

Capitolo 2
Sistemi lineari tempo-invarianti:
analisi nel dominio del tempo

1. *Introduzione*

In questo capitolo ci occuperemo dell'analisi "nel dominio del tempo" dei sistemi dinamici lineari tempo-invarianti. Vale a dire della definizione e dello studio delle loro principali proprietà condotto adottando, per i segnali, la loro rappresentazione per così dire naturale: di funzioni del tempo. Vedremo in uno dei capitoli successivi come un'analisi in parte simile e in parte complementare, detta nel dominio della frequenza", possa essere utilmente condotta sulla base di una rappresentazione più astratta dei segnali, che saranno visti ancora come funzioni ma non più come funzioni del tempo.

Nei paragrafi che seguono esamineremo innanzitutto il movimento (dello stato) e la risposta (o movimento dell'uscita) di un sistema S , prodotti da un assegnato andamento $u(\cdot)$ della variabile d'ingresso, a partire da un assegnato stato iniziale. Il risultato ottenuto consentirà di riconoscere diverse versioni, in questo contesto, del cosiddetto principio di sovrapposizione degli effetti; presente, come si sa, in tutti i rami del sapere dove i sistemi lineari svolgano un ruolo significativo.

Successivamente, seguendo l'impostazione data da A. M. Liapunov più di un secolo fa, affronteremo il problema della stabilità. Dopo aver introdotto e commentato le principali definizioni riguardanti la stabilità del movimento in un sistema qualsiasi, non necessariamente lineare, concentreremo l'attenzione sui movimenti di un generico sistema lineare tempo-invariante. Vedremo come il problema della stabilità assuma aspetti peculiari e interessanti, nel caso dei sistemi lineari. Saremo quindi in grado di formulare alcuni criteri di stabilità decisamente notevoli, tanto sul piano concettuale quanto su quello operativo. Accenneremo infine al caso di sistemi affetti da parametri e al problema della stabilità robusta rispetto all'insieme dei valori ammissibili dei parametri; vale a dire a quelle caratteristiche di stabilità che sussistono qualunque sia il valore ammissibile dei parametri.

Nell'ultima parte del capitolo, incontreremo e cominceremo ad esaminare alcune risposte particolarmente significative: le risposte canoniche, relative a ingressi dall'andamento particolarmente significativo e per questo indicato come "canonico", le risposte costanti a un ingresso costante o condizioni di equilibrio, le risposte periodiche a un ingresso periodico.

2. *Movimenti, risposte e principio di sovrapposizione degli effetti*

Consideriamo un sistema dinamico S lineare, tempo-invariante in forma normale:

$$S : \begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) & \text{equazione di stato} \\ y(t) = C x(t) + D u(t) & \text{equazione d'uscita .} \end{cases}$$

dove x è un vettore n -dimensionale, u è un vettore m -dimensionale, y è un vettore p -dimensionale, A è una matrice $n \times n$, B è una matrice $n \times m$, C è una matrice $p \times n$ e D è una matrice $p \times m$.

Dato un particolare andamento $u(\cdot)$ della variabile d'ingresso, dall'istante iniziale t_0 in poi, e un particolare valore x_0 dello stato iniziale: $x(t_0) = x_0$, ci chiediamo quali siano il *movimento* (dello stato) $x(\cdot)$ e la *risposta* (o movimento dell'uscita) $y(\cdot)$, prodotti da $u(\cdot)$ a partire dallo stato iniziale x_0 . Si noti che, essendo S tempo-invariante, si sarebbe potuto porre $t_0 = 0$, senza con questo ledere la generalità della trattazione.

Procediamo per gradi, cominciando ad esaminare l'equazione di stato nel caso scalare: $m = n = p = 1$. Il problema da risolvere consiste in un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti:

$$\dot{x}(t) = a x(t) + b u(t) \quad ,$$

soggetta alla condizione iniziale: $x(t_0) = x_0$.

