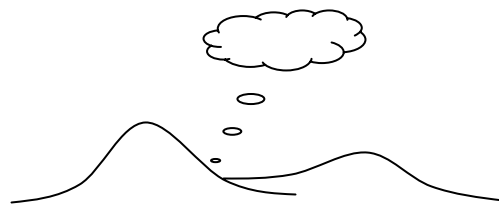


***Capitolo 3***  
***Elementi di analisi dei segnali***



## 1. Introduzione

In questo capitolo, concentreremo l'attenzione sui segnali a tempo continuo detti anche *segnali analogici*; cioè sulle funzioni  $v$  di una variabile  $t$  chiamata *tempo*, che “scorre” su  $\mathbf{R}$ . In altre parole, i segnali analogici che prenderemo in considerazione (Fig.3.1) saranno funzioni definite sull'insieme  $\mathbf{R}$  dei numeri reali, o su un suo intervallo (non necessariamente di durata finita).

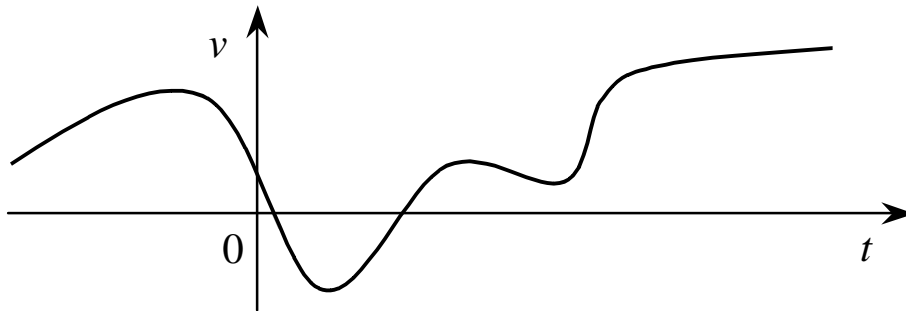


Fig. 3.1 : Segnale analogico.

In ingegneria, e non solo, il termine “analogico” è usato in antitesi a digitale. Un segnale digitale, o a tempo discreto, è un segnale definito su un sottoinsieme discreto di  $\mathbf{R}$ ; un sottoinsieme, cioè, che possa essere messo in corrispondenza biunivoca con un insieme (finito o infinito) di numeri interi. In questo capitolo, e nei successivi, la nostra attenzione sarà esclusivamente rivolta ai segnali (e di conseguenza ai sistemi) analogici. Per questa ragione l'aggettivo “analogico” sarà, d'ora in poi, quasi sempre omesso per brevità; cioè dato per sottinteso.

Un segnale *di durata finita* (Fig.3.2) è un segnale definito su un intervallo  $[t_0, t_f]$  di durata  $T = t_f - t_0 < \infty$ .

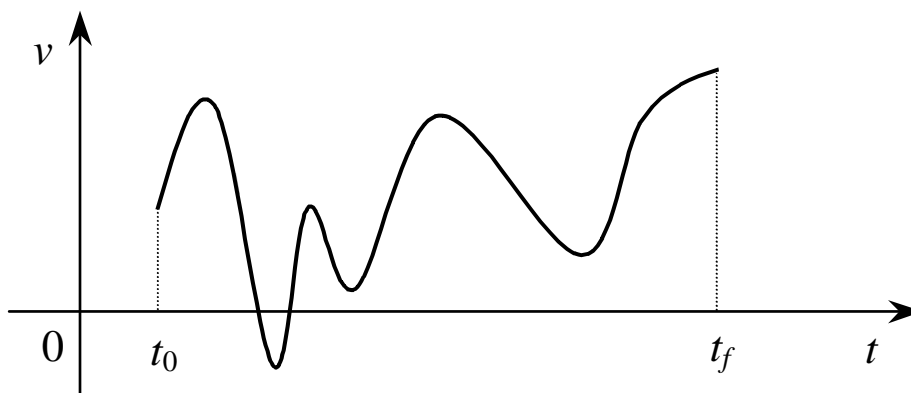


Fig. 3.2 : Segnale di durata finita  $T = t_f - t_0$ .

Un segnale è *periodico* di periodo  $\tau$  (diverso da zero) se  $v(t) = v(t + \tau)$ , per ogni  $t \in \mathbf{R}$ . Se un segnale è periodico di periodo  $\tau$ , è anche periodico di periodo  $k \tau$ , per ogni  $k$  intero positivo. Il *periodo (fondamentale)*  $T$  di un segnale periodico è il più piccolo valore di  $\tau$  tale che:  $v(t) = v(t + \tau)$ , per ogni  $t \in \mathbf{R}$  (Fig.3.3). Ovviamente, la pulsazione e la frequenza fondamentale di  $v(\cdot)$  sono date da  $2\pi/T$  e da  $1/T$ , rispettivamente.

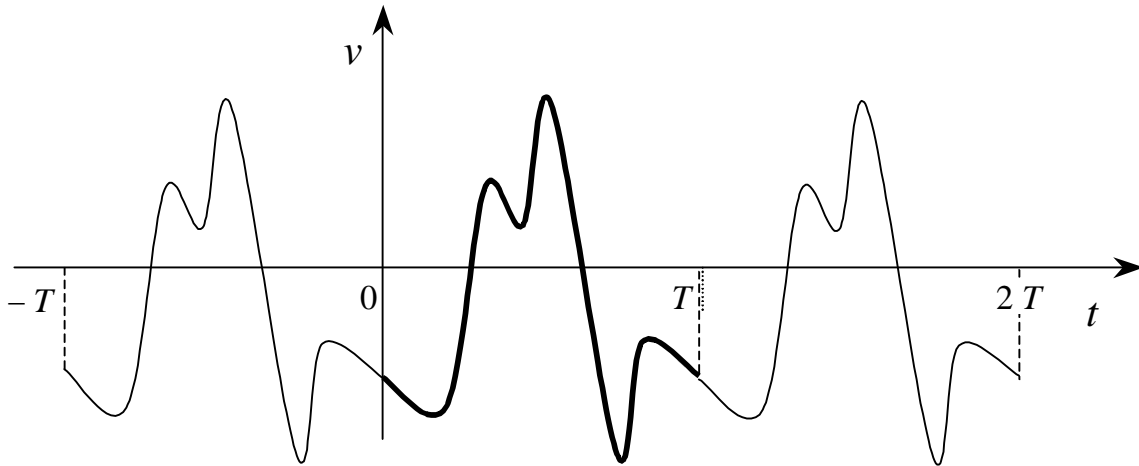


Fig. 3.3 : Segnale periodico di periodo (fondamentale)  $T$ .

Un'osservazione di cui è difficile a prima vista cogliere appieno la notevole portata riguarda i segnali di durata finita, e quindi qualunque segnale di origine sperimentale.

Un segnale di durata finita, come quello di Fig.3.2, può essere rappresentato in modo del tutto equivalente (dal punto di vista dell'informazione insita nel segnale stesso) sia da un segnale  $v_1$  a energia finita (Fig.3.4-a), sia da un segnale periodico  $v_2$  di periodo  $T^* \geq T := t_f - t_0$  (Fig.3.4-b). Il segnale  $v_2(\cdot)$  è precisamente l'*estensione periodica* di un segnale  $v(\cdot)$ , definito su  $[0, T^*)$  e coincidente, su tale intervallo, con  $v_1(\cdot)$ .

Il quadrato di un segnale  $v$  è spesso indicato con il nome di *potenza (istantanea)* di  $v$ . Coerentemente, un segnale  $v$  si dice *a energia (totale) finita* se:

$$\int_{-\infty}^{\infty} v^2(t) dt < \infty ;$$

si dice invece *a potenza (media) finita* se:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} v^2(t) dt < \infty .$$

Si noti che i termini “energia” e “potenza” sono usati qui in un senso del tutto convenzionale, che poco o nulla ha a che vedere con il significato che gli stessi termini hanno in fisica.

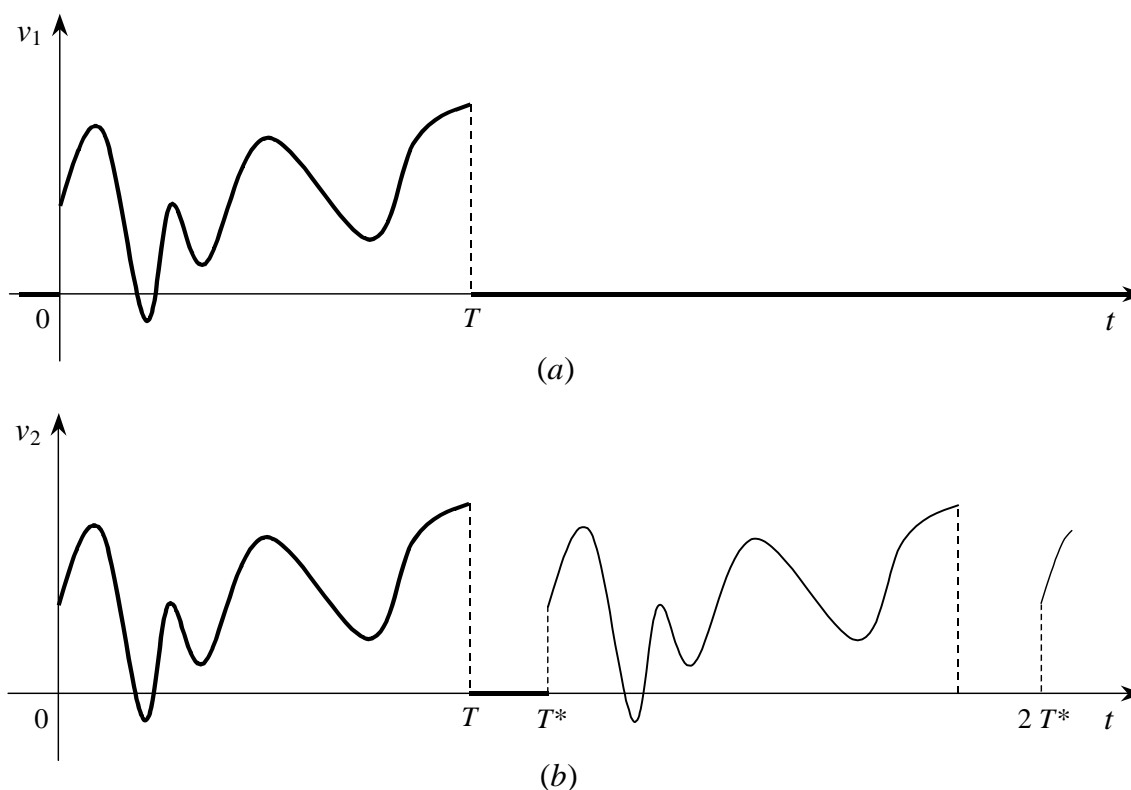


Fig. 3.4 : a) Rappresentazione a energia finita di un segnale di durata finita ( $T := t_f - t_0$ ),  
 b) Rappresentazione a potenza media finita dello stesso segnale ( $T^* \geq T$ ).

