\bar{\vartheta})} := \frac{\mu \omega_n^2}{s^2 + 2 \zeta \omega_n s + \omega_n^2}$$

dove, avendo posto $B := m g L \cos(\bar{\vartheta})$, sarà:

$$\omega_n^2 = \frac{B}{J}, \quad \zeta = \frac{A}{2 \sqrt{J B}}, \quad \mu = \frac{1}{B}.$$

Se (come comunemente accade) $0 < \zeta < 1$, allora i due poli di $G(s)$ sono effettivamente complessi coniugati (con pulsazione naturale ω_n e fattore di smorzamento ζ). Qualora però il coefficiente d'attrito A fosse così elevato da rendere maggiore o uguale a 1 il valore di ζ , allora $G(s)$ avrebbe poli reali e sarebbe più conveniente fare riferimento ad una forma fattorizzata del tipo:

$$G(s) = \frac{\rho}{(s - p_1)(s - p_2)} = \frac{\mu}{(1 + s T_1)(1 + s T_2)}$$

$$\rho = \frac{1}{J}, \quad p_1, p_2 = -\omega_n (\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1})$$

$$T_1 = \frac{-1}{p_1}, \quad T_2 = \frac{-1}{p_2}.$$

8. Realizzazioni di una funzione di trasferimento

In questo capitolo, abbiamo visto finora come si possa calcolare la funzione di trasferimento di un sistema lineare tempo-invariante, partendo da una sua descrizione nel dominio del tempo (in forma normale o in forma ingresso-uscita). In altre parole, abbiamo visto come passare da una descrizione del sistema nel dominio del tempo a una sua descrizione nel dominio della frequenza.

In questo paragrafo ci proponiamo di affrontare il problema inverso; quello, cioè, del passaggio da una descrizione del sistema nel dominio della frequenza ad una sua descrizione nel dominio del tempo (Fig.7.1, linee tratteggiate).

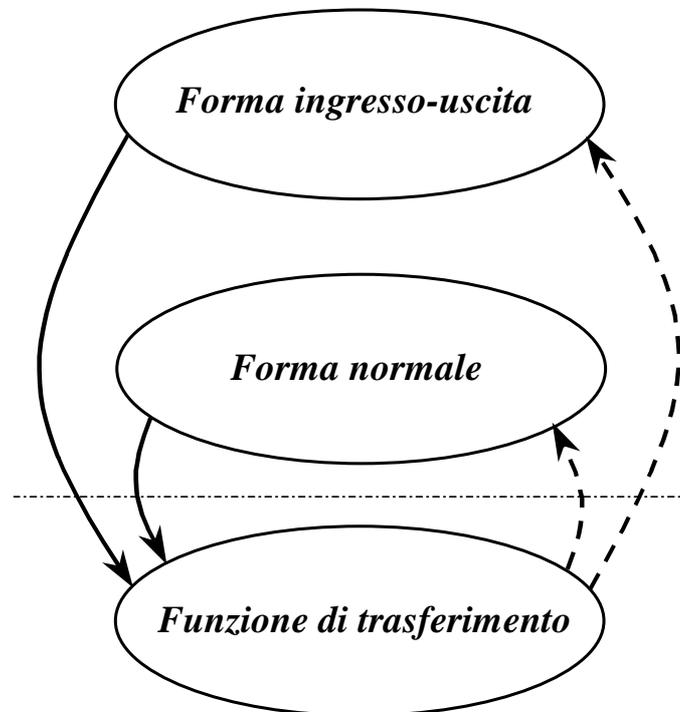


Fig. 7.1 : Passaggi dal dominio del tempo al dominio della frequenza, e viceversa.

Più precisamente, siamo interessati a risolvere il seguente *problema*. Data una funzione razionale $G(s)$, determinare un sistema dinamico (in forma normale o in forma ingresso-uscita) avente $G(s)$ come funzione di trasferimento.

Ogni sistema dinamico (nel dominio del tempo) che sia soluzione del suddetto problema è detto una *realizzazione* della funzione di trasferimento $G(s)$. Il problema della realizzazione di un'assegnata $G(s)$ è, dunque, un problema tutto ed esclusivamente matematico. Un problema da non confondere con quello, pure

di notevolissimo interesse, della *realizzazione fisica* di un sistema S , non importa se descritto nel dominio del tempo o della frequenza. Il problema della realizzazione fisica è infatti un problema di natura tecnologica, non matematica; esso consiste nel determinare un sistema fisico (elettronico, meccanico, elettromeccanico, pneumatico, idraulico o quant'altro) che imponga tra le sue variabili d'ingresso e d'uscita un legame uguale, ovvero sufficientemente simile, a quello descritto dal sistema (matematico) S da realizzare fisicamente.

8.1 *Realizzazioni in forma normale*

Cominciamo ad esaminare il caso di una funzione $G(\cdot)$ razionale propria:

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \dots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n}.$$

Una terna (A, B, C) tale che la funzione di trasferimento $C (s I - A)^{-1} B$ del sistema:

$$S : \begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \\ y(t) = C x(t) \end{cases},$$

coincida con quella data è costituita, come suggerito dall'esempio svolto nel Paragrafo 3, dalla *forma canonica di controllo*:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_2 & b_1 \end{bmatrix}$$

Un sistema S in forma canonica di controllo è raggiungibile. Se i polinomi $a(\cdot)$ e $b(\cdot)$ sono relativamente primi, cioè se $G(\cdot)$ è in forma ridotta (o minima), allora S è anche osservabile (non ha alcuna parte cieca).

La terna (A, B, C) , così come qualunque altra terna $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ ad essa equivalente (Paragrafo 4), descrive una realizzazione di $G(\cdot)$.

Una realizzazione raggiungibile e osservabile, priva quindi di parte cieca, di $G(\cdot)$ si dice *minima*. Poiché la funzione di trasferimento di un sistema non dipende dalla parte cieca, appare chiaro perchè le realizzazioni minime risultino in generale preferibili a tutte le altre. Se indichiamo con $G_r(\cdot)$ la forma ridotta di $G(\cdot)$, allora l'ordine di una *realizzazione minima* coincide con il grado del denominatore di $G_r(\cdot)$; quindi, una realizzazione minima è anche una realizzazione di ordine minimo. Se la funzione di trasferimento $G(\cdot)$ è in forma ridotta (o minima), la forma canonica di controllo ad essa associata, così come ogni altra terna di matrici ad essa equivalente, è una realizzazione minima.

Se $G(\cdot)$ non è razionale propria, è in ogni caso esprimibile come somma di una costante e una funzione razionale propria:

$$G(s) = \frac{d_0 s^n + d_1 s^{n-1} + d_2 s^{n-2} + \dots + d_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n} = \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \dots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n} + d_0 ,$$

dove $b_i := d_i - a_i d_0$. Pertanto, ponendo:

$$G_0(s) := \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \dots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n} ,$$

si ha:

$$Y(s) = G(s) U(s) = (G_0(s) + d_0) U(s) = G_0(s) U(s) + d_0 U(s) := Y_a(s) + Y_b(s) .$$

Se (A, B, C) è una realizzazione di $G_0(s)$, che per definizione è razionale propria, si avrà: $y(t) = y_a(t) + y_b(t)$, dove

$$S_a : \begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \\ y_a(t) = C x(t) \end{cases} ,$$

$$S_b : \quad y_b(t) = d_0 u(t) \quad .$$

Pertanto,

$$S : \begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \\ y(t) = C x(t) + D u(t) \end{cases} ,$$

con $D := d_0$, è una realizzazione di $G(\cdot)$.

Esempio. Sia:

$$G(s) = \frac{2s^4 + 5s^3 - 7s^2 + 3s - 4}{s^4 + 5s^3 + 9s^2 + s + 2}$$

la funzione di trasferimento da realizzare. Poiché $G(\cdot)$ non è razionale propria, osserviamo che:

$$G(s) = 2 + \frac{-5s^3 - 25s^2 + s - 8}{s^4 + 5s^3 + 9s^2 + s + 2} := 2 + \frac{b(s)}{a(s)} .$$

Pertanto, una realizzazione di $G(\cdot)$ è data dalla quaterna (A, B, C, D) , con:

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -9 & -5 \end{bmatrix} , \quad B := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C := [-8 \quad 1 \quad -25 \quad -5] , \quad D := 2 .$$

Con l'aiuto di un calcolatore, si determinano facilmente le radici di $a(\cdot)$ e di $b(\cdot)$, rispettivamente date da: $(-2.5075 \pm j 1.6006, 0.0075 \pm j 0.4753)$ e da $(-5.1007, 0.0504 \pm j 0.5578)$. Poiché i polinomi $a(\cdot)$ e $b(\cdot)$ sono relativamente primi (non hanno radici comuni) si può affermare che quella descritta da (A, B, C, D) è una realizzazione minima di $G(\cdot)$. E' parimenti una realizzazione minima di $G(\cdot)$ quella descritta dalla quaterna $(TAT^{-1}, TB, CT^{-1}, D)$, dove T è un'arbitraria matrice non singolare 4×4 (Paragrafo 4).