La soluzione di questa equazione può essere espressa in forma esplicita nel modo seguente:

$$x(t) = e^{a(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)} b u(\tau) d\tau := \varphi(t; x_0, u_{(t_0, t)}(\cdot)) \quad .$$

Verificare che si tratti effettivamente della soluzione cercata non è difficile; basta infatti accertare che il movimento $x(\cdot)$ soddisfa sia l'equazione, sia la condizione iniziale. Il secondo punto è immediato; infatti è chiaro che, per $t = t_0$, $x(t) = x_0$. Quanto al primo, occorre preliminarmente ricordare la formula di derivazione sotto segno di integrale; infatti, la verifica che ci accingiamo a fare richiede il calcolo di $\dot{x}(t)$, ma nell'espressione di $x(t)$ è presente un integrale dove la variabile t compare sia nel secondo estremo che nell'integrando. Ricordiamo quindi che se

$$v(t) := \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} w(t, \tau) d\tau$$

e le funzioni α , β e w sono sufficientemente regolari, allora:

$$\dot{v}(t) = w(t, \beta(t)) \dot{\beta}(t) - w(t, \alpha(t)) \dot{\alpha}(t) + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial w}{\partial t}(t, \tau) d\tau .$$

Derivando rispetto al tempo t l'espressione data per $x(t)$ e applicando per la derivata del termine integrale la formula appena ricordata [in questo caso abbiamo: $\alpha(t) = t_0$, $\beta(t) = t$, $w(t, \tau) = e^{a(t-\tau)} b u(\tau)$], si ottiene:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= a e^{a(t-t_0)} x_0 + b u(t) - 0 + \int_{t_0}^t a e^{a(t-\tau)} b u(\tau) d\tau = \\ &= a \left[e^{a(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)} b u(\tau) d\tau \right] + b u(t) = a x(t) + b u(t) \end{aligned}$$

Pertanto,

$$x(t) = e^{a(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)} b u(\tau) d\tau$$

è effettivamente una soluzione dell'equazione: $\dot{x}(t) = a x(t) + b u(t)$.

Passiamo ora a considerare l'equazione di stato di S nel caso vettoriale (m e n qualsiasi). E' possibile dimostrare che, anche in questo caso, la soluzione esiste, è unica e può essere fornita in forma esplicita. Precisamente, la soluzione è data dalla *formula di Lagrange* (dal nome del celebre matematico torinese, che l'ottenne mediante il cosiddetto "metodo di variazione delle costanti"):

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau = \varphi(t; x_0, u_{(t_0, t)}(\cdot))$$

Come si può notare, la formula è sostanzialmente identica alla precedente, valida nel caso scalare. Essa tuttavia merita qualche commento. Innanzitutto, compare qui un esponenziale con esponente matriciale. Per comprenderne il senso, è opportuno pensare allo sviluppo di Mac Laurin (o sviluppo di Taylor attorno all'origine) della più familiare funzione esponenziale ad esponente reale:

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k = 1 + z + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{6} z^3 + \frac{1}{24} z^4 + \dots$$

Se l'esponente è una matrice quadrata M , poniamo:

$$e^M := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} M^k = I + M + \frac{1}{2} M^2 + \frac{1}{6} M^3 + \frac{1}{24} M^4 + \dots$$

dove compaiono soltanto la matrice identità I e le potenze di M . Naturalmente, non bisogna farsi intimidire, qui, dalla pesantezza dei calcoli che le precedenti espressioni suggeriscono. Si tratta infatti di calcoli che fondamentalmente non devono essere svolti; non in questo modo e, comunque, non a mano. La formula di Lagrange è fondamentale, ma *non* come strumento per la soluzione *numerica* di equazioni differenziali vettoriali del prim'ordine, qual è l'equazione di stato di S . Il Calcolo numerico fornisce infatti, a quello scopo, altri e più efficaci strumenti, oggi disponibili in molti pacchetti software di larga diffusione e basso costo. Quella formula è importante soprattutto da un punto di vista concettuale: per la luce che getta sul legame fra stato iniziale, andamento dell'ingresso e conseguente movimento (dello stato) di S .