Diciamo che un segnale analogico è *regolare* se, su ogni intervallo di durata finita del suo insieme di definizione, presenta un numero finito di discontinuità, tutte di prima specie (salti) e un numero finito di massimi e di minimi isolati. Ovviamente, tutti i segnali di natura sperimentale sono regolari. Salvo contrario avviso supporremo tacitamente che i segnali presi in considerazione in questo e nei capitoli successivi siano regolari. L'unica eccezione significativa sarà la funzione  $imp(\cdot)$ , o  $\delta(\cdot)$  (impulso di Dirac).

**Osservazioni.** 1) I segnali "a energia finita" si annullano all'infinito. 2) I segnali periodici sono "a potenza finita", ma non sono "a energia finita". 3) I segnali "a potenza finita" non sono necessariamente periodici; ad esempio, un segnale essenzialmente aleatorio (un processo casuale non deterministico) il cui valore sia limitato in modulo ( $|v(t)| \leq M$ , per ogni  $t$ ) è un segnale aperiodico a potenza finita.

## 2. *Dominio del tempo e dominio della frequenza*

Nel capitolo precedente, abbiamo già incontrato l'espressione "analisi (di un sistema dinamico lineare tempo-invariante) nel dominio del tempo". Si opera nel dominio del tempo ogni qual volta i segnali vengono rappresentati come funzioni reali di una variabile reale, detta tempo. Questa è, da molti punti di vista, la rappresentazione più naturale ed è anche quella che abbiamo seguito fin qui. Esiste tuttavia anche un modo più astratto benché non meno conveniente di rappresentare i segnali. Esso comporta una *trasformazione* (sostanzialmente invertibile) dei segnali stessi: da funzioni del tempo a funzioni complesse di una variabile complessa, o immaginaria, o reale. Quando si utilizza, per i segnali, il secondo tipo di rappresentazione, si dice che si opera nel *dominio della frequenza*. La motivazione che sta alla base di questo lessico diventerà più evidente nei prossimi capitoli.

L'uso di trasformazioni da applicare ai segnali, visti come funzioni del tempo, si giustifica osservando che ognuna di queste operazioni trasforma direttamente i segnali ma, indirettamente, trasforma anche i problemi che li riguardano. A volte, i problemi "trasformati" sono molto più ardui di quelli originari (nati nel dominio del tempo), ma a volte è vero il contrario. Ed è vero in misura tale da giustificare la fatica di familiarizzarsi con queste tecniche.

Esistono vari tipi di trasformazioni. Nel seguito di questo capitolo ne vedremo tre: la *trasformazione di Laplace*, la *trasformazione di Fourier* (continua) e la *trasformazione di Fourier discreta* (per segnali a tempo continuo). Ognuna di esse ha una precisa controparte in campo digitale, cioè nell'ambito dei segnali a tempo discreto; benché si tratti di una tematica di evidentissima importanza, vista la pervasività della tecnologia digitale, noi continueremo a concentrare la nostra attenzione, almeno per il momento, sul versante analogico.

Le trasformazioni citate, che sono definite su insiemi di funzioni e producono funzioni appartenenti ad insiemi diversi, non sono oggetti matematicamente elementari. Può essere tuttavia di conforto riconoscere che il loro impiego in Automatica non richiede, in linea di massima, di acquisire una spiccata capacità di calcolare, data una funzione del tempo, la corrispondente *trasformata*, vale a dire il prodotto della trasformazione; e tanto meno richiede di eseguire l'operazione inversa, detta di *antitrasformazione*, che consiste nel calcolare una funzione del tempo di cui sia nota una trasformata.

Ciò che, da un punto di vista operativo, importa soprattutto conoscere e saper utilizzare con sicurezza sono un certo numero di fondamentali *proprietà*: delle trasformazioni o delle trasformate. Per fortuna, tali proprietà sono di gran lunga

più semplici e di facile impiego. Da un punto di vista ancora più generale, si può rilevare come assai raramente, oggi, i problemi cruciali dell'ingegneria, esercitata ad un buon livello professionale, siano problemi di calcolo. Al calcolo provvedono (quasi sempre) i calcolatori. I problemi cruciali sono quelli connessi con la necessità di vedere a fondo e lontano in un mondo complesso, in una rete di relazioni per districarsi dalla quale, o per muoversi efficacemente nella quale, occorrono esperienza, intuito, cultura, e prontezza di riflessi. Paradossalmente, la sempre più ampia disponibilità di potenti strumenti di calcolo non attenua ma accentua il dovere di pensare, come quello di sapere e di essere creativi.

Nei prossimi paragrafi verranno dunque presentate e discusse, con diversa enfasi, le tre trasformazioni precedentemente citate. Per ognuna di esse, la presentazione seguirà uno schema fisso. Innanzitutto verrà specificata una *classe di segnali*, non necessariamente la più generale possibile, ai quali la trasformazione può essere applicata. Quindi si passerà alla *formula di trasformazione*, commentandola con osservazioni ed esempi. Successivamente, e solo per completezza, si fornirà la *formula di antitrasformazione*. Seguirà la presentazione delle *proprietà notevoli* della trasformazione, o delle trasformate, ed eventualmente di tecniche valide per classi particolari, ma importanti, di segnali.

### 3. La trasformazione di Laplace

Si applica a *segnali*  $v(t)$  definiti su  $\mathbf{R}^+$  ( $t \geq 0$ ) e tali che, per almeno un valore di  $\alpha$ , reale, risulti:

$$\int_0^{\infty} |v(t)| e^{-\alpha t} dt < \infty .$$

Equivalentemente, questi segnali possono essere visti come definiti su  $\mathbf{R}$ , ma nulli per  $t < 0$ , e dotati della suddetta proprietà.

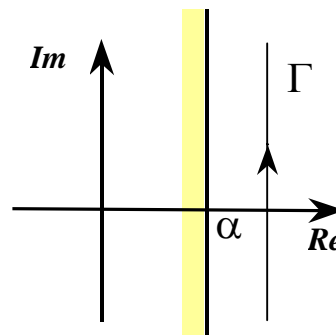
*Formula di trasformazione.* La trasformata di Laplace  $V(\cdot)$  di un segnale  $v(\cdot)$  appartenente alla classe suddetta è una funzione complessa di variabile complessa definita nel modo seguente:

$$V(s) := \int_0^{\infty} v(t) e^{-st} dt \quad \text{Re}[s] > \alpha$$

La trasformata di Laplace di un segnale  $v(\cdot)$  è a volte indicata come  $\mathcal{L}[v(\cdot)]$  o, con frequente abuso di notazione, come  $V(s)$  e, coerentemente, come  $\mathcal{L}[v(t)]$ .

*Formula di antitrasformazione (Riemann-Fourier).* In ogni punto di continuità,

$$v(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} V(s) e^{st} ds .$$



La linea d'integrazione  $\Gamma$  è una retta, parallela all'asse immaginario, posta (Fig.3.5) nel semipiano  $Re[s] > \alpha$ .

Fig. 3.5 : Semipiano di convergenza e linea  $\Gamma$  di integrazione.

### Esempio 1

Si consideri il segnale  $v(t) := e^{pt}$ , per  $t \geq 0$ , e nullo altrove. Si noti che, per  $p=0$ ,  $v(t)=sca(t)$ . Per  $p \neq 0$ , se si pone  $T := -1/p$ , si ha:  $v(t) = e^{-t/T}$ . Il parametro  $T$  è detto *costante di tempo*.

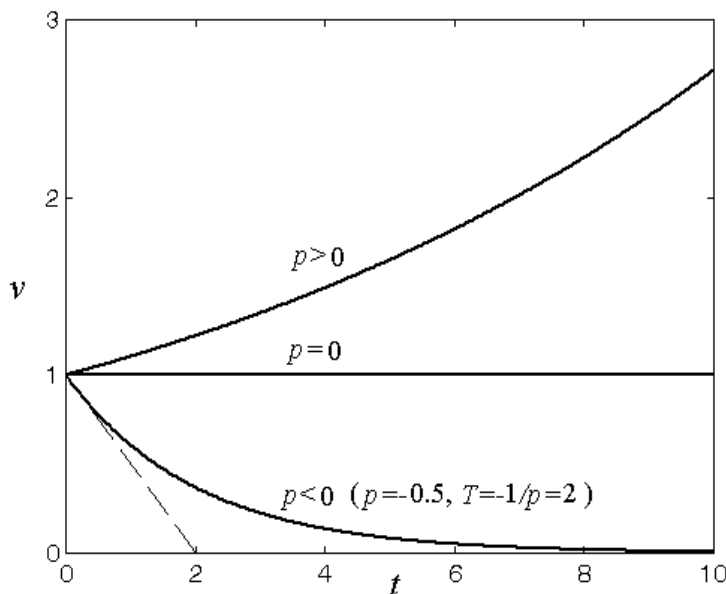


Fig. 3.6 : Andamento di  $v(t) = e^{pt}$ , per diversi valori di  $p$ .

Osserviamo innanzitutto che:

$$\int_0^{\infty} |v(t)| e^{-\alpha t} dt = \int_0^{\infty} e^{pt} e^{-\alpha t} dt = \int_0^{\infty} e^{(p-\alpha)t} dt = \left[ \frac{e^{(p-\alpha)t}}{p-\alpha} \right]_0^{\infty} < \infty \quad , \quad \forall \alpha > p .$$

Per definizione, la trasformata di  $v(t)$  è data da:

$$V(s) := \int_0^{\infty} v(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{pt} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{(p-s)t} dt = \left[ \frac{e^{(p-s)t}}{p-s} \right]_0^{\infty} ;$$

ma, se  $Re[s] > \alpha^* = p$ , allora  $Re[p-s] < 0$  e quindi

$$V(s) = \left[ \frac{e^{(p-s)t}}{p-s} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s-p} ;$$

infatti, ponendo:  $p-s = -\sigma + j\omega$ , si ha:  $e^{(-\sigma+j\omega)t} = e^{-\sigma t} (\cos \omega t + j \sin \omega t)$ .

L'esempio mostra come la formula di trasformazione produca una funzione  $V(\cdot)$  definita non sull'intero piano complesso, ma solo su un semipiano aperto della forma  $Re[s] > \alpha^*$  (semipiano di convergenza). Esiste tuttavia una sola funzione che sia definita e analitica (derivabile infinite volte) quasi ovunque sul piano complesso, e coincidente, sul semipiano di convergenza, con la funzione data dalla formula di trasformazione. Questa estensione di  $V(\cdot)$  a quasi tutto il piano complesso è quella che viene definitivamente adottata come *trasformata di Laplace* di  $v(\cdot)$ .

Come caso particolare ( $p = 0$ ) dell'esempio appena discusso, abbiamo trovato che  $1/s$  è la trasformata di Laplace di un segnale a scalino (di ampiezza unitaria). A questo proposito, si può osservare che, secondo la definizione del Capitolo 2 (Paragrafo 6), la funzione scalino è nulla per  $t \leq 0$  e pari a 1, per  $t > 0$ ; d'altro canto  $e^{pt}$  è uguale a 1, per  $t = 0$ , qualunque sia  $p$ ; dunque, la funzione scalino non è identica a  $e^{pt}$  con  $p = 0$ , per  $t \geq 0$ . Si noti, però, che la "natura integrale" della formula di trasformazione rende le trasformate di Laplace insensibili al valore assunto dal segnale  $v(t)$  in un singolo istante; quindi,  $1/s$  è effettivamente la trasformata di Laplace della funzione scalino.