□

Concludiamo osservando che, se $G(s)$ è scalare, allora $(D = D')$:

$$C(sI - A)^{-1}B + D = (C(sI - A)^{-1}B + D)' = B'(sI - A')^{-1}C' + D' .$$

Quindi, se la quaterna (A, B, C, D) descrive una realizzazione (minima) di $G(s)$, anche il sistema descritto da (A', C', B', D) è una realizzazione (minima) di $G(s)$. Se (A, B, C) è una forma canonica di controllo, (A', C', B') è detta *forma canonica di osservazione*.

8.2 Realizzazioni in forma ingresso-uscita

Per la realizzazione in forma ingresso-uscita di una funzione di trasferimento razionale $G(\cdot)$, non è necessario distinguere fra funzioni razionali proprie e improprie. Sia dunque:

$$G(s) = \frac{d_0 s^n + d_1 s^{n-1} + d_2 s^{n-2} + \dots + d_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n} := \frac{d(s)}{a(s)} ,$$

che comprende in particolare anche il caso di una funzione razionale propria ($d_0=0$). Supponendo, senza ledere la generalità, che le condizioni iniziali siano nulle, possiamo scrivere: $Y(s) = G(s) U(s)$; cioè, continuando ad attribuire a s il significato di variabile complessa:

$$a(s) Y(s) = d(s) U(s) .$$

Ma a s può anche essere attribuito il significato di *operatore di derivata*, intendendo $s v(t)$ non come prodotto della variabile complessa s per la funzione del tempo $v(t)$ (che non ha alcun senso) ma come il valore assunto all'istante t da $s v$; cioè dal segnale conseguente all'applicazione dell'operatore s (di derivata) al segnale v . Tale segnale è precisamente \dot{v} , pertanto: $s v(t) := \dot{v}(t)$; e quindi, con una notazione già convenientemente adottata altrove, $s^k v(t) = v^{(k)}(t)$. In questo specifico ordine di idee, possiamo ottenere una realizzazione di $G(\cdot)$ in forma ingresso-uscita semplicemente attribuendo, nell'ultima equazione, ai polinomi $a(\cdot)$ e $d(\cdot)$ il significato operatoriale appena descritto:

$$a(s) y(t) = d(s) u(t)$$

$$(s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n) y(t) = (d_0 s^n + d_1 s^{n-1} + d_2 s^{n-2} + \dots + d_n) u(t)$$

$$\begin{aligned} y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y(t) &= \\ &= d_0 u^{(n)}(t) + d_1 u^{(n-1)} + d_2 u^{(n-2)} + \dots + d_n u(t) . \end{aligned}$$

La realizzazione in forma ingresso-uscita appena descritta è minima se $G(\cdot)$ è in forma ridotta (o minima), cioè se $a(\cdot)$ e $d(\cdot)$ sono relativamente primi.

Esempio. Se

$$G(s) = \frac{2s + 1}{s^2 + 0.5s + 3} ,$$

una realizzazione di $G(\cdot)$ in forma ingresso-uscita è data da:

$$(s^2 + 0.5s + 3) y(t) = (2s + 1) u(t)$$

$$\ddot{y}(t) + 0.5 \dot{y}(t) + 3 y(t) = 2 \dot{u}(t) + u(t) .$$

Poiché l'unica radice del numeratore è -0.5 e il denominatore non s'annulla in -0.5 , $G(\cdot)$ è in forma ridotta e, quindi, quella trovata è una realizzazione minima di $G(\cdot)$ in forma ingresso-uscita.



Una breve riflessione consente di riconoscere che, passando attraverso il calcolo della funzione di trasferimento e di una sua successiva realizzazione, è sempre possibile porre in forma normale un sistema dato in forma ingresso-uscita, e viceversa.

9. Funzioni di trasferimento in forma fattorizzata e ridotta: risposte canoniche, risposta costante a un ingresso costante (equilibrio)

Una funzione di trasferimento razionale $G(s)$ si dice in *forma fattorizzata* se i parametri che la descrivono sono direttamente legati ai poli e agli zeri di $G(s)$. Più precisamente, se i polinomi al numeratore e al denominatore di $G(s)$ sono espressi come prodotto di fattori elementari, al più di secondo grado. Ad esempio:

$$G(s) = \rho \frac{\prod_h (s - z_h)}{\prod_k (s - p_k)} .$$

In questa espressione, è naturale supporre che numeratore e denominatore non abbiano radici comuni, cioè che $G(s)$ sia in forma ridotta; allora gli z_h e i p_k rappresentano, rispettivamente, gli zeri e i poli di $G(s)$. La costante ρ si chiama *costante di trasferimento*. Ovviamente, poli e zeri possono essere tanto reali quanto, a coppie, complessi e coniugati.

Abbiamo già visto come sia spesso più conveniente rappresentare la coppie di poli o zeri complessi e coniugati attraverso la loro pulsazione naturale ed il loro fattore di smorzamento, limitando contestualmente le produttorie con indici h e k ai soli zeri e poli reali. In questo modo, la formulazione della funzione di trasferimento assume un aspetto solo apparentemente un po' più complicato:

$$G(s) = \rho \frac{\prod_h (s - z_h)}{\prod_k (s - p_k)} \frac{\prod_i (s^2 + 2 \hat{\zeta}_i \hat{\omega}_{ni} s + \hat{\omega}_{ni}^2)}{\prod_r (s^2 + 2 \zeta_r \omega_{nr} s + \omega_{nr}^2)} .$$

Altre volte, può essere conveniente mettere in evidenza, anziché gli zeri e i poli reali, le corrispondenti costanti di tempo ($T_h := -1/z_h$, $T_k := -1/p_k$), isolando contestualmente gli eventuali zeri o poli nell'origine:

$$G(s) = \frac{\mu}{s^g} \frac{\prod_h (1 + s T_h)}{\prod_k (1 + s T_k)} \frac{\prod_i (1 + 2 \hat{\zeta}_i \frac{s}{\hat{\omega}_{ni}} + \frac{s^2}{\hat{\omega}_{ni}^2})}{\prod_r (1 + 2 \zeta_r \frac{s}{\omega_{nr}} + \frac{s^2}{\omega_{nr}^2})} .$$

In questo caso, chiameremo *guadagno* la costante μ e *tipo* il numero g di poli (o zeri, se $g < 0$) nell'origine. Indicando con m il numero complessivo di zeri o poli reali non nulli di $G(s)$ ed estendendo solo a questi ultimi le produttorie in h e k , dovrebbe risultare evidente che:

$$\mu = (-1)^m \rho \frac{\prod_h z_h}{\prod_k p_k} \frac{\prod_i \hat{\omega}_{ni}^2}{\prod_r \omega_{nr}^2}.$$

9.1 Risposte canoniche

Le risposte canoniche (a impulso, scalino, rampa, parabola) di un sistema S a un ingresso e un'uscita descritto da:

$$S : \begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \\ y(t) = C x(t) + D u(t) \end{cases}$$

sono, per definizione, le risposte di S ad ingressi canonici di ampiezza unitaria, a partire da stato iniziale ($t = 0$) nullo. Le risposte canoniche sono dunque direttamente ed esclusivamente legate al comportamento ingresso-uscita di S ; cioè alla sua funzione di trasferimento.

Indicando, come ormai consueto, con $G(\cdot)$ la funzione di trasferimento di S , è immediato riconoscere che le trasformate di Laplace delle risposte canoniche sono date da:

$$\frac{1}{s^k} G(s) \quad , \quad k = \begin{cases} 0 & , & \text{risposta impulsiva} , \\ 1 & , & \text{risposta a scalino} , \\ 2 & , & \text{risposta a rampa} , \\ 3 & , & \text{risposta a parabola} . \end{cases}$$

Se $G(\cdot)$ è in forma fattorizzata, è naturale applicare alle trasformate delle risposte canoniche il metodo di Heaviside, stabilendo così un nesso immediato fra poli e zeri di $G(\cdot)$ e l'andamento nel tempo delle risposte stesse. Particolarmente interessante è il legame, anche solo a carattere qualitativo, che questa osservazione consente di stabilire fra la risposta a scalino e la funzione di trasferimento di un sistema asintoticamente stabile. Ad esempio, è naturale ed utile estendere, in questo modo, alla funzione di trasferimento l'importante nozione di *polo dominante*.

Fissando l'attenzione sul caso $k = 0$ (risposta impulsiva), è possibile sottolineare un'ulteriore fondamentale proprietà della funzione di trasferimento, che si riconosce coincidere con la trasformata di Laplace della risposta impulsiva. Per

questa ragione, indicheremo con $g(\cdot)$ la risposta impulsiva di un sistema avente $G(\cdot)$ come funzione di trasferimento. Ricordando la proprietà della trasformazione di Laplace relativa al prodotto di convoluzione e indicando con $y_f(\cdot)$ la risposta di S forzata da un ingresso $u(\cdot)$, vale a dire l'effetto prodotto da u su y , dalla relazione

$$Y_f(s) = G(s) U(s)$$

segue immediatamente che

$$y_f(t) = \int_0^t g(t - \tau) u(\tau) d\tau .$$

Questa relazione poteva anche essere dedotta dalla formula

$$y_f(t) = C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

dato che, per una nota proprietà integrale dell'impulso (Subparagrafo 6.1 del Capitolo 2), la risposta impulsiva di S è data da $g(t) = C e^{A t} B$.