Noto il movimento (dello stato) di S , è immediato calcolare, tramite l'equazione d'uscita, la *risposta* (o movimento dell'uscita) prodotta da $u(\cdot)$ a partire dallo stato iniziale x_0 :

$$y(t) = C e^{A(t-t_0)} x_0 + C \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau + D u(t) := \eta(t; x_0, u_{[t_0, t]}(\cdot))$$

La formula di Lagrange, così come quest'ultima formula che dà la risposta di S all'istante t , mettono in evidenza come i contributi individualmente dovuti alle due "cause" di movimento, vale a dire lo stato iniziale e l'ingresso, siano distinti e additivi. Infatti, tanto il movimento $x(\cdot)$ quanto la risposta $y(\cdot)$ sono somma di due contributi: uno, dovuto esclusivamente allo stato iniziale, è detto *movimento libero* o rispettivamente *risposta libera*, l'altro, dovuto esclusivamente all'ingresso, è detto *movimento forzato* o rispettivamente *risposta forzata* (da u):

$$x(t) = x_i(t) + x_f(t) \quad , \quad x_i(t) := e^{A(t-t_0)} x_0 \quad , \quad x_f(t) := \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau;$$

$$y(t) = y_i(t) + y_f(t) \quad , \quad y_i(t) := C e^{A(t-t_0)} x_0 \quad ,$$

$$y_f(t) := C \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau + D u(t).$$

Siamo così pervenuti, nell'ambito dei sistemi dinamici lineari (tempo-invarianti) ad una delle possibili formulazioni del **principio di sovrapposizione degli effetti**.

Il principio in questione può essere ulteriormente articolato e approfondito. Ad esempio, se il numero m di elementi del vettore u è maggiore di uno (se S è soggetto a più di un ingresso scalare), si può definire l'effetto di ogni singolo ingresso e riformulare il principio in modo più dettagliato. Sia infatti:

$$B := [B_1 \quad B_2 \quad \dots \quad B_m] \quad , \quad D := [D_1 \quad D_2 \quad \dots \quad D_m] \quad ;$$

indichiamo, cioè, con B_i la i -esima colonna di B e con D_i la i -esima colonna di D . Allora:

$$x_f(t) := \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} \sum_{i=1}^m B_i u_i(\tau) d\tau =$$

$$= \sum_{i=1}^m \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B_i u_i(\tau) d\tau := \sum_{i=1}^m x_{f,i}(t)$$

$$y_f(t) := C \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau + D u(t) =$$

$$= C \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} \sum_{i=1}^m B_i u_i(\tau) d\tau + \sum_{i=1}^m D_i u_i(t) =$$

$$= \sum_{i=1}^m \left[C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B_i u_i(\tau) d\tau + D_i u_i(t) \right] := \sum_{i=1}^m y_{f,i}(t)$$

dove con $x_{f,i}(t)$ e $y_{f,i}(t)$ si sono indicati gli effetti su x e y dovuti al solo $u_i(\cdot)$; si sono indicati, cioè, gli andamenti di x e, rispettivamente, di y prodotti dall'ingresso $u_i(\cdot)$, quando $x_0 = 0$ e $u_k(\cdot) = 0$ per ogni $k \neq i$.

Da un altro punto di vista, se $u(\cdot)$ è formato dalla somma di due (o più) segnali: $u(\cdot) = u_a(\cdot) + u_b(\cdot)$, si può vedere che tanto $x_f(\cdot)$ quanto $y_f(\cdot)$ sono la somma degli effetti individualmente prodotti su x e su y dai segnali che compongono l'ingresso; vale a dire, da $u_a(\cdot)$ e da $u_b(\cdot)$:

$$\begin{aligned} x_f(t) &:= \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B [u_a(\tau) + u_b(\tau)] d\tau = \\ &= \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u_a(\tau) d\tau + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u_b(\tau) d\tau := x_{fa}(t) + x_{fb}(t) ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_f(t) &:= C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau + D u(t) = \\ &= C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B [u_a(\tau) + u_b(\tau)] d\tau + D [u_a(t) + u_b(t)] = \\ &= C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u_a(\tau) d\tau + D u_a(t) + C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u_b(\tau) d\tau + D u_b(t) := \\ &:= y_{fa}(t) + y_{fb}(t) . \end{aligned}$$

Concludendo, nel caso dei sistemi dinamici (tempo-invarianti) il *principio di sovrapposizione degli effetti* può essere formulato con riferimento alle diverse *cause* di moto: lo stato iniziale, i singoli ingressi, le singole componenti di ogni ingresso.