Ricordando per altro una delle proprietà basilari dell'impulso (di Dirac), cioè

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{imp}(t-\tau) g(t) dt = g(\tau) ,$$

per ogni funzione  $g(\cdot)$ , e applicando la formula di trasformazione, si ha:

$$\mathcal{L}[\text{imp}(\cdot)] := \int_0^{\infty} \text{imp}(t) e^{-st} dt = e^{-st} \Big|_{t=0} = 1 .$$



## 4. Proprietà notevoli della trasformazione di Laplace

La trasformazione di Laplace gode di numerose proprietà che sono di notevole interesse nelle applicazioni all'analisi dei sistemi. Ricordiamo le principali.

### 4.1 Linearità

A:  $v(t) = \alpha v_1(t) + \beta v_2(t)$ , corrisponde:  $V(s) = \alpha V_1(s) + \beta V_2(s)$ .

### 4.2 Trasformazione dell'integrale

A:  $v_2(t) = \int_0^t v_1(\tau) d\tau$ , corrisponde:  $V_2(s) = \frac{1}{s} V_1(s)$ .

Poiché la rampa è l'integrale dello scalino e la parabola è, a sua volta, l'integrale della rampa (così come lo scalino è l'integrale dell'impulso), la trasformata di Laplace della rampa (unitaria) è  $1/s^2$  e quella della parabola (unitaria)  $1/s^3$ .

### 4.3 Trasformazione della derivata

A:  $v_2(t) = \dot{v}_1(t)$ , corrisponde:  $V_2(s) = s V_1(s) - v_1(0)$ .

Si noti che i segnali Laplace-trasformabili possono essere discontinui nell'origine. Per altro, abbiamo già osservato come le trasformate di Laplace di qualsiasi segnale siano insensibili al valore assunto dal segnale stesso in un singolo istante. Nell'espressione che riguarda la trasformata della derivata, il termine  $v_1(0)$  va quindi generalmente interpretato come  $v_1(0^+)$ ; cioè come limite di  $v_1(t)$  per  $t$  che tende a zero. Con un'eccezione: se si vuole, un po' avventurosamente, considerare la funzione impulso (di Dirac) come la derivata della funzione scalino, occorre porre:  $sca(0) = 0$  e interpretare alla lettera la formula suddetta.

### 4.4 Derivazione della trasformata

A:  $v_2(t) = (-1)^h t^h v_1(t)$ ,  $h \geq 0$ , corrisponde:  $V_2(s) = \frac{d^h}{ds^h} V_1(s)$ .

### 4.5 Trasformazione del ritardo

A:  $v_2(t) = v_1(t - \tau)$ ,  $\tau \geq 0$ , corrisponde:

$$V_2(s) = e^{-\tau s} V_1(s).$$

Ad esempio, la trasformata di Laplace del segnale  $v(t) = ram(t - 2)$ , cioè di una rampa ritardata di 2 unità

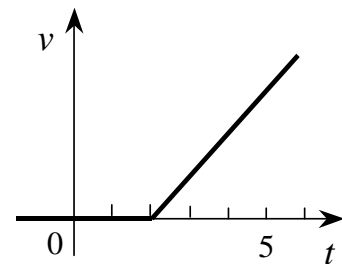


Fig. 3.7 : Rampa ritardata.

di tempo (Fig.3.7), è  $V(s) = e^{-2s}/s^2$ . A titolo di esercizio, il lettore calcoli la trasformata di Laplace di un “impulso rettangolare” di ampiezza 5, con inizio in  $t_1=8$  e termine in  $t_2=10$  (Cenno: si esprima il segnale come somma di 2 scalini).

#### 4.6 Trasformazione del prodotto di convoluzione reale

$$A: v(t) = \int_0^t v_1(t - \tau) v_2(\tau) d\tau, \quad \text{corrisponde: } V(s) = V_1(s) V_2(s).$$

L’operazione che fornisce  $v(\cdot)$  a partire da  $v_1(\cdot)$  e  $v_2(\cdot)$  è detta “prodotto di convoluzione” e dà luogo ad un segnale palesemente assai diverso dal semplice prodotto  $v_1(t) v_2(t)$ . La trasformata del prodotto è specularmente fornita da una formula, qui omessa, di convoluzione (in campo complesso) delle trasformate.

#### 4.7 Teorema del valore iniziale

$$\lim_{t \rightarrow 0} v(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s V(s).$$

#### 4.8 Teorema del valore finale

Se tutti i poli non nulli di  $V(s)$  hanno parte reale negativa, allora:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s V(s).$$

Concludiamo l’esposizione delle principali proprietà della trasformazione di Laplace con una semplice, ma importante, proprietà non della trasformazione ma delle trasformate di Laplace.

#### 4.9 Simmetria

$$V(\bar{s}) = \overline{V(s)},$$

dove con una barra si è indicato il coniugato di un numero complesso.

#### **Esempio 2**

Si consideri il problema seguente. Calcolare la derivata iniziale di un segnale la cui trasformata di Laplace sia:

$$V(s) = 10 \frac{s^2 - 4s - 5}{s^3 + 15s^2 + 59s + 45}.$$

Se poniamo  $w(t) := \dot{v}(t)$ , sappiamo che  $W(s) = s V(s) - v(0)$ . Possiamo calcolare  $v(0)$  utilizzando il teorema del valore iniziale:

$$v(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s V(s) = 10 .$$

Quindi,

$$W(s) = s V(s) - v(0) = 10 \frac{s^3 - 4 s^2 - 5 s}{s^3 + 15 s^2 + 59 s + 45} - 10 = -10 \frac{12 s^2 + 8 s + 6}{s^3 + 15 s^2 + 59 s + 45}$$

$$w(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s W(s) = -120 .$$

E' lasciato al lettore il calcolo del valore finale: *a)* di  $w$ , *b)* dell'integrale di  $v$ .

## 5. Segnali a trasformata razionale

Un segnale  $v(\cdot)$  (definito su  $\mathbf{R}^+$ ) si dice *a trasformata razionale* se la sua trasformata di Laplace è una funzione razionale (fratta). In altri termini,  $v(\cdot)$  è a trasformata razionale se

$$V(s) = \frac{b(s)}{a(s)} ,$$

con  $a(s)$  e  $b(s)$  polinomi in  $s$ . La differenza fra il grado di  $a(s)$  e quello di  $b(s)$  si chiama *grado relativo* di  $V(s)$ . Se il grado relativo di  $V(s)$  è minore o uguale a zero, cioè se il grado di  $a(s)$  non supera quello di  $b(s)$ , allora esistono due polinomi  $q(s)$  e  $r(s)$ , con grado di  $r(s)$  minore del grado di  $a(s)$  e grado di  $q(s)$  pari al grado relativo di  $V(s)$  cambiato di segno, tali che:

$$\frac{b(s)}{a(s)} = q(s) + \frac{r(s)}{a(s)} .$$

Ad esempio, se:

$$V(s) = \frac{12 s^4 + 3 s^3 - 8 s^2 + 5 s - 1}{s^2 - 6 s + 2}$$

il grado relativo è  $-2$ , e si può scrivere:

$$\begin{aligned} V(s) &= q_0 s^2 + q_1 s + q_2 + \frac{r_0 s + r_1}{s^2 - 6 s + 2} = \\ &= \frac{q_0 s^4 + (q_1 - 6 q_0) s^3 + (q_2 - 6 q_1 + 2 q_0) s^2 + (r_0 + 2 q_1 - 6 q_2) s + r_1 + 2 q_2}{s^2 - 6 s + 2} ; \end{aligned}$$

quindi, imponendo l'uguaglianza dei numeratori, si ottiene:

$$\begin{aligned}
q_0 &= 12 \\
q_1 - 6 q_0 &= 3 & \rightarrow & q_1 = 75 \\
q_2 - 6 q_1 + 2 q_0 &= -8 & \rightarrow & q_2 = 418 \\
r_0 + 2 q_1 - 6 q_2 &= 5 & \rightarrow & r_0 = 2363 \\
r_1 + 2 q_2 &= -1 & \rightarrow & r_1 = -837
\end{aligned}$$

Alternativamente, si poteva eseguire una cosiddetta “lunga divisione”:

$$\begin{array}{r}
12 s^4 + 3 s^3 - 8 s^2 + 5 s - 1 \\
12 s^4 - 72 s^3 + 24 s^2 \\
\hline
0 + 75 s^3 - 32 s^2 + 5 s - 1 \\
\phantom{0} 75 s^3 - 450 s^2 + 150 s \\
\hline
\phantom{0} 0 + 418 s^2 - 145 s - 1 \\
\phantom{0} 418 s^2 - 2508 s + 836 \\
\hline
\phantom{0} 0 + 2363 s - 837 \rightarrow r(s)
\end{array}
\quad \left| \begin{array}{l} s^2 - 6 s + 2 \\ \hline 12 s^2 + 75 s + 418 \rightarrow q(s) \end{array} \right.$$

Come si può notare,  $q(s)$  è il quoziente e  $r(s)$  il resto.

Ma se

$$V(s) = q_0 s^2 + q_1 s + q_2 + \frac{r_0 s + r_1}{s^2 - 6 s + 2}$$

$v(\cdot)$  può essere espresso come somma delle antitrasformate dei quattro addendi di  $V(\cdot)$ . Ora sappiamo che l’antitrasformata di  $q_2$  è un impulso (di Dirac) di ampiezza  $q_2$ ; l’antitrasformata di  $q_1 s$  non la conosciamo, ma possiamo intuire che abbia a che vedere con qualcosa di assimilabile alla “derivata dell’impulso”, per non parlare di  $q_0 s^2$ , che ne evoca la “derivata seconda”. Senza approfondire l’attendibilità di cosiffatte divagazioni, ricordiamo che il nostro interesse si concentra quasi esclusivamente sui segnali che abbiamo definito regolari. L’esempio appena esaminato porta a concludere che *se un segnale a trasformata razionale è regolare, il grado relativo della sua trasformata di Laplace dev’essere positivo*: se  $v(\cdot)$  è regolare e  $V(s) = b(s)/a(s)$ , il grado di  $a(s)$  dev’essere maggiore di quello di  $b(s)$ .

Una funzione razionale (fratta) con grado relativo positivo si dice *razionale (fratta) in senso proprio*; o, per brevità, *razionale propria*.

Con riferimento alla classe dei segnali a trasformata razionale (propria), è molto utile individuare, anche su un piano puramente qualitativo, le relazioni esistenti fra l'andamento nel tempo, la "forma", del segnale  $v$ , e la posizione nel piano complesso dei poli e degli zeri della sua trasformata di Laplace. Per questo, cominciamo ad esaminare alcuni casi di *trasformate elementari*.