9.2 Risposta costante a un ingresso costante (in condizioni di equilibrio)

Il problema della *risposta costante a un ingresso costante* (risposta a un ingresso costante in condizioni di equilibrio) è stato esaminato nel subparagrafo 6.2 del secondo capitolo, in preparazione all'analisi della risposta periodica a un ingresso periodico. Con riferimento a un sistema S descritto da:

$$S : \begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \\ y(t) = C x(t) + D u(t) \end{cases}$$

e soggetto a un ingresso costante \bar{u} , sappiamo che gli stati di equilibrio di S corrispondenti a \bar{u} sono le soluzioni dell'equazione:

$$A \bar{x} + B \bar{u} = 0 .$$

Uno stato di equilibrio \bar{x} forzato da \bar{u} esiste ed è unico se e solo se A è non singolare, cioè se e solo se A non ha autovalori nulli; altrimenti, o non ci sono stati di equilibrio o ce ne sono infiniti. Se A è non singolare, $\bar{x} = -A^{-1} B \bar{u}$; la corrispondente risposta costante di S all'ingresso \bar{u} è data da:

$$\bar{y} = C \bar{x} + D \bar{u} = (-C A^{-1} B + D) \bar{u} .$$

Ricordando che

$$G(s) = C (sI - A)^{-1} B + D$$

è la funzione di trasferimento di S , è immediato notare che, se A è non singolare, $G(0) = -C A^{-1} B + D$.

Di qui l'interessante conclusione che, se A è non singolare, $\bar{y} = G(0) \bar{u}$.

Supponendo, per le ragioni precedentemente discusse in questo capitolo, che S sia stabilizzabile, si può affermare che A è non singolare se e solo se $G(s)$ non ha poli nell'origine. Con riferimento alla forma fattorizzata di $G(s)$, che mette in evidenza guadagno, tipo e costanti di tempo, A è non singolare se e solo se $g \leq 0$. Inoltre, si riconosce immediatamente che:

$$G(0) = \begin{cases} \mu & , \quad \text{se } g = 0 \\ 0 & , \quad \text{se } g < 0 \end{cases} .$$

In particolare, se S è asintoticamente stabile, la risposta $y(t)$ forzata da un ingresso costante \bar{u} tende asintoticamente a $\bar{y} = G(0) \bar{u}$, qualunque sia lo stato iniziale del sistema.

Concludiamo questo paragrafo discutendo brevemente il caso $g > 0$; il caso, cioè, in cui la funzione di trasferimento $G(s)$ ha uno o più poli nell'origine. Sappiamo che, in virtù di una delle proprietà della trasformazione di Laplace, se

$$y(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau$$

allora

$$Y(s) = \frac{1}{s} U(s) .$$

Si dice, quindi, che $1/s$ è la funzione di trasferimento di un *integratore*. Se la funzione di trasferimento di un sistema S ha g poli nell'origine, si dice anche che in S sono presenti g integratori in cascata.

Consideriamo ora un integratore; vale a dire una qualsiasi realizzazione minima della funzione di trasferimento $1/s$; ad esempio,

$$\dot{y}(t) = u(t) .$$

Allora, tenendo conto della condizione iniziale del sistema "integratore", sarà:

$$y(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau + y(0) .$$

E' innanzitutto evidente che una risposta costante dell'integratore a un ingresso costante \bar{u} esiste se e solo se $\bar{u} = 0$. Inoltre, se $\bar{u} = 0$, le risposte costanti sono infinite: tante quanti sono i possibili valori iniziali di y . In altre parole, *in condizioni di equilibrio, l'ingresso di un integratore dev'essere nullo, mentre il valore costante dell'uscita può essere qualsiasi.*

Una breve riflessione consente di affermare che questa conclusione resta valida anche nel caso di g integratori in cascata e che, più in generale, la conclusione è valida per qualunque sistema (a un ingresso e un'uscita) la cui funzione di trasferimento $G(s)$ presenti poli nell'origine.

10. Risposta in frequenza, banda passante, risposta periodica

Dato un sistema dinamico S a un ingresso e un'uscita, descritto dalla funzione di trasferimento $G(s)$, si chiama *risposta in frequenza* di S l'immagine attraverso $G(\cdot)$ del semiasse immaginario positivo; l'insieme cioè dei valori assunti dalla funzione di trasferimento sul semiasse immaginario positivo:

$$\Gamma = \{G(j\omega), \omega \in [0, \infty)\} .$$

In altre parole, per ogni valore (non negativo) di ω , $G(j\omega)$ è un punto del piano complesso che rappresenta l'immagine attraverso $G(\cdot)$ del punto $j\omega$ e che, al variare di ω da zero all'infinito, descrive nel piano complesso una linea γ , da immaginarsi punteggiata in ω , che costituisce la più naturale (anche se non l'unica) rappresentazione della risposta in frequenza di S (Fig.9.1). La linea γ è detta *diagramma polare* della risposta in frequenza di S .

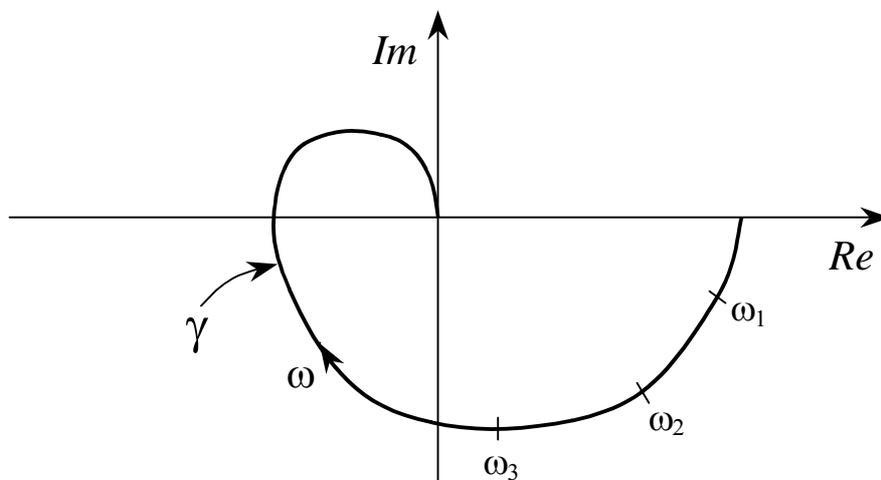


Fig. 9.1 : Rappresentazione polare della risposta in frequenza di S .

Si noti che, se S è un sistema dinamico in senso proprio, $G(s)$ è una funzione razionale propria e quindi il limite per ω che tende all'infinito di $G(j\omega)$ è zero (la linea γ tende all'origine).

La risposta in frequenza di un sistema dinamico lineare tempo-invariante *asintoticamente stabile* gode di due fondamentali proprietà: la prima è alla base della teoria classica dei filtri, la seconda è alla base dei metodi d'identificazione mediante ingressi periodici.

Proprietà 1

Se $u(\cdot)$ è \mathcal{F} -trasformabile (cioè: assolutamente integrabile o a energia finita) e se S è asintoticamente stabile, allora la risposta y_f forzata da u , vale a dire l'effetto prodotto da u su y , è \mathcal{F} -trasformabile e la sua trasformata (continua) di Fourier è data da:

$$Y_f(j\omega) = G(j\omega) U(j\omega)$$

dove $G(s)$ è la funzione di trasferimento di S , da u a y .



In un sistema asintoticamente stabile la risposta libera (l'effetto dello stato iniziale) tende asintoticamente a zero e può considerarsi trascurabile dopo un intervallo di tempo pari a 5÷8 volte la costante di tempo dominante (nel caso in cui sia dominante una coppia di poli complessi coniugati, la costante di tempo è l'inverso della parte reale dei due poli). Si comprende, allora, come la Proprietà 1 fornisca una chiave efficace per costruire sistemi capaci, con una forma opportuna della risposta in frequenza, di bloccare alcune componenti spettrali ritenute nocive, presenti nel segnale d'ingresso, e di esaltarne altre, ritenute invece informativamente interessanti (filtri). Una volta individuata la forma più conveniente della risposta in frequenza e, quindi, della funzione di trasferimento del filtro, occorre determinare una *realizzazione* (minima) di tale funzione di trasferimento. Il sistema dinamico S che ne risulta, simulato su calcolatore, consente di eseguire (“fuori linea”, come si suol dire) l'operazione di filtraggio richiesta. Se il filtro deve operare “in linea” e in tempo reale, è invece necessario un altro passo: occorre fare una *realizzazione fisica* del sistema S ; occorre, cioè, costruire un sistema fisico che, da una parte, sia tecnologicamente compatibile con la natura (elettrica, meccanica, termica, etc.) del segnale da filtrare (sia cioè in grado di “accettarlo” come segnale d'ingresso), dall'altra sia tale da imporre fra l'ingresso e l'uscita un legame corrispondente a quello descritto da S .