3. Sistemi lineari: analisi della stabilità

Seguendo Liapunov (Cap.1, Paragrafo 8), consideriamo l'equazione di stato:

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) .$$

di un sistema S lineare e tempo-invariante. In questo caso, sappiamo che il *movimento nominale*, forzato da $\tilde{u}(\cdot)$ a partire da $x(0) = \tilde{x}_0$, è dato da:

$$\tilde{x}(t) = e^{A t} \tilde{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \tilde{u}(\tau) d\tau$$

mentre, per ogni perturbazione δx_0 dello stato iniziale,

$$x_p(t) = e^{A t} (\tilde{x}_0 + \delta x_0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \tilde{u}(\tau) d\tau ;$$

quindi, la differenza fra movimento perturbato e movimento nominale è data da:

$$\delta x(t) := x_p(t) - \tilde{x}(t) = e^{A t} \delta x_0 .$$

Come si vede, il legame tra δx_0 e $\delta x(t)$, legame che per definizione determina la stabilità o meno del movimento $\tilde{x}(\cdot)$, dipende esclusivamente dalla matrice $e^{A t}$ detta *di transizione*. Esso non dipende, quindi, né da \tilde{x}_0 né da $\tilde{u}(\cdot)$; *non dipende*, cioè, *dal particolare* movimento considerato come *movimento nominale*.

Conseguenza 1

In un *sistema lineare*, se un movimento è (asintoticamente) stabile, tutti i movimenti sono (asintoticamente) stabili; se un movimento è instabile, tutti i movimenti sono instabili. Pertanto ha senso, nel caso di sistemi lineari, parlare di *stabilità*, di *stabilità asintotica* o di *instabilità del sistema*.

Conseguenza 2

Se S è asintoticamente stabile e δx_0 è sufficientemente piccola ($\|\delta x_0\| < \delta$) allora sappiamo che $\delta x(t)$ tende a 0 per t che tende all'infinito. Ora, comunque grande sia δx_0 , è sempre possibile trovare N reale tale che la norma di $\delta x_0^\circ := \delta x_0/N$ sia "sufficientemente piccola" (minore di δ) e pertanto: $\delta x^\circ(t) := e^{A t} \delta x_0^\circ$ tende sicuramente a 0 per t che tende all'infinito. Ma se $\delta x_0 = N \delta x_0^\circ$, allora anche $\delta x(t) := e^{A t} \delta x_0 = e^{A t} N \delta x_0^\circ = N \delta x^\circ(t)$ tende a 0 per t che tende all'infinito. In altre parole, se S è asintoticamente stabile, il bacino di attrazione di ogni

movimento di S è l'intero spazio di stato; *in un sistema lineare la stabilità asintotica è quindi sempre globale.*

La precedente argomentazione può essere ulteriormente affinata per giungere ad una notevole conclusione relativa al nesso fra stabilità, o stabilità asintotica, di S ed equivalenti proprietà della matrice di transizione $\Phi(t) := e^{A t}$.

Mostriamo innanzitutto che se la matrice di transizione $\Phi(\cdot)$ è limitata (se, cioè, il valore assoluto di ogni suo elemento è superiormente limitato), il sistema S è stabile. Infatti, se $\Phi(\cdot)$ è limitata, sia:

$$k(t) := \sup_{\|z\|=1} \|\Phi(t) z\| \leq K ;$$

allora, $\|\Phi(t) z\| = \|\Phi