1. Innanzitutto ricordiamo quelli che abbiamo già incontrato:

$$\begin{aligned}
 V(s) = 1 & \quad \leftrightarrow \quad v(t) = \text{imp}(t) \\
 V(s) = 1/s & \quad \leftrightarrow \quad v(t) = \text{sca}(t) \\
 V(s) = 1/s^2 & \quad \leftrightarrow \quad v(t) = \text{ram}(t) \\
 V(s) = 1/s^3 & \quad \leftrightarrow \quad v(t) = \text{par}(t) \\
 V(s) = \frac{1}{s-p} := \frac{T}{1+sT} & \quad \leftrightarrow \quad v(t) = e^{pt} = e^{-t/T} \quad , \quad t \geq 0 .
 \end{aligned}$$

Le trasformate di tutti questi segnali, eccetto quella del primo, sono razionali proprie. Solo l'impulso, infatti, non è, secondo la definizione data all'inizio di questo capitolo, un segnale regolare. Il secondo segnale è un caso particolare dell'ultimo ( $p=0$ ). Le trasformate di Laplace di scalino, rampa e parabola hanno poli nell'origine: solo nel caso dello scalino il polo è semplice, negli altri casi è multiplo; nessuno di questi tre segnali è a energia finita: solo lo scalino è limitato, gli altri no. Nell'ultimo caso, a seconda del segno (positivo o negativo) della costante di tempo  $T := -1/p$ , la parte reale del polo è negativa oppure positiva e, corrispondentemente, il segnale è a energia finita ( $p < 0$ ) o illimitato ( $p > 0$ ).

Se compare un ritardo, la trasformata di Laplace non è più razionale:

$$V(s) = e^{-\tau s}/s^3 \quad \leftrightarrow \quad v(t) = \text{par}(t - \tau) \quad .$$

2.  $V(s) = \frac{1}{s^2 + 2 \zeta \omega_n s + \omega_n^2} \quad , \quad |\zeta| < 1$  (per  $|\zeta| \geq 1$ , i poli sono reali)  $, \quad \omega_n > 0$

$$\leftrightarrow \quad v(t) = \frac{1}{\omega_r} e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_r t) \quad , \quad t \geq 0 \quad , \quad \omega_r := \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad .$$

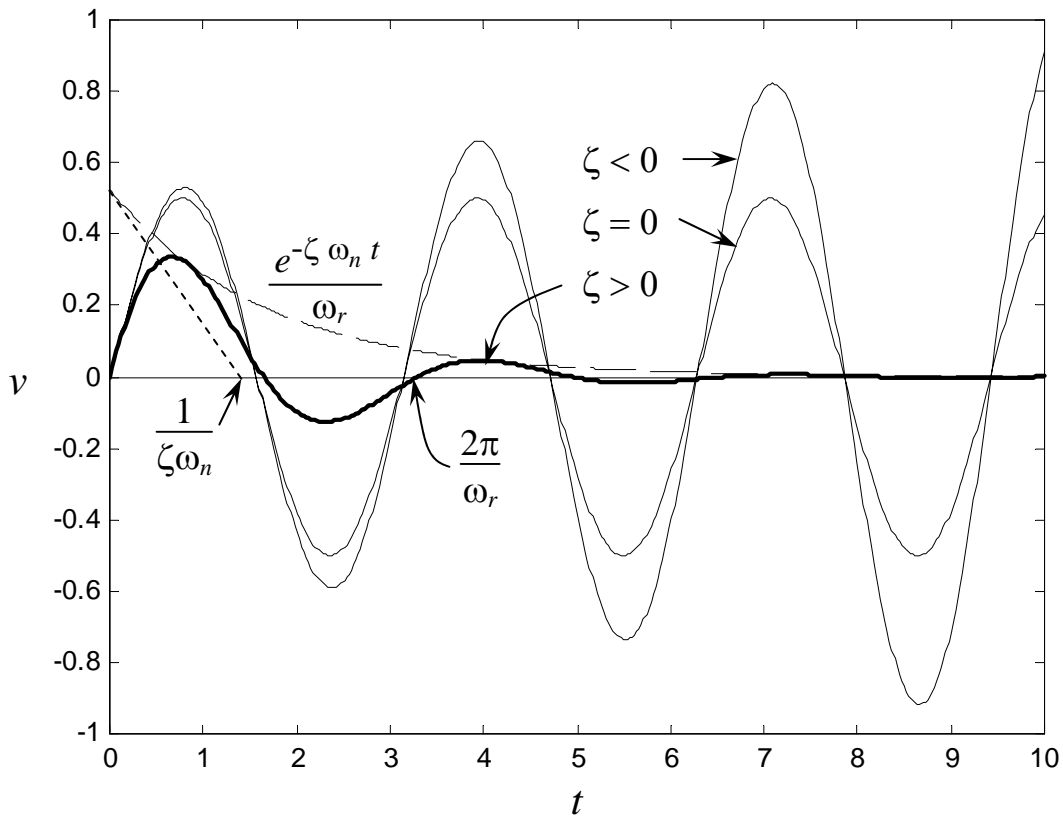
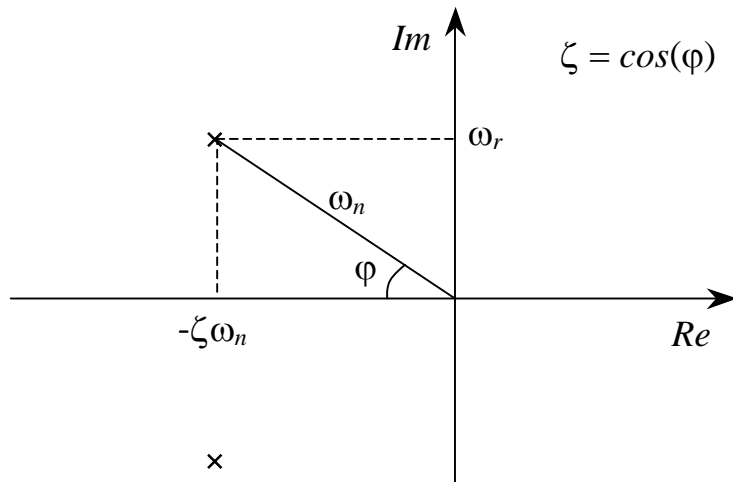


Fig. 3.8 : Trasformata con due poli complessi coniugati.

Con riferimento alla Fig.3.8, si noti che a  $\zeta > 0$  corrisponde un'oscillazione esponenzialmente smorzata con costante di tempo  $1/(\zeta\omega_n)$ , mentre a  $\zeta < 0$  corrisponde un'oscillazione di ampiezza esponenzialmente crescente; per questo,  $\zeta$  si chiama (*fattore di*) smorzamento. Quando  $\zeta = 0$ , la pulsazione  $\omega_r$  dell'oscillazione coincide con  $\omega_n$  che è detta *pulsazione naturale*.

In particolare, abbiamo ( $\zeta=0$ ):

$$V(s) = \frac{1}{s^2 + \omega_n^2} \quad \leftrightarrow \quad v(t) = \frac{1}{\omega_n} \sin(\omega_n t)$$

$$V(s) = \frac{\omega_n}{s^2 + \omega_n^2} \quad \leftrightarrow \quad v(t) = \sin(\omega_n t)$$

e, applicando la Proprietà 4.3 (relativa alla derivazione), si trova:

$$V(s) = \frac{s}{s^2 + \omega_n^2} \quad \leftrightarrow \quad v(t) = \cos(\omega_n t) \quad .$$

$$3. \quad V(s) = \frac{s - z}{s^2 + 2 \zeta \omega_n s + \omega_n^2} \quad , \quad |\zeta| < 1 \quad , \quad \omega_n > 0$$

$$\leftrightarrow \quad v(t) = A e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_r t + \alpha), \quad t \geq 0, \quad \left\{ \begin{array}{l} A := \frac{1}{\omega_r} \sqrt{z^2 + 2 z \zeta \omega_n + \omega_n^2} \\ \alpha := \arctg \frac{\omega_r}{z + \zeta \omega_n} \\ \omega_r := \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \end{array} \right.$$

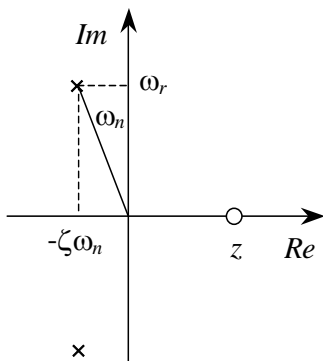
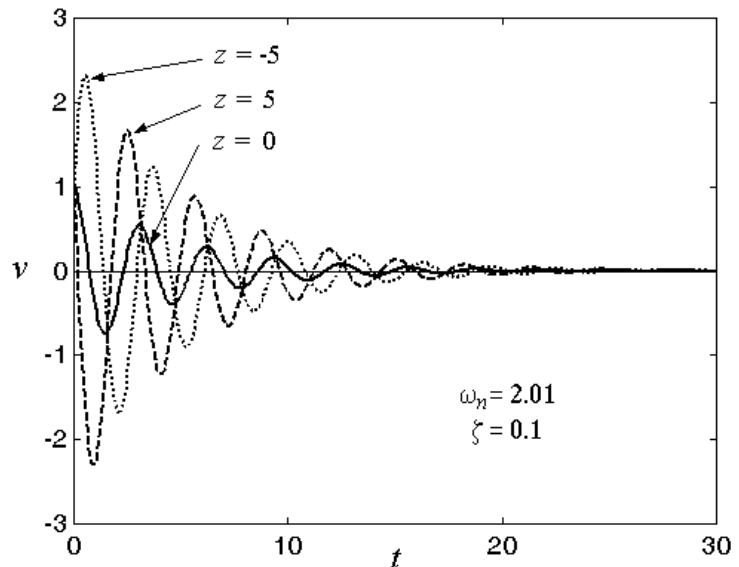


Fig. 3.9 : Trasformata con due poli complessi coniugati e uno zero



reale.

Al variare della posizione dello zero, si modificano l'ampiezza e la fase dell'oscillazione, ma la pulsazione e la costante di tempo restano invariate.

4. Per la Proprietà 4.4 della trasformazione di Laplace, a  $v(t) = (-1)^{h-1} t^{h-1} e^{pt}$ , corrisponde  $V(s) = \frac{d^{h-1}}{ds^{h-1}} \frac{1}{s-p} = (-1)^{h-1} (h-1)! \frac{1}{(s-p)^h}$ . Pertanto:

$$V(s) = \frac{R}{(s-p)^h}, \quad h \geq 1 \quad \leftrightarrow \quad v(t) = \frac{R t^{h-1}}{(h-1)!} e^{pt}, \quad t \geq 0$$

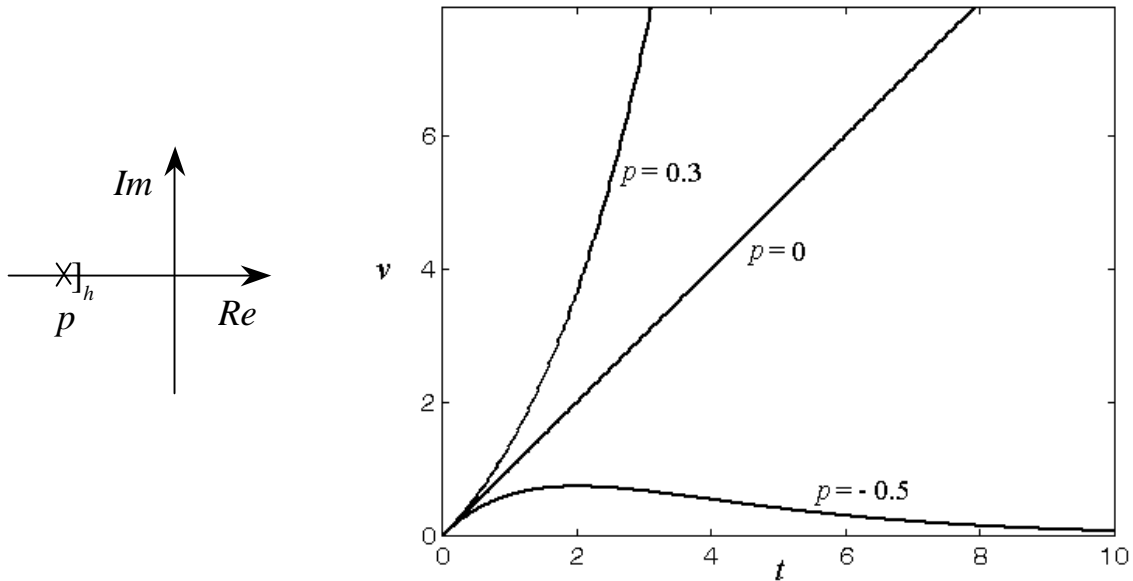


Fig. 3.10 : Trasformata con poli reali multipli ( $h = 2, R = 1$ ).