Strettamente legato alla risposta in frequenza e all'idea di filtro è la nozione di *banda passante* di un sistema lineare, tempo-invariante, a un ingresso e un'uscita. A sua volta, il concetto di banda passante è legato esclusivamente al

modulo della risposta in frequenza. Intuitivamente ed idealmente, la banda passante è costituita dall'insieme dei valori di ω in corrispondenza dei quali il modulo della risposta in frequenza è (significativamente) diverso da zero, mentre tutti gli altri valori di ω vanno a formare la *banda bloccata*. Ad evitare la necessità d'istituire una gerarchia fra bande più o meno passanti, è anche necessario che, sulla banda passante, il modulo della risposta in frequenza assuma sempre lo stesso valore (Fig.9.2).

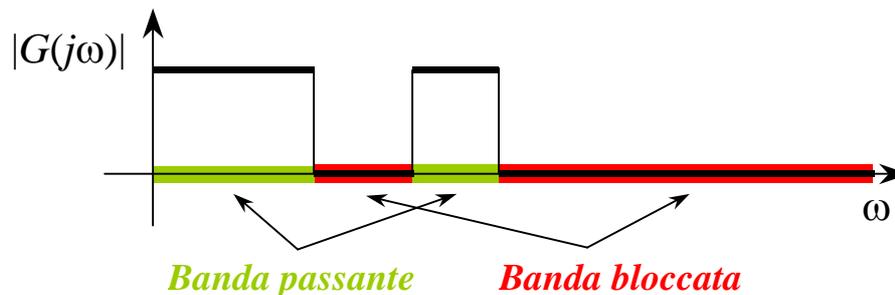


Fig. 9.2 : Banda passante e banda bloccata.

A guardar bene, però, le cose non sono così semplici. Il modulo della risposta in frequenza di un sistema asintoticamente stabile è una funzione *continua*, che non può essere costante (tanto meno nulla) su una banda limitata né può commutare bruscamente come la Fig.9.2 vorrebbe.

Ne consegue la necessità di dare, della banda passante e della banda bloccata, una *definizione convenzionale*. Entrambe, si basano sul concetto di *valore nominale* G_n del modulo della risposta in frequenza. Tale valore, assegnato a priori, può essere a volte posto uguale a 1 (ad esempio, nei filtri) oppure fissato a un livello molto maggiore di 1 (in certi amplificatori); a volte, è posto uguale al valore assunto dal modulo della risposta in frequenza a una particolare pulsazione ω_0 :

$$G_n := |G(j\omega_0)| .$$

Con riferimento a G_n , la **banda bloccata** è definita come l'insieme dei valori di ω tali che risulti $|G(j\omega)| \leq \alpha G_n$, con $\alpha \ll 1$ fissato di volta in volta, in rapporto alla particolare applicazione (valori tipici: 0.001 ÷ 0.100). Formalmente:

$$\mathbf{B}_b := \{ \omega : |G(j\omega)| \leq \alpha G_n \}$$

Non per tutti i sistemi è invece possibile parlare di banda passante. Affinché ciò sia effettivamente possibile, è necessario sia verificata una **condizione preliminare**, fissata convenzionalmente come segue:

$$|G(j\omega)| \leq \sqrt{2} G_n \quad , \quad \text{per ogni } \omega \geq 0 .$$

Se la condizione preliminare è verificata, allora la **banda passante** è l'insieme dei valori di ω tali che $|G(j\omega)| \geq G_n/\sqrt{2}$; formalmente:

$$B_p := \{ \omega : |G(j\omega)| \geq G_n/\sqrt{2} \} .$$

Si noti che, in base a queste definizioni, la banda passante e la banda bloccata non esauriscono l'intero asse delle ω ; fra le varie parti dell'una e dell'altra esistono degli intervalli di ampiezza finita detti **bande di transizione** (Fig.9.3).

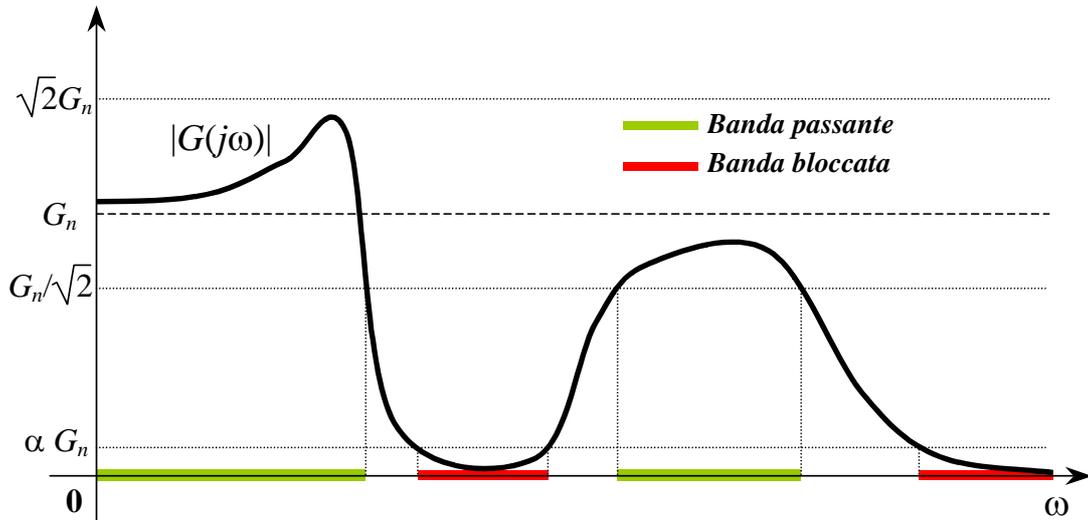


Fig. 9.3 : Risposta in frequenza reale. Banda passante, banda bloccata e bande di transizione.

Esempio

Consideriamo un segnale $u = w + r$, dove w è la componente utile, portatrice d'informazione, mentre r è "rumore". Sia inoltre noto che lo spettro di w insiste primariamente sulla banda $(0, 3)$ [rad/sec], mentre quello di r è prevalentemente concentrato sulla banda $(50, 200)$ [rad/sec]. Per rimuovere buona parte del rumore, proviamo ad adottare un filtro ($G_n = 1$) del second'ordine con banda passante $[0, 10)$ [rad/sec] e banda bloccata $[30, \infty)$ [rad/sec], con $\alpha = 0.1$:

$$G(s) = \frac{10^4}{s^2 + 20s + 10^4} .$$

Modulo e argomento della risposta in frequenza del filtro sono mostrati in Fig.9.4, dove è stata adottata la rappresentazione di Bode: scala logaritmica sull'asse delle pulsazioni e unità di misura logaritmica (decibel) per il modulo della risposta in frequenza:

$$|G(j\omega)|_{dB} := 20 \log_{10}|G(j\omega)|, \quad |G_n|_{dB}=0, \quad |\sqrt{2} G_n|_{dB}=3, \quad |G_n/\sqrt{2}|_{dB}=-3, \quad |\alpha G_n|_{dB}=-20;$$

l'argomento di $G(j\omega)$ è invece espresso in gradi.

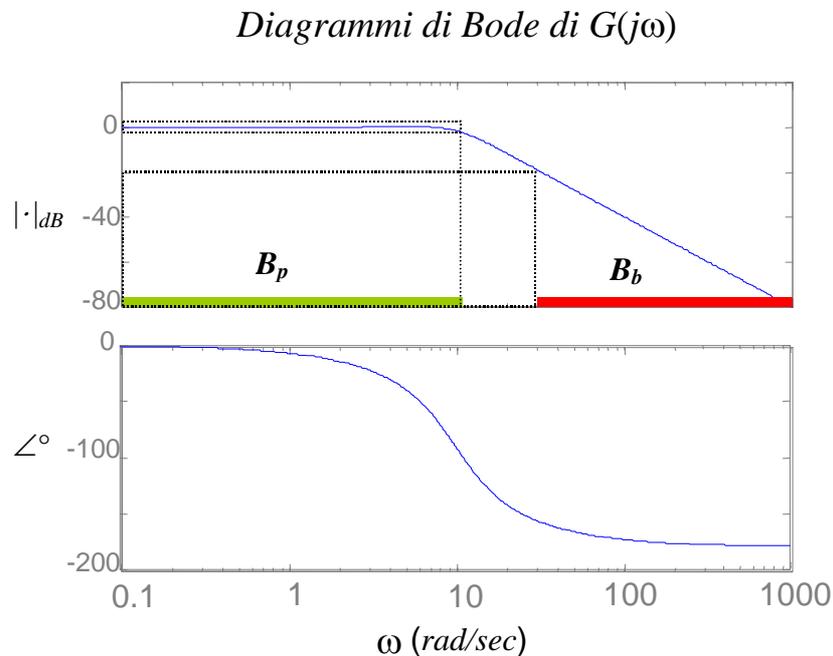


Fig. 9.4 : Diagrammi di Bode della risposta in frequenza del filtro.