Nel caso di un polo reale con molteplicità  $h \geq 2$ , le considerazioni a carattere qualitativo non differiscono in modo sostanziale da quelle ricavate al punto 1 e relative al caso di polo multiplo nell'origine ( $p=0$ ) o di polo semplice ( $h=1$ ). In particolare, il segnale è a energia finita se  $p < 0$  (all'infinito, l'annullarsi dell'esponenziale prevale su qualunque potenza di  $t$ ), mentre è illimitato se  $p \geq 0$ . Il caso  $h=2$  è illustrato in Fig.3.10.

5. Nel precedente punto 4 si è supposto che  $p$  fosse reale. La medesima relazione fra  $v(\cdot)$  e  $V(\cdot)$  sussisterebbe tuttavia anche se  $p$  avesse parte immaginaria non nulla. Naturalmente, se  $p$  ha parte immaginaria non nulla, anche la parte immaginaria di  $v(t)$  risulta diversa da zero. Si tenga presente, però, che in tal caso il polo  $p$  non può essere "solitario": se  $p$  è un polo complesso di  $V(\cdot)$  con molteplicità  $h$ , anche il suo coniugato  $\bar{p}$  dev'essere un polo di  $V(\cdot)$  con molteplicità  $h$ . Consideriamo, ad esempio, il caso seguente:

$$V(s) = \frac{1}{(s-p)^h} + \frac{1}{(s-\bar{p})^h}, \quad h \geq 1 \quad \leftrightarrow \quad v(t) = \frac{t^{h-1}}{(h-1)!} (e^{pt} + e^{\bar{p}t}), \quad t \geq 0$$



ma, se  $p = -\zeta \omega_n + j \omega_r$ , allora  $e^{pt} + e^{\bar{p}t} = 2 e^{-\zeta \omega_n t} \cos \omega_r t$ ; quindi,

$$v(t) = \frac{2 t^{h-1}}{(h-1)!} e^{-\zeta \omega_n t} \cos \omega_r t, \quad t \geq 0$$

è reale. Più in generale,

$$V(s) = \frac{R}{(s-p)^h} + \frac{\bar{R}}{(s-\bar{p})^h}, \quad h \geq 1 \quad \leftrightarrow \quad v(t) = \frac{t^{h-1}}{(h-1)!} (R e^{pt} + \bar{R} e^{\bar{p}t}), \quad t \geq 0.$$

Ma, se  $R := \rho e^{j\vartheta}$ ,  $p = -\zeta \omega_n + j \omega_r$ ,  $|\zeta| < 1$ ,  $\omega_n > 0$  e  $\omega_r := \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ , allora:

$$R e^{pt} + \bar{R} e^{\bar{p}t} = 2 \rho e^{-\zeta \omega_n t} \cos(\omega_r t + \vartheta)$$

e si può concludere che

$$V(s) = \frac{R}{(s-p)^h} + \frac{\bar{R}}{(s-\bar{p})^h}, \quad h \geq 1 \quad \leftrightarrow \quad v(t) = \frac{2 \rho t^{h-1}}{(h-1)!} e^{-\zeta \omega_n t} \cos(\omega_r t + \vartheta), \quad t \geq 0.$$

Ad esempio, se  $h=1$  e

$$R = \frac{1}{2} \left[ a + j \frac{b - a \zeta \omega_n}{\omega_r} \right]$$

allora

$$V(s) = \frac{R}{s-p} + \frac{\bar{R}}{s-\bar{p}} = \frac{a s + b}{s^2 + 2 \zeta \omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\rho = \frac{\sqrt{b^2 - 2 a b \zeta \omega_n + a^2 \omega_n^2}}{2 \omega_r}, \quad \vartheta = \arctg \frac{b - a \zeta \omega_n}{a \omega_r} = \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{a \omega_r}{b - a \zeta \omega_n}.$$

Ponendo:

$$\varphi := -\arctg \frac{a \omega_r}{b - a \zeta \omega_n} = \arctg \frac{a \omega_r}{a \zeta \omega_n - b}$$

risulta:  $\vartheta = \pi/2 + \varphi$ ; quindi:  $\cos(\omega_r t + \vartheta) = \cos(\omega_r t + \varphi + \pi/2) = \sin(\omega_r t + \varphi)$ . In definitiva:

$$V(s) = \frac{a s + b}{s^2 + 2 \zeta \omega_n s + \omega_n^2}, \quad |\zeta| < 1, \quad \omega_n > 0$$

$$\leftrightarrow v(t) = \frac{\sqrt{b^2 - 2 a b \zeta \omega_n + a^2 \omega_n^2}}{\omega_r} e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_r t + \varphi), \quad t \geq 0;$$

ponendo  $a = 0$  e  $b = 1$ , oppure  $a = 1$  e  $b = -z$ , si ritrovano, rispettivamente, il risultato enunciato al punto 2 o quello enunciato al punto 3.

## 6. Il metodo di Heaviside

Il punto focale del cosiddetto “metodo di Heaviside” per l’antitrasformazione di un segnale regolare a trasformata razionale consiste nel riconoscere che ogni segnale di quel tipo può essere rappresentato come somma di segnali elementari, le cui trasformate hanno una delle forme seguenti:

$$\frac{R}{(s-p)^h} \quad \text{oppure} \quad \frac{R}{(s-p)^h} + \frac{\bar{R}}{(s-\bar{p})^h}$$

con  $h$  intero positivo;  $R$  e  $p$  reali, nel primo caso, complessi nel secondo.

Se  $p$  e  $\bar{p}$  sono poli complessi coniugati semplici ( $h=1$ ), cioè:

$$p = -\zeta \omega_n + j \omega_r, \quad |\zeta| < 1, \quad \omega_n > 0, \quad \omega_r := \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2},$$

allora s’è visto al termine del paragrafo precedente che il termine elementare

$$\frac{R}{s-p} + \frac{\bar{R}}{s-\bar{p}} \quad \leftrightarrow \quad v(t) = 2 |R| e^{-\zeta \omega_n t} \cos(\omega_r t + \angle R), \quad t \geq 0$$

può essere equivalentemente sostituito da:

$$\frac{a s + b}{s^2 + 2 \zeta \omega_n s + \omega_n^2} \quad \leftrightarrow \quad v(t) = A e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_r t + \varphi), \quad t \geq 0,$$

dove:

$$A := \frac{\sqrt{b^2 - 2 a b \zeta \omega_n + a^2 \omega_n^2}}{\omega_r}, \quad \varphi := \text{atan} \frac{a \omega_r}{a \zeta \omega_n - b}.$$

Espressioni analoghe, qui omesse, si possono trovare anche per il caso  $h > 1$ . Prima di dare una formulazione più precisa del metodo di antitrasformazione basato sullo sviluppo di Heaviside, si illustreranno, con una serie di esempi, le linee essenziali di una delle possibili versioni del suo procedimento.

### Esempio 1

Sia:

$$V(s) = \frac{K}{(s^2 + 2 \zeta \omega_n s + \omega_n^2)(s+q)}, \quad |\zeta| < 1, \quad \omega_n > 0.$$

In vista della precedente osservazione e volendo scomporre  $v(\cdot)$  in somma di segnali elementari, poniamo:

$$V(s) = \frac{a s + b}{s^2 + 2 \zeta \omega_n s + \omega_n^2} + \frac{c}{s+q}$$

e determiniamo le costanti  $a$ ,  $b$  e  $c$  imponendo l'identità delle due espressioni.

Poiché

$$\begin{aligned} \frac{a s + b}{s^2 + 2 \zeta \omega_n s + \omega_n^2} + \frac{c}{s + q} &= \frac{(a s + b)(s + q) + c(s^2 + 2 \zeta \omega_n s + \omega_n^2)}{(s^2 + 2 \zeta \omega_n s + \omega_n^2)(s + q)} = \\ &= \frac{(a + c)s^2 + (a q + b + 2 c \zeta \omega_n)s + b q + c \omega_n^2}{(s^2 + 2 \zeta \omega_n s + \omega_n^2)(s + q)} \end{aligned}$$

le espressioni di  $V(s)$  coincidono se e solo se coincidono i coefficienti dei numeratori; cioè, se e solo se:

$$a + c = 0$$

$$a q + b + 2 c \zeta \omega_n = 0$$

$$b q + c \omega_n^2 = K \quad .$$

Risolvendo questo sistema di tre equazioni lineari algebriche nelle incognite  $a$ ,  $b$  e  $c$ , si ottiene:

$$a = -c = \frac{-K}{q(q - 2 \zeta \omega_n) + \omega_n^2} \quad , \quad b = \frac{K(q - 2 \zeta \omega_n)}{q(q - 2 \zeta \omega_n) + \omega_n^2} \quad .$$

Si può quindi concludere che

$$v(t) = A e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_r t + \varphi) + c e^{-qt} \quad ,$$

dove:

$$A := \frac{\sqrt{b^2 - 2 a b \zeta \omega_n + a^2 \omega_n^2}}{\omega_r} \quad , \quad \varphi := \arctg \frac{a \omega_r}{a \zeta \omega_n - b} \quad .$$

### **Esempio 2**

Sia:

$$V(s) = \frac{K(s - z)}{(s - p_1)(s - p_2)} \quad , \quad z, p_1, p_2 \in \mathbf{R} \quad , \quad p_1 \neq p_2 \quad .$$

Volendo scomporre  $v(\cdot)$  in somma di segnali elementari, poniamo:

$$V(s) = \frac{R_1}{(s - p_1)} + \frac{R_2}{(s - p_2)} \quad , \quad R_1, R_2 \in \mathbf{R}$$

Per calcolare  $R_1$  e  $R_2$ , osserviamo che:

$$\frac{R_1}{(s-p_1)} + \frac{R_2}{(s-p_2)} = \frac{R_1(s-p_2) + R_2(s-p_1)}{(s-p_1)(s-p_2)}$$

Il numeratore coincide con quello della  $V(s)$  assegnata se e solo se:

$$R_1(s-p_2) + R_2(s-p_1) = K(s-z);$$

perciò dev'essere:

$$R_1 + R_2 = K$$

$$R_1 p_2 + R_2 p_1 = K z$$

da cui

$$R_1 = K \frac{p_1 - z}{p_1 - p_2}, \quad R_2 = K \frac{p_2 - z}{p_2 - p_1}.$$

In conclusione:

$$v(t) = R_1 e^{p_1 t} + R_2 e^{p_2 t} = K \left[ \frac{p_1 - z}{p_1 - p_2} e^{p_1 t} + \frac{p_2 - z}{p_2 - p_1} e^{p_2 t} \right]$$

ed è particolarmente interessante notare come il valore dei “residui”  $R_1$ ,  $R_2$ , e quindi la rilevanza relativa di ogni polo nel determinare l'andamento complessivo del segnale  $v$ , dipenda dalla distanza di quel polo dallo zero e si annulli con essa.

### **Esempio 3**

Sia:

$$V(s) = \frac{10(s+2)}{(s+1)^3(s+5)}.$$

In questo caso (polo multiplo), occorre che il polo multiplo contribuisca allo sviluppo con tanti termini quant'è la sua molteplicità. Pertanto porremo:

$$V(s) = \frac{a}{(s+1)^3} + \frac{b}{(s+1)^2} + \frac{c}{s+1} + \frac{d}{s+5}$$

Per determinare  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$ , dobbiamo ancora una volta imporre un denominatore comune  $((s+1)^3(s+5))$  e far sì che il numeratore coincida con quello della  $V(s)$  assegnata; quindi, dovrà essere:

$$\begin{aligned} a(s+5) + b(s+1)(s+5) + c(s+1)^2(s+5) + d(s+1)^3 &= \\ = a(s+5) + b(s^2+6s+5) + c(s^3+7s^2+11s+5) + d(s^3+3s^2+3s+1) &= \\ = s^3(c+d) + s^2(b+7c+3d) + s(a+6b+11c+3d) + 5a+5b+5c+d &= \end{aligned}$$

$$= 10s + 20.$$

Perchè l'ultima equazione sia identicamente verificata, occorre che sia:

$$c + d = 0$$

$$b + 7c + 3d = 0$$

$$a + 6b + 11c + 3d = 10$$

$$5a + 5b + 5c + d = 20.$$

La soluzione di questo sistema di quattro equazioni *lineari algebriche* nelle incognite  $a, b, c$  e  $d$  è la seguente:

$$a = 2.5000, \quad b = 1.8750, \quad c = -0.4688, \quad d = 0.4688.$$

In conclusione:

$$v(t) = 0.5 a t^2 e^{-t} + b t e^{-t} + c e^{-t} + d e^{-5t}.$$



In generale, il **metodo di Heaviside** consiste nello sviluppare un'assegnata trasformata razionale  $V(s)$  in somma di termini elementari, di ognuno dei quali è nota l'antitrasformata; lo sviluppo è costruito prevedendo, per ogni polo reale  $p_i$  di  $V(s)$ , di molteplicità  $m_i$ , l'aggiunta di una sommatoria del tipo:

$$\sum_{h=1}^{m_i} \frac{R_{ih}}{(s - p_i)^h}$$

e per ogni coppia di poli  $p_i$  e  $\bar{p}_i$  di  $V(s)$ , di molteplicità  $m_i$ ,  $Im[p_i] \neq 0$ , l'aggiunta di una sommatoria del tipo

$$\sum_{h=1}^{m_i} \left[ \frac{Q_{ih}}{(s - p_i)^h} + \frac{\bar{Q}_{ih}}{(s - \bar{p}_i)^h} \right].$$

Il calcolo dei residui reali  $R_{ih}$  e di quelli complessi  $Q_{ih}$  può essere eseguito in vari modi. Fra questi, quello utilizzato negli esempi che precedono è uno dei più semplici.

Una volta effettuato lo sviluppo e calcolati i residui, le formule fornite ai punti **4** e **5** del paragrafo precedente consentono senza alcuna ulteriore difficoltà di esprimere  $v(t)$  come somma di tanti termini elementari, di natura esponenziale, quanti sono i poli di  $V(s)$ .

## *Commenti al metodo di Heaviside*

Da quanto precede si potrebbe trarre l'impressione che lo sviluppo di Heaviside sia importante soprattutto per la sua capacità di offrire una via relativamente semplice per il *calcolo* dell'antitrasformata di un segnale a trasformata razionale. In realtà, il suo merito principale (e più duraturo) è la capacità di rendere più trasparente il legame fra l'andamento qualitativo (la "forma") di un segnale a trasformata razionale *propria* e la posizione nel piano complesso dei poli e degli zeri della trasformata di Laplace. Infatti, è possibile osservare quanto segue.

- 1) Se tutti i poli di  $V(s)$  hanno parte reale negativa,  $v(t)$  è limitata e si annulla esponenzialmente all'infinito:  $v(\cdot)$  ha, quindi, un carattere *transitorio*. In generale, i poli di  $V(s)$  con parte reale negativa danno luogo alla *componente transitoria* di  $v(\cdot)$ .
- 2) Se tutti i poli di  $V(s)$  hanno parte reale negativa o nulla e quelli con parte reale nulla hanno molteplicità uguale a uno,  $v(t)$  è limitata, ma non si annulla all'infinito. A "transitorio esaurito", cioè dopo un intervallo di tempo di durata sufficiente a far sì che la componente transitoria diventi comparativamente trascurabile, permarranno solo i termini corrispondenti ai poli che giacciono sull'asse immaginario; precisamente: un termine costante se il polo è nell'origine, o una sinusoide per ogni coppia di poli immaginari.
- 3) Se almeno un polo di  $V(s)$  ha parte reale positiva, oppure ha parte reale nulla ma molteplicità maggiore di uno, allora la componente ad esso associata, e quindi  $v(\cdot)$ , è illimitata.
- 4) Ogni coppia di poli complessi coniugati di  $V(s)$  a parte immaginaria non nulla produce in  $v(t)$  una componente oscillatoria di pulsazione pari al coefficiente dell'unità immaginaria ( $\omega_r$ ). Tale oscillazione è tanto più persistente quanto più piccolo è il (*fattore di*) *smorzamento*  $\zeta$  dei due poli in questione ed è tanto più ampia quanto più i due poli sono *lontani dagli zeri* di  $V(s)$ . Se il fattore di smorzamento è positivo, l'oscillazione è smorzata con costante di tempo pari a  $(\zeta \omega_n)^{-1}$ ; se è nullo e la coppia ha molteplicità unitaria, la componente oscillatoria ha carattere permanente; se il fattore di smorzamento è negativo, oppure è nullo ma la coppia ha molteplicità maggiore di 1, la componente oscillatoria è di ampiezza crescente.
- 5) Se, fra i poli di  $V(s)$  con parte reale negativa che non abbiano però uno zero nelle immediate vicinanze, quelli più vicini all'asse immaginario (detti perciò *dominanti*) hanno parte reale uguale a  $-\alpha$ , allora la componente transitoria di  $v(\cdot)$  diventa comparativamente trascurabile dopo un intervallo di tempo di durata pari a circa 5÷8 volte la costante di tempo  $1/\alpha$ , che per questo è detta *costante di tempo dominante*. Nel caso di due poli dominanti complessi coniugati:  $(-\zeta\omega_n \pm j\omega_r)$ ,  $\omega_r = \omega_n (1 - \zeta^2)^{1/2}$ , la "durata pratica" del transitorio è stimabile, ad esempio, in  $5/\zeta\omega_n$ ; vale a dire (almeno per  $0 < \zeta \leq 0.5$ ) in circa  $0.7/\zeta$  oscillazioni complete (periodi), di durata pari a  $2\pi/\omega_r$ .

## 7. *Trasformazione di Fourier* (continua per segnali a t. continuo)

Si applica a segnali definiti su  $\mathbf{R}$ , *assolutamente integrabili o a energia finita*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |v(t)| dt < \infty \quad \text{oppure} \quad \int_{-\infty}^{\infty} v^2(t) dt < \infty .$$

Questa non è la più ampia classe di segnali (a tempo continuo o, per brevità, analogici) ai quali sia applicabile la trasformazione di Fourier (continua), ma è sufficientemente ampia per tutti gli scopi che qui ci prefiggiamo. Anzi, nella presente trattazione faremo prevalentemente riferimento alle trasformate di Fourier di segnali assolutamente integrabili o a energia finita definiti su  $\mathbf{R}^+$  ( $t \geq 0$ ) o, equivalentemente, nulli per  $t < 0$ . Ciò consentirà d'instaurare un più diretto confronto, quando esistono entrambe, fra le trasformate di Fourier e di Laplace del medesimo segnale.

*Formula di trasformazione.* La trasformata di Fourier  $V(\cdot)$  di un segnale analogico  $v(\cdot)$ , a volte indicata come  $\mathcal{F}[v(\cdot)]$ , è una funzione complessa di variabile immaginaria definita nel modo seguente:

$$V(j\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{-j\omega t} dt$$

La funzione  $|V(j\omega)|$  è detta *spettro del modulo di v*, mentre la funzione  $\angle V(j\omega)$  è detta *spettro dell'argomento*. Lo spettro del modulo consente, in generale, di mettere in evidenza connotati più interessanti del segnale  $v(\cdot)$ . Per questo, quando si parla di *spettro del segnale v*, si fa tacitamente riferimento allo spettro del modulo.

*Formula di antitrasformazione.* In ogni punto di continuità:

$$v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

### Osservazioni

- Se un segnale  $v$ , definito su  $\mathbf{R}^+$  ( $t \geq 0$ ), è  $\mathcal{F}$ -trasformabile, allora è anche  $\mathcal{L}$ -trasformabile e la sua trasformata di Laplace è legata a quella di Fourier (continua) esattamente come suggerito dalla notazione:

$$V(s) = V(j\omega)|_{j\omega=s}.$$

- Se un segnale  $v$ , definito su  $\mathbf{R}^+$ , è  $\mathcal{L}$ -trasformabile e tutti i poli della sua trasformata di Laplace  $V(s)$  hanno parte reale negativa, allora è anche  $\mathcal{F}$ -trasformabile e la sua trasformata di Fourier (continua) è legata a quella di Laplace esattamente come suggerito dalla notazione:

$$V(j\omega) = V(s)|_{s=j\omega}.$$

### Esempi

$$1) \quad v(t) = A \operatorname{sca}(t) := \begin{cases} 0 & , \text{ per } t \leq 0 \\ A & , \text{ per } t > 0 \end{cases}$$

*non è*  $\mathcal{F}$ -trasformabile, benché sia  $\mathcal{L}$ -trasformabile:  $V(s) = A/s$ .

$$2) \quad v(t) = A e^{pt} \quad , \quad t \geq 0 \quad , \quad p \in \mathbf{R} \quad .$$