In Fig.9.5 sono mostrati gli andamenti di w , r , $u = w + r$ e dell'uscita y del filtro inteso a rimuovere da u una parte consistente del rumore r .

Proprietà 2

Se l'ingresso $\tilde{u}(\cdot)$ di un sistema S asintoticamente stabile è una sinusoide di ampiezza A e pulsazione Ω , se cioè $\tilde{u}(t) = A \sin(\Omega t)$, allora la *risposta periodica* di periodo $T=2\pi/\Omega$ del sistema S all'ingresso $\tilde{u}(\cdot)$ esiste, è unica, ed è data da:

$$\tilde{y}_p(t) = B \sin(\Omega t + \vartheta)$$

dove

$$B := |G(j\Omega)| A \quad , \quad \vartheta := \angle G(j\Omega) .$$

□

Poiché ogni risposta del sistema S all'ingresso $\tilde{u}(\cdot)$, a partire da uno stato iniziale arbitrario, tende asintoticamente alla risposta periodica $\tilde{y}_p(\cdot)$, la Proprietà 2 suggerisce immediatamente un metodo per il rilievo sperimentale del valore

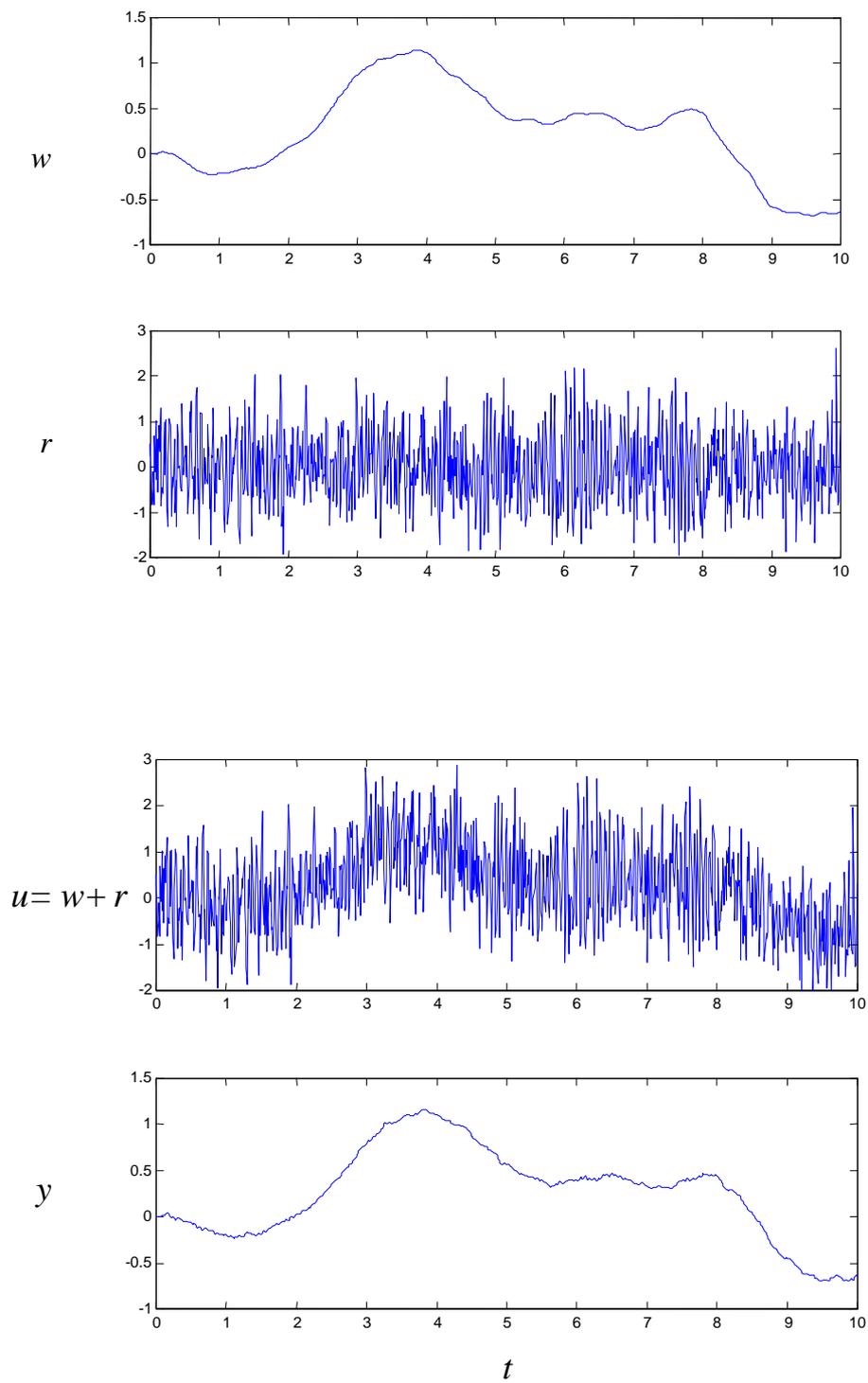


Fig. 9.5 : Azione del filtro sul segnale u affetto da rumore.

assunto dalla risposta in frequenza di S alla pulsazione Ω . Si tratta, infatti, di sollecitare il sistema con una sinusoide di ampiezza A e pulsazione Ω fissate; di attendere che la risposta abbia assunto un andamento sinusoidale e infine di misurare, oltre all'ampiezza B della sinusoide d'uscita, anche il suo sfasamento φ rispetto alla sinusoide d'ingresso. Sarà quindi: $|G(j\Omega)| = B/A$, $\angle G(j\Omega) = \varphi$.

Ripetendo l'esperimento con diversi valori di Ω , si può rilevare (per punti) la risposta in frequenza di S su un'opportuna banda di pulsazioni.

Corollario

Se l'ingresso $\tilde{u}(\cdot)$ di un sistema S asintoticamente stabile è periodico di periodo (fondamentale) T (di pulsazione fondamentale $\Omega=2\pi/T$), se cioè (ricordando la trasformazione di Fourier discreta per segnali a tempo continuo e, in particolare, lo sviluppo in serie di Fourier di un segnale periodico):

$$\tilde{u}(t) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \tilde{U}(h) e^{jh\Omega t} = M(0) + 2 \sum_{h=1}^{\infty} M(h) \cos(h\Omega t + \varphi(h)) \quad , \quad \tilde{U}(h) := M(h) e^{j\varphi(h)}$$

allora, per il principio di sovrapposizione degli effetti, la *risposta periodica* di periodo $T=2\pi/\Omega$ del sistema S all'ingresso $\tilde{u}(\cdot)$ esiste, è unica, ed è data da:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_p(t) &= \sum_{h=-\infty}^{\infty} \tilde{U}(h) G(jh\Omega) e^{jh\Omega t} = \\ &= M(0) G(0) + 2 \sum_{h=1}^{\infty} M(h) G_h \cos(h\Omega t + \varphi(h) + \gamma_h) \quad , \end{aligned}$$

dove: $G_h := |G(jh\Omega)|$, $\gamma_h := \angle G(jh\Omega)$. In particolare, se $\tilde{u}(\cdot)$ fosse "costruito" in modo tale da avere tutte le armoniche in fase e di ampiezza costante, cioè se fosse $\tilde{U}(h) = A$ per ogni h , allora dividendo per A la trasformata di Fourier discreta della risposta periodica $\tilde{y}_p(\cdot)$ si otterrebbe direttamente un campionamento, con passo Ω , della risposta in frequenza di S .

11. Sistemi a infinite dimensioni

Lo stato dei sistemi dinamici visti finora (descritti da equazioni differenziali ordinarie) è specificato dal valore assunto, all'istante t , da n variabili reali (gli elementi del vettore di stato), con n finito. Il numero n delle variabili di stato è,

per definizione, l'ordine del sistema. I sistemi il cui stato vive in uno spazio n -dimensionale, come \mathbf{R}^n , con n finito, si dicono *a dimensioni finite*.

Nei sistemi lineari tempo-invarianti a dimensioni finite, tutte le funzioni di trasferimento, da qualunque variabile d'ingresso a qualunque variabile di uscita (o di stato) sono razionali. Razionale è anche, per la stessa ragione, la trasformata di Laplace $C (s I - A)^{-1} x(0)$ dell'effetto prodotto dallo stato iniziale su qualunque variabile di uscita (o di stato). Una brevissima riflessione consente di concludere che *tutti i segnali presenti in un sistema lineare tempo-invariante a dimensioni finite, soggetto a ingressi a trasformata razionale, sono a trasformata razionale*.