Sappiamo già che:  $V(s) = \frac{A}{s-p}$ , qualunque sia  $p$ ; ma la trasformata di Fourier esiste solo se  $p < 0$ , e in quel caso è data da (Fig.3.11):

$$V(j\omega) = \frac{A}{j\omega - p}$$

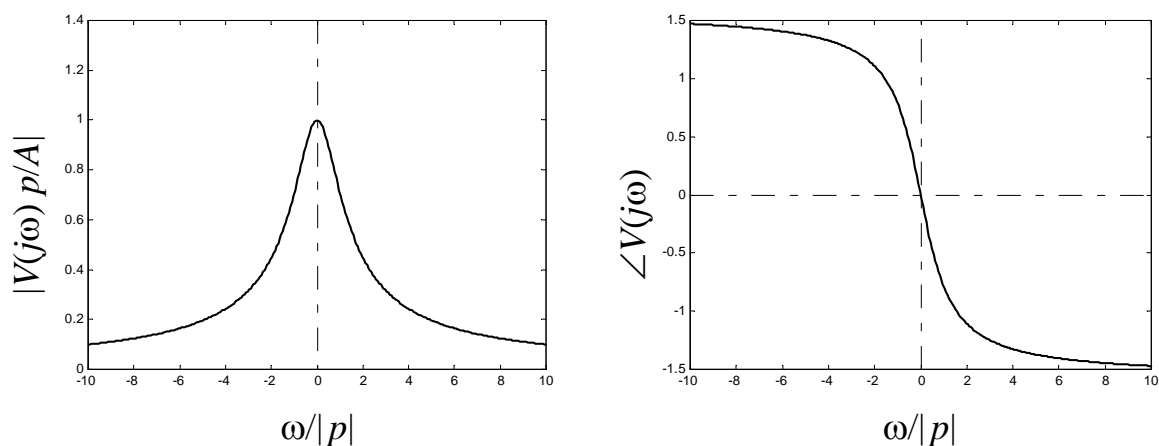


Fig. 3.11 : Spettri del modulo e della fase di  $A e^{pt}$ ,  $t \geq 0$ ,  $p < 0$ .



## 8. Proprietà della trasformazione e delle trasformate di Fourier

Per quanto osservato, diverse proprietà della trasformazione di Fourier (continua) sono direttamente deducibili da quelle, già viste, della trasformazione di Laplace. In particolare, ricordiamo le seguenti.

### 8.1 Linearità

Se:  $v(t) = \alpha v_1(t) + \beta v_2(t)$ , allora:  $V(j\omega) = \alpha V_1(j\omega) + \beta V_2(j\omega)$

### 8.2 Cambiamento di scala ( $\sigma$ reale positivo)

Se:  $v_2(t) = v_1(\sigma t)$ , allora:  $V_2(j\omega) = \frac{1}{|\sigma|} V_1(j\frac{\omega}{\sigma})$ .

Ad una contrazione ( $\sigma > 1$ ) della scala dei tempi (“tutto accade più in fretta”), corrisponde una dilatazione della scala delle pulsazioni (o delle frequenze); viceversa: a una dilatazione ( $\sigma < 1$ ) della scala dei tempi (“tutto accade più lentamente”) corrisponde una contrazione verso l’origine della scala delle pulsazioni (o delle frequenze).

### 8.3 Energia totale (Teorema di Parseval)

Se  $v(t)$  è un segnale "a energia finita", allora:

$$\int_{-\infty}^{\infty} v^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |V(j\omega)|^2 d\omega .$$

### 8.2 Simmetria

$V(-j\omega) = \overline{V(j\omega)}$  (ricordiamo che  $\bar{s}$  è il coniugato di  $s$ ).

Lo spettro del modulo ha quindi simmetria pari ( $|V(-j\omega)| = |V(j\omega)|$ ) e quello dell’argomento simmetria dispari ( $\angle V(-j\omega) = -\angle V(j\omega)$ ): l’andamento della trasformata di Fourier su  $\mathbf{R}^+$  ne determina l’andamento su  $\mathbf{R}$ .

## 9. Trasformazione di Fourier discreta (per segnali a t. continuo)

Si applica a *segnali periodici* regolari, di periodo (fondamentale)  $T$  qualsiasi.

*Formula di trasformazione.* La trasformata di Fourier discreta  $V^\#(\cdot)$  di un segnale  $v(\cdot)$  periodico di periodo  $T$ , a volte indicata come  $\mathcal{F}_D[v(\cdot)]$ , è una funzione complessa di variabile intera definita nel modo seguente:

$$V^\#(h) := \frac{1}{T} \int_0^T v(t) e^{-jh\Omega t} dt, \quad \Omega := \frac{2\pi}{T}.$$

*Formula di antitrasformazione.* In ogni punto di continuità:

$$v(t) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} V^\#(h) e^{jh\Omega t}.$$

### *Sviluppo in serie di Fourier*

La formula di anti-trasformazione (per trasformate di Fourier discrete di segnali a tempo continuo) è meglio nota come *sviluppo in serie di Fourier*: i suoi “coefficienti”, espressi in forma esponenziale, sono esattamente i valori di  $V^\#(\cdot)$ ; i valori, cioè, di quella qui denominata trasformata di Fourier discreta. Va tuttavia segnalato che questa terminologia, perfettamente simmetrica a quella universalmente in uso (sia pure con qualche residua ambiguità) per segnali a tempo discreto, non è comune. Nei testi di Analisi, lo sviluppo in serie di Fourier viene spesso presentato in una forma esteriormente diversa da quella che è stata adottata qui per meglio sottolineare l'evidente analogia con le precedenti formule di antitrasformazione. E' tuttavia istruttivo ricavarne anche qui una formulazione più familiare.

Poiché:  $V^\#(-h) = \overline{V^\#(h)}$  e  $s + \bar{s} = 2 \operatorname{Re}[s]$ , si ha:

$$\begin{aligned} v(t) &= \sum_{h=-\infty}^{\infty} V^\#(h) e^{jh\Omega t} = V^\#(0) + \sum_{h=1}^{\infty} [V^\#(h) e^{jh\Omega t} + V^\#(-h) e^{-jh\Omega t}] = \\ &= V^\#(0) + \sum_{h=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} [V^\#(h) e^{jh\Omega t}]. \end{aligned}$$

Se, per ogni  $h$ , indichiamo con  $M(h)$  e  $\varphi(h)$ , rispettivamente, il modulo e l'argomento di  $V^\#(h)$ ; se, cioè, poniamo:

$$V^\#(h) := M(h) e^{j\varphi(h)}$$

allora

$$\operatorname{Re} [V^\#(h) e^{jh\Omega t}] = \operatorname{Re} [M(h) e^{j(h\Omega t + \varphi(h))}] = M(h) \cos(h\Omega t + \varphi(h)) .$$

Pertanto (poiché  $\varphi(0) = 0$ ):

$$v(t) = M(0) + 2 \sum_{h=1}^{\infty} M(h) \cos(h\Omega t + \varphi(h))$$

che è appunto una delle forme più consuete del cosiddetto sviluppo in serie di Fourier, secondo il quale un segnale periodico, di pulsazione fondamentale  $\Omega$ , può essere espresso come somma di una costante (il valor medio) e un numero indefinito (eventualmente infinito) di sinusoidi di pulsazione multipla di  $\Omega$ , e di ampiezza e fase opportune. Quella che abbiamo chiamato trasformata di Fourier discreta di un segnale periodico  $v(\cdot)$  non è che una rappresentazione compatta dei “parametri”  $M(h)$  e  $\varphi(h)$  che compaiono in una delle formulazioni più note dello sviluppo in serie di Fourier. La sinusoida  $2 M(h) \cos(h\Omega t + \varphi(h))$  è detta  $h$ -esima *armonica* di  $v(\cdot)$ .

Ricordando che  $\cos(\alpha + \beta) = (\cos \alpha)(\cos \beta) - (\sin \alpha)(\sin \beta)$ , si ha:

$$2 M(h) \cos(h\Omega t + \varphi(h)) = 2 M(h) \cos(\varphi(h)) \cos(h\Omega t) - 2 M(h) \sin(\varphi(h)) \sin(h\Omega t).$$

Quindi, ponendo:  $a_0 := M(0)$ ,

$$a_h := 2 M(h) \cos(\varphi(h)) \quad , \quad b_h := -2 M(h) \sin(\varphi(h)) \quad , \quad \forall h \geq 1 \quad ,$$

si può pervenire ad un’ulteriore ed equivalente forma dello sviluppo in serie di Fourier:

$$v(t) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h \cos(h\Omega t) + b_h \sin(h\Omega t) \quad .$$

Gli *spettri* (modulo e fase) di una trasformata discreta  $V^\#(h)$  sono ovviamente discreti; funzioni, cioè, della variabile intera  $h$  (spettri “a righe”). Tuttavia, poiché l’armonica  $h$ -esima di  $v(\cdot)$  è una sinusoida di pulsazione  $h\Omega$ , è di solito preferibile rappresentare gli spettri di un segnale periodico mettendo in ascisse  $h\Omega$ , anziché  $h$ .

**Esempi**

1)  $v(t) = A \cos(\Omega t + \varphi)$  ,  $A = 5$  ,  $\Omega = 200$  [r/s] ,  $\varphi = -0.8$  [r]

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 0.0314 \text{ [s]}$$

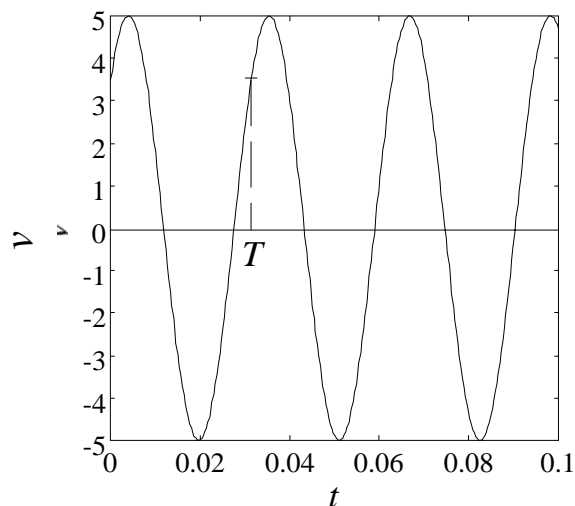


Fig. 3.12 : Il segnale  $v(t) = 5 \cos(200 t - 0.8)$ .

$$V^\#(h) = \begin{cases} \frac{A}{2} e^{j\varphi} & , \text{ per } h = 1 ; \\ \frac{A}{2} e^{-j\varphi} & , \text{ per } h = -1 ; \\ 0 & , \text{ per ogni altro valore di } h . \end{cases}$$

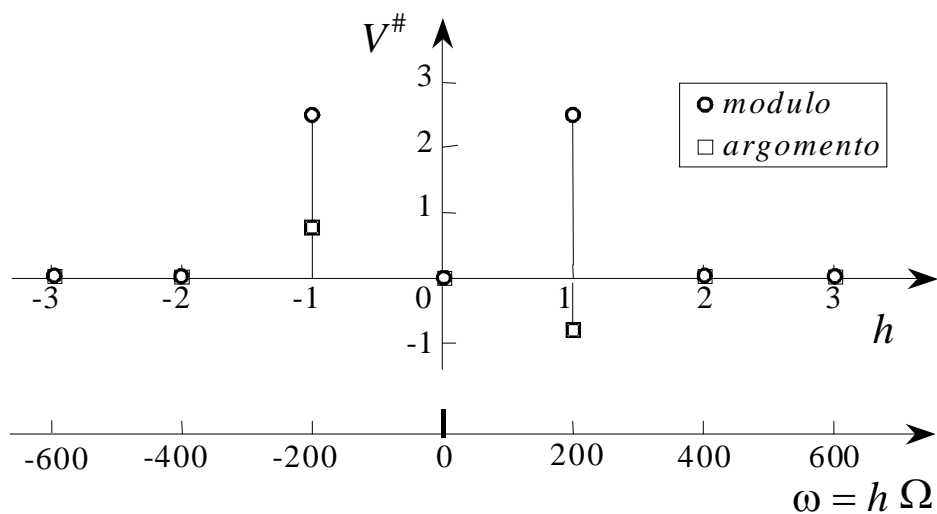


Fig. 3.13 : Spettri (“a righe”) del modulo e dell’argomento di  $V^\#(\cdot)$ .