Naturalmente, non tutti i sistemi dinamici sono a dimensioni finite: esistono anche sistemi dinamici *a dimensioni infinite*. Sistemi, cioè, il cui stato corrisponde, ad ogni istante, ad un punto di uno spazio a infinite dimensioni, per individuare il quale non basta un numero finito di numeri reali; ad esempio, lo spazio delle funzioni reali definite su un intervallo qualsiasi. Vediamo due classi significative di sistemi a infinite dimensioni.

1) Sistemi contenenti ritardi puri

Chiamiamo *ritardo puro di durata τ* un sistema (Fig.10.1-a) la cui uscita y assume, in ogni istante, il valore che l'ingresso u aveva τ *udt* prima, dove con *udt* si è indicata, per brevità, l'unità di tempo che si è ritenuto opportuno adottare (secondi, minuti o anni che siano).

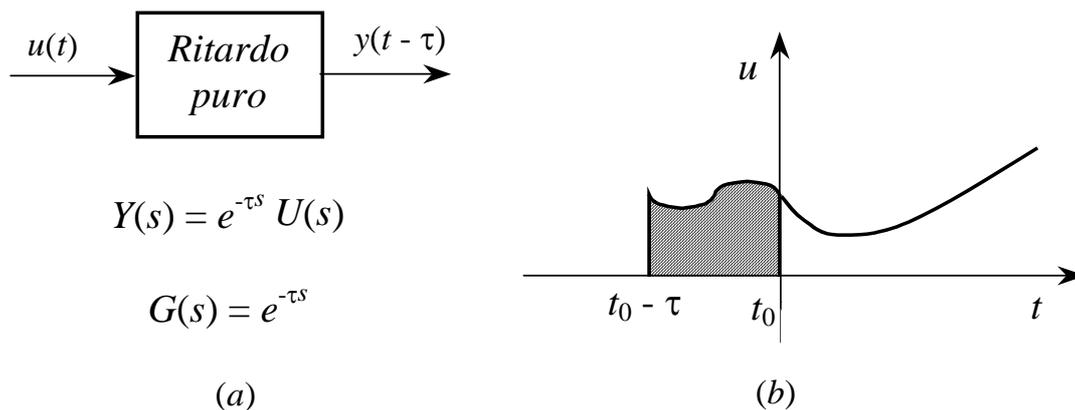


Fig. 10.1 : Ritardo puro di durata τ .

Per una nota proprietà della trasformazione di Laplace, se $y(t) = u(t - \tau)$ per ogni t , allora $Y(s) = e^{-\tau s} U(s)$. Dunque, $e^{-\tau s}$ è la funzione di trasferimento del ritardo puro. Ma $e^{-\tau s}$ non è una funzione razionale. Dobbiamo indurne che il ritardo puro, palesemente lineare e tempo-invariante, non è un sistema a dimensioni finite.

Chiediamoci a questo punto, a maggior chiarimento, come possa essere specificato, in un generico istante t_0 , lo stato di un ritardo puro. Una breve riflessione consente di riconoscere che lo stato di un cosiffatto sistema può essere rappresentato dall'andamento *passato* di $u(\cdot)$ sull'intervallo $[t_0-\tau, t_0)$. Questa informazione, infatti, aggiunta all'andamento di u da t_0 in poi, consente di determinare univocamente l'andamento di y da t_0 in poi (Fig.10.1-b).

2) Sistemi dinamici a parametri distribuiti

Si tratta di sistemi descritti da *equazioni differenziali alle derivate parziali* nelle quali alcune variabili dipendenti x_i sono funzioni, oltre che del tempo t , anche di una variabile spaziale (eventualmente vettoriale) che qui indichiamo con σ . Nelle "equazioni di stato" di questi sistemi compaiono le derivate parziali delle variabili x_i tanto rispetto a t quanto rispetto a σ .

Fra ogni ingresso e ogni uscita di un sistema a parametri distribuiti *lineare e invariante nel tempo* esiste una funzione di trasferimento $G(s)$ o $G(s, \sigma)$, generalmente *non* razionale in s .

Raramente un problema di controllo relativo a un sistema a parametri distribuiti viene risolto sulla base di questa prima e relativamente sofisticata descrizione. Spesso la difficoltà viene per così dire aggirata formulando e risolvendo preliminarmente un interessante problema di *approssimazione a dimensioni finite* di un sistema a infinite dimensioni.

12. Schemi a blocchi

La relazione ingresso-uscita di un sistema dinamico S lineare, tempo-invariante, a un ingresso e un'uscita, è descritta dalla sua funzione di trasferimento $G(\cdot)$. Componendo ed interconnettendo (linearmente) tra loro sistemi dinamici lineari, tempo-invarianti, a un ingresso e un'uscita, è possibile formare sistemi a più ingressi e più uscite notevolmente complessi, per la descrizione dei quali risultano estremamente efficaci gli *schemi a blocchi*. Gli elementi costitutivi di uno schema a blocchi sono tre: le *linee orientate*, o *frecce*, eventualmente dotate di *punti di diramazione*, i *blocchi* e i *nodi sommatori* (Fig.11.1). Ad ogni linea orientata è associata una variabile; ad ogni blocco, una funzione di trasferimento (dall'unico ingresso all'unica uscita); un nodo sommatore può avere molti ingressi, ma sempre una sola uscita pari alla somma algebrica degli ingressi, secondo i segni disposti accanto ad ogni freccia entrante nel nodo (l'assenza di segno dev'essere interpretata come un segno +).

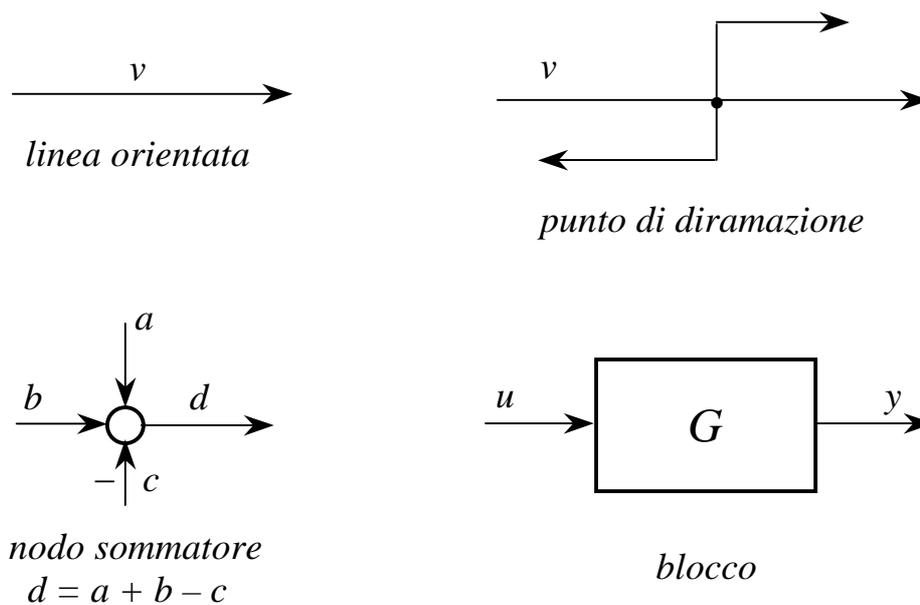


Fig. 1.11 : Elementi costitutivi di uno schema a blocchi.

Con questi elementi, è possibile visualizzare efficacemente le relazioni descritte da un *insieme di equazioni lineari algebriche*. Ad esempio, se le variabili $y^\circ, y, e, d, u_1, u_2, u$ di un sistema interconnesso S sono legate dalle equazioni

$$e = y^\circ - y, \quad u_1 = R e, \quad u_2 = -H y, \quad u = u_1 + u_2 - d, \quad y = G u,$$

il sistema S è visivamente descritto dallo schema a blocchi di Fig.11.2.

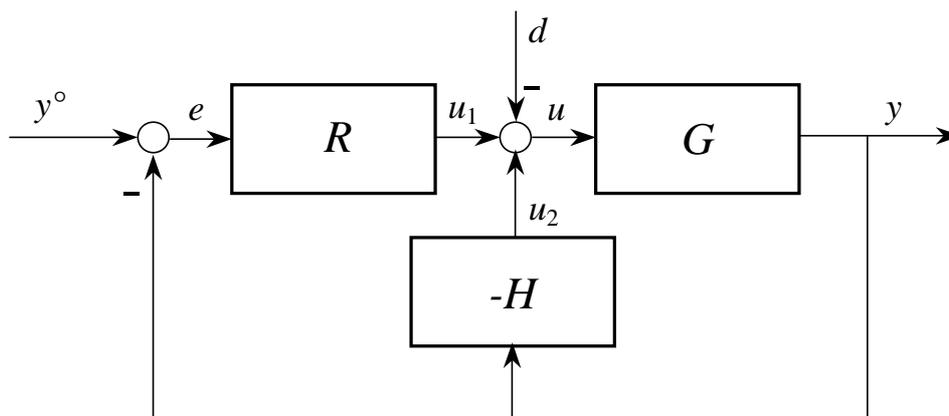


Fig. 11.2 : Schema a blocchi del sistema S .

Algebra degli schemi a blocchi

Il più tipico dei problemi che si prestano ad essere risolti mediante l'impiego di schemi a blocchi è il *calcolo della funzione di trasferimento* da uno degli ingressi a una qualunque delle variabili presenti nello schema a blocchi, presa come variabile d'uscita. Tale calcolo può essere eseguito applicando, in opportuna sequenza, alcune *regole elementari per l'elaborazione degli schemi a blocchi*, la semplice "dimostrazione" delle quali è lasciata al lettore. Le regole sono le seguenti (Figg.11.3-11.7).

1. Blocchi in cascata

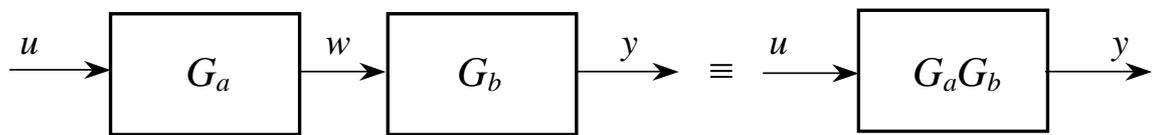


Fig. 11.3 : Blocco esternamente equivalente a due blocchi in cascata.

2. Blocchi in parallelo

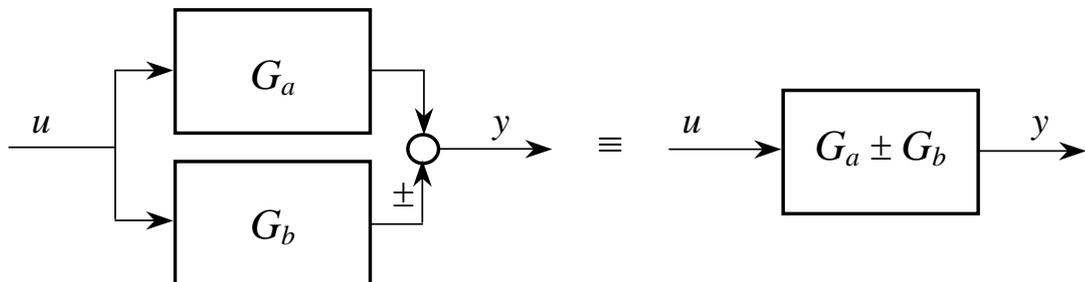


Fig. 11.4 : Blocco esternamente equivalente a due blocchi in parallelo.

3. Spostamento di un blocco a valle di un nodo sommatore

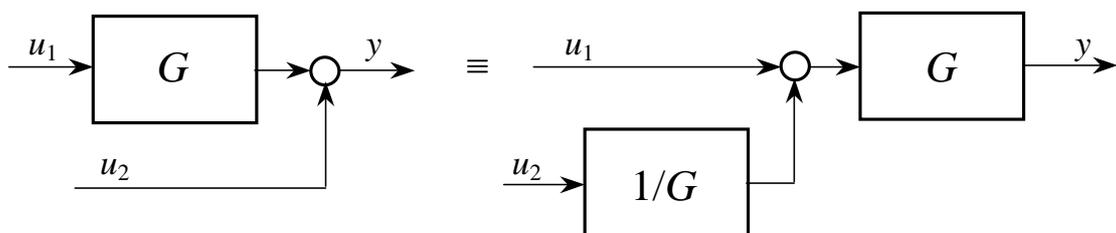


Fig. 11.5 : Schemi a blocchi esternamente equivalenti.

4. *Spostamento di un blocco a monte di un nodo sommatore*

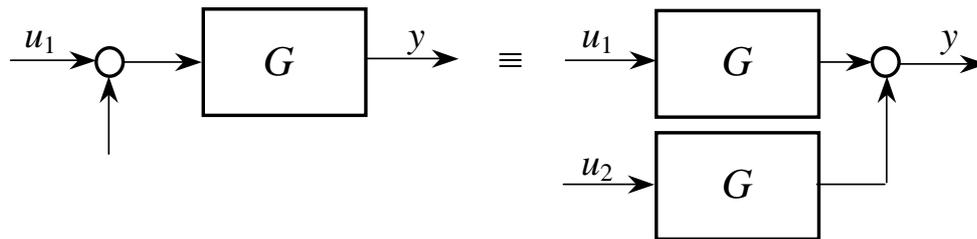


Fig. 11.6 : Schemi a blocchi esternamente equivalenti.

5. *Blocchi in retroazione*

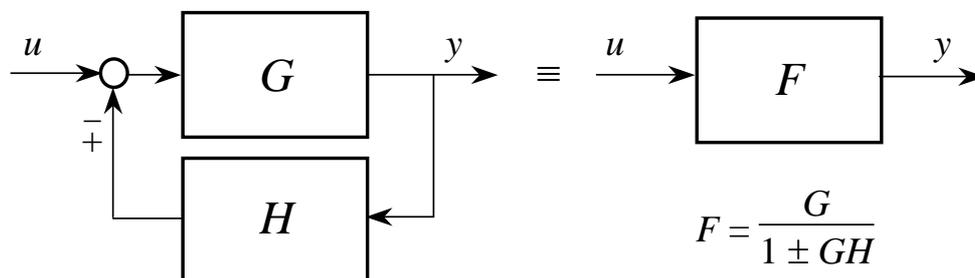


Fig. 11.7 : Blocco esternamente equivalente a due blocchi in retroazione.

Esempio

Calcolare la funzione di trasferimento F , da y° a y , del sistema S di Fig.11.8.

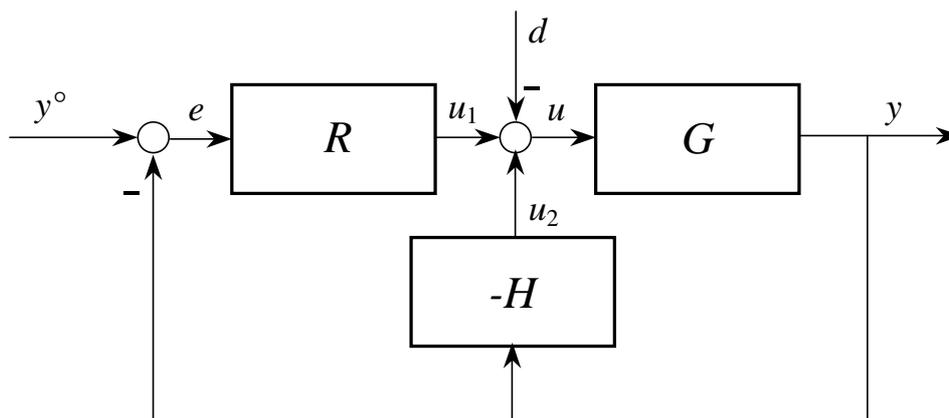


Fig. 11.8 : Schema a blocchi del sistema S .

Osserviamo, innanzitutto, che la funzione di trasferimento da y° a y non dipende (per definizione) dalla presenza o meno di altri ingressi. Quindi, nel calcolo di F , possiamo eliminare senz'altro l'ingresso d . Successivamente, il lettore potrà, a titolo di esercizio, calcolare la funzione di trasferimento da d a u_2 .

La “strategia” da impiegare, nel calcolo della funzione di trasferimento, consiste nell’applicare le regole elementari di elaborazione degli schemi a blocchi con l’obiettivo di ridurre l’intero schema di Fig.11.8 ad un unico blocco avente come ingresso y° e come uscita y . A quel punto, nel blocco si leggerà la F cercata.

Con questo obiettivo, possiamo cominciare a spostare il blocco R a monte del nodo sommatore che genera e . Otterremo così lo schema a blocchi di Fig.11.9.

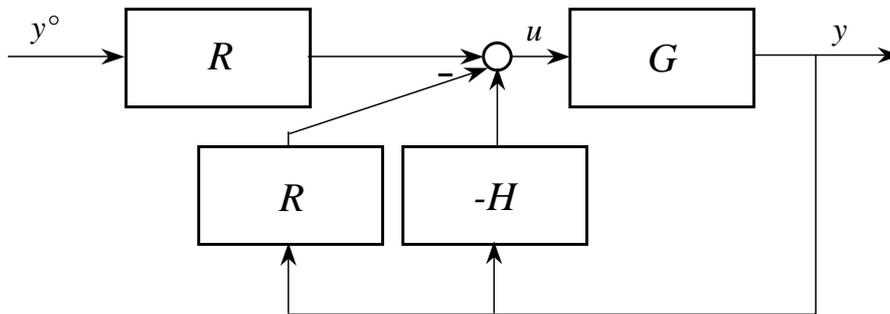


Fig. 11.9 : Schema a blocchi esternamente equivalente a quello di Fig.11.8.

I blocchi R e $-H$, che sono “in parallelo” (Fig.11.9), si possono ridurre ad un unico blocco, tenendo ovviamente debito conto del modo in cui le loro uscite si “ricongiungono”. Così facendo, si perviene allo schema a blocchi di Fig.11.10.

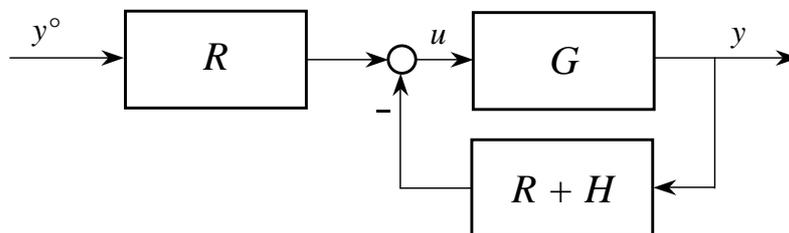


Fig. 11.10 : Schema a blocchi esternamente equivalente a quello di Fig.11.9.

Infine, ricordando la quinta e la prima regola elementare di elaborazione degli schemi a blocchi, si perviene ad un unico blocco, e quindi alla determinazione della funzione di trasferimento cercata (Fig.11.11).

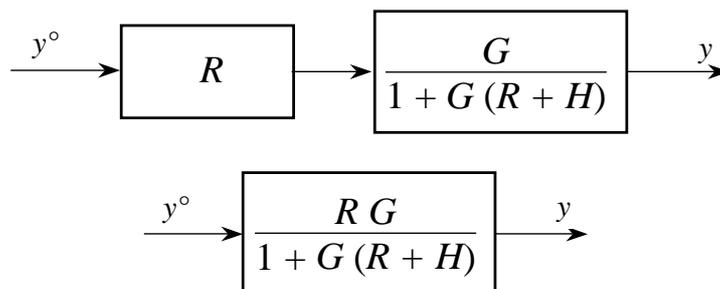


Fig. 11.11 : Schemi a blocchi esternamente equivalenti a quello di Fig.11.10.

13. Analisi della stabilità di sistemi descritti da schemi a blocchi

La descrizione di un sistema interconnesso fornita da uno schema a blocchi è sempre corretta dal punto di vista esterno; dal punto di vista, cioè, delle relazioni ingresso-uscita. Essa può dimostrarsi adeguata anche dal punto di vista dell'analisi di stabilità solo se *ogni blocco* dello schema rappresenta un sistema *stabilizzabile*; adeguatamente descritto, cioè, anche per quanto riguarda la stabilità, dalla funzione di trasferimento del blocco (o da una sua realizzazione minima).

Una considerazione analoga vale per le *regole di elaborazione degli schemi a blocchi*, che sono sempre corrette dal punto di vista esterno (calcolo delle funzioni di trasferimento), ma non garantiscono che i sistemi descritti dagli schemi a blocchi di partenza e d'arrivo siano equivalenti anche dal punto di vista dell'analisi di stabilità. Per questo, la loro applicazione a questo secondo fine esige che vengano rispettate alcune semplici cautele. Per metterle in evidenza, rivediamo con attenzione le cinque regole elementari introdotte nel paragrafo precedente.

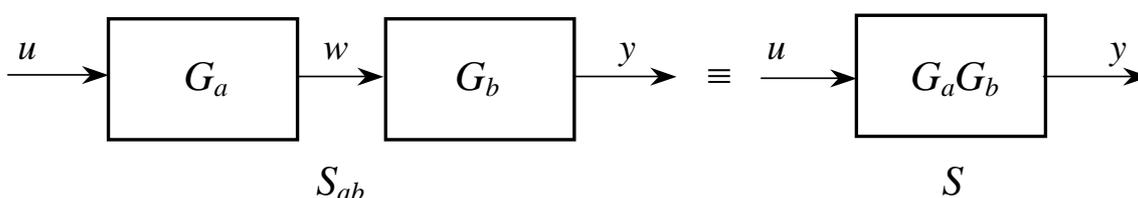


Fig. 12.1 : Blocchi in cascata.

Cominciamo ad esaminare il caso di due blocchi in cascata (Fig.12.1). Sia, ad esempio:

$$G_a(s) = \frac{k_1}{(s - \alpha)(s - \beta)} \quad , \quad G_b(s) = \frac{k_2 (s - \alpha)}{(s - \gamma)^2} \quad , \quad \alpha \neq \gamma \quad ;$$

Allora:

$$G(s) := G_a(s) G_b(s) = \frac{k_1 k_2}{(s - \beta)(s - \gamma)^2} \quad .$$

Che l'equivalenza fra i sistemi S_{ab} e S di Fig.12.1 riguardi solo il comportamento esterno è reso evidente da una semplice osservazione. Se, coerentemente con l'ipotesi implicita inerente alla descrizione di qualsiasi sistema dinamico mediante uno schema a blocchi, si costruisce una realizzazione di S_{ab}

connettendo secondo lo schema realizzazioni minime di $G_a(\cdot)$ e di $G_b(\cdot)$, si ottiene un sistema del quart'ordine mentre ogni realizzazione minima di $G(\cdot)$ è palesemente del terz'ordine. Nei dettagli:

$$\mathbf{S}_a : \begin{cases} \dot{x}_a(t) = A_a x_a(t) + B_a u(t) \\ w(t) = C_a x_a(t) \end{cases} \quad \mathbf{S}_b : \begin{cases} \dot{x}_b(t) = A_b x_b(t) + B_b w(t) \\ y(t) = C_b x_b(t) \end{cases}$$

$$A_a := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha \beta & \alpha + \beta \end{bmatrix}, \quad B_a := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A_b := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\gamma^2 & 2\gamma \end{bmatrix}, \quad B_b := B_a$$

$$C_a := \begin{bmatrix} k_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_b := \begin{bmatrix} -k_2 \alpha & k_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}_{ab} : \begin{cases} \dot{x}_{ab}(t) = A_{ab} x_{ab}(t) + B_{ab} u(t) \\ y(t) = C_{ab} x_{ab}(t) \end{cases}, \quad x_{ab} := \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^4$$

$$A_{ab} := \begin{bmatrix} A_a & 0 \\ B_b C_a & A_b \end{bmatrix}, \quad B_{ab} := \begin{bmatrix} B_a \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{ab} := \begin{bmatrix} 0 & C_b \end{bmatrix}.$$

Si noti che, a differenza dei precedenti, gli zeri che compaiono nelle definizioni di A_{ab} , B_{ab} e C_{ab} non sono semplici numeri reali bensì matrici nulle (di dimensioni opportune). E' per altro evidente che il sistema del terz'ordine:

$$\mathbf{S} : \begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \\ y(t) = C x(t) \end{cases}$$

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \beta \gamma^2 & -(2\beta\gamma + \gamma^2) & \beta + 2\gamma \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C := \begin{bmatrix} k_1 k_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

è una realizzazione minima di $G(\cdot)$.

La “cancellazione” di un polo di $G_1(\cdot)$ da parte di uno zero di $G_2(\cdot)$ rivela come il sistema di partenza non fosse raggiungibile e osservabile; infatti, il polo cancellato, che non ha riscontro in $G(\cdot)$, non può essere che un autovalore della parte “cieca” di S_{ab} .

Se il polo cancellato sta nel semipiano destro chiuso ($\alpha \geq 0$), allora S_{ab} non è stabilizzabile; quindi, non è correttamente descritto, dal punto di vista dell’analisi di stabilità, dalla sua funzione di trasferimento. In altre parole, S non è equivalente a S_{ab} , dal punto di vista dell’analisi di stabilità.

L’esempio appena discusso consente di trarre una conclusione a carattere generale.

1. La **prima** delle 5 regole elementari per l’elaborazione degli schemi a blocchi da noi considerate (blocchi in cascata) è corretta anche dal punto di vista dell’analisi di stabilità se e solo se le eventuali *cancellazioni* polo-zero avvengono nel semipiano sinistro aperto; riguardano, cioè, poli con parte reale negativa.

Ragionando in modo analogo, si può concludere quanto segue.

2. La **seconda** regola (blocchi in parallelo) è corretta anche dal punto di vista dell’analisi di stabilità se e solo se gli eventuali *poli comuni* a $G_1(\cdot)$ e $G_2(\cdot)$ stanno nel semipiano sinistro aperto (hanno parte reale negativa).
3. La **terza** regola (spostamento di un blocco a valle di un nodo sommatore) è corretta anche dal punto di vista dell’analisi di stabilità se e solo se tutti gli *zeri* di $G(\cdot)$ stanno nel semipiano sinistro aperto (hanno parte reale negativa).
4. La **quarta** regola (spostamento di un blocco a monte di un nodo sommatore) è corretta anche dal punto di vista dell’analisi di stabilità se e solo se tutti i *poli* di $G(\cdot)$ stanno nel semipiano sinistro aperto (hanno parte reale negativa).
5. La **quinta** regola (sistema reazionato) è corretta anche dal punto di vista dell’analisi di stabilità se e solo se i *poli* di $H(\cdot)$ eventualmente “*cancellati*” da zeri di $G(\cdot)$ stanno nel semipiano sinistro aperto (hanno parte reale negativa).