- 2) Si consideri il segnale  $v(\cdot)$  mostrato in Fig.3.14. Si tratta di un segnale periodico di periodo fondamentale  $T = 0.6283$  [s]. La corrispondente pulsazione fondamentale è  $\Omega := 2\pi/T = 10$  [r/s]. Modulo e argomento (spettri “a righe”) della trasformata di Fourier discreta di  $v(\cdot)$  sono mostrati in Fig.3.15.

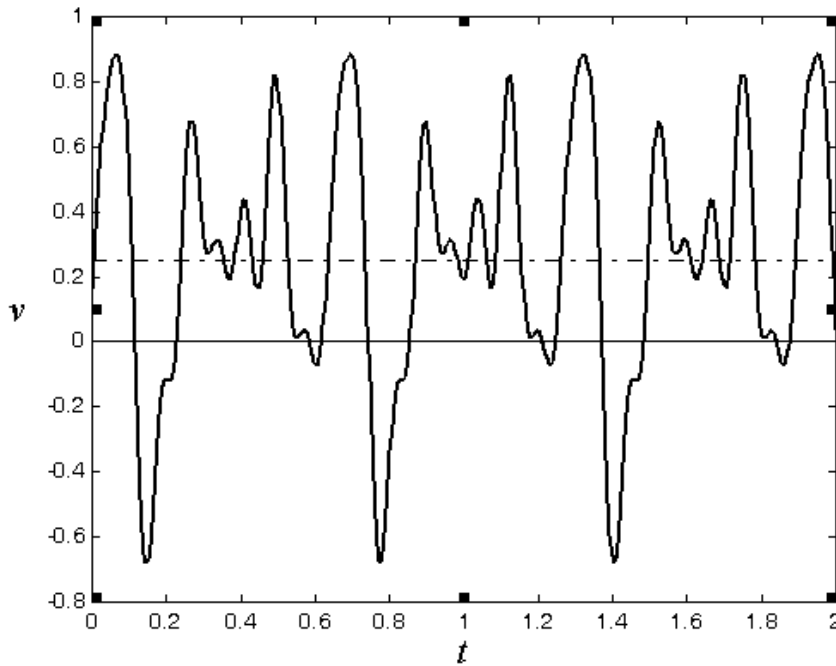


Fig. 3.14 : Il segnale periodico  $v(\cdot)$ .

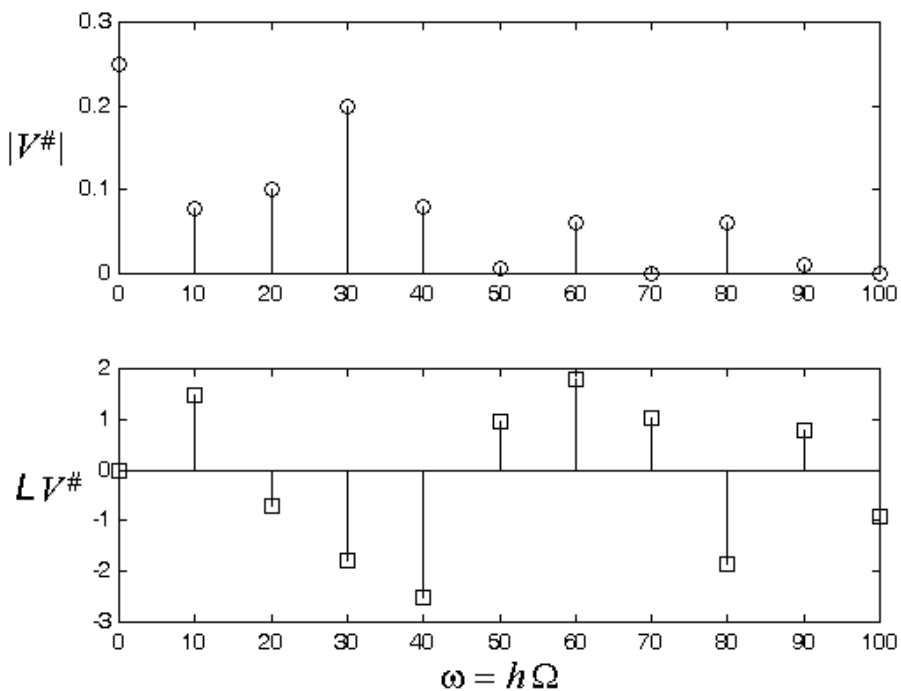


Fig. 3.15 : Spettri (“a righe”) del modulo e della fase di  $V^\#(\cdot)$ .

## 10. Potenza media di un segnale periodico

Nel caso di segnali  $v(\cdot)$  periodici di periodo  $T$ , l'equivalente del Teorema di Parseval riguarda la potenza media (anziché l'energia totale) del segnale:

$$P_m := \frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt = \sum_{h=-\infty}^{\infty} |V^\#(h)|^2$$

**Esempio.** Riprendiamo l'esempio (1) del paragrafo precedente:

$$v(t) = A \cos(\Omega t + \varphi)$$

$$V^\#(h) = \begin{cases} \frac{A}{2} e^{j\varphi} & , \text{ per } h = 1 ; \\ \frac{A}{2} e^{-j\varphi} & , \text{ per } h = -1 ; \\ 0 & , \text{ per ogni altro valore di } h . \end{cases}$$

$$P_m = \left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{A}{2}\right)^2 = \frac{A^2}{2}$$

Se  $A = 2.5$  ,  $\Omega = 200$  [r/s] ,  $\varphi = -0.8$  [r];  $T = \frac{2\pi}{\Omega} = 0.0314$  [s],  $P_m = \frac{A^2}{2} = 3.125$ .

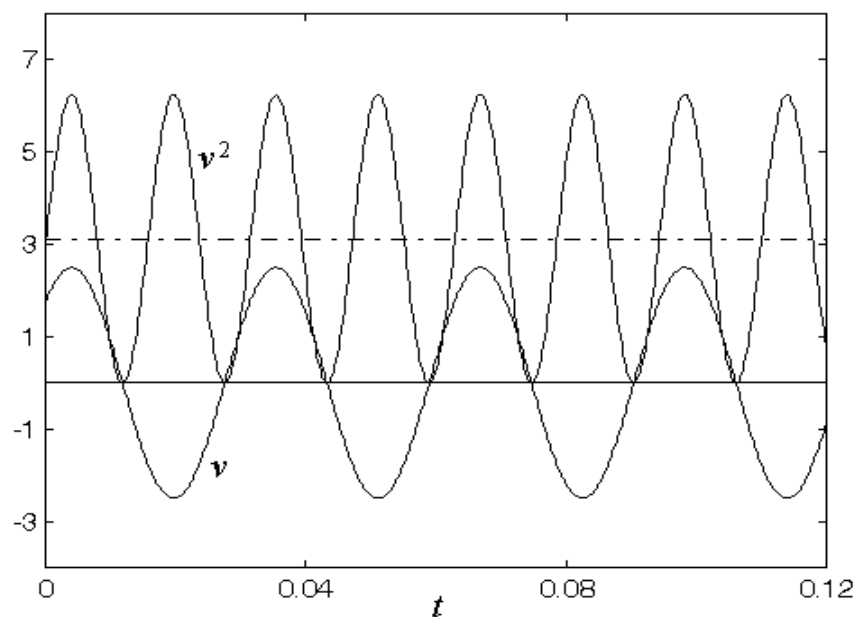


Fig. 3.16 : Potenza media del segnale  $v(t) = 2.5 \cos(200 t - 0.8)$ .

## 11. Segnali di durata finita

Un segnale di durata finita (Fig.3.2) può essere equivalentemente rappresentato come segnale a energia finita o come segnale periodico, quindi a potenza media finita (Fig.3.4). E' interessante confrontare le trasformate di Fourier dei due segnali di Fig.3.4 che, dal punto di vista dell'informazione contenuta, sono appunto equivalenti a quello di Fig.3.2.

- 1) Osserviamo che la trasformata di Fourier (continua) del segnale "a energia finita" di Fig.3.4-a, nullo al di fuori dell'intervallo  $[0, T]$ , è data da:

$$V(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^T v(t) e^{-j\omega t} dt .$$

- 2) Per definizione, la trasformata di Fourier discreta del segnale periodico (a potenza media finita) di Fig.3.4-b è invece data da

$$V^\#(h) = \frac{1}{T^*} \int_0^{T^*} v(t) e^{-jh\Omega^* t} dt = \frac{1}{T^*} V(jh\Omega^*) , \quad T^* > T , \quad \Omega^* := \frac{2\pi}{T^*} < \Omega .$$

**Conclusion.** Per un segnale  $v(\cdot)$  di durata finita  $T$ , la trasformata di Fourier (continua) è, in un certo senso, ridondante. La successione di numeri (complessi) derivante da un semplice campionamento (a passo  $\Omega^* < \Omega := 2\pi/T$ ) di tale trasformata, contiene esattamente la stessa informazione di  $v(\cdot)$  (infatti, essa consente di risalire esattamente, tramite lo sviluppo in serie di Fourier, al segnale di partenza).

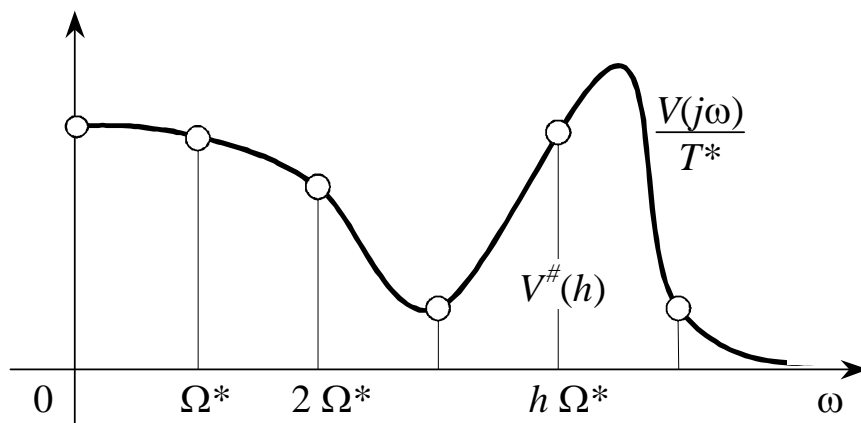


Fig. 3.17 : Per ogni segnale di durata finita  $T$  e per ogni  $T^* > T$ ,  $V^\#(h) = V(jh\Omega^*)/T^*$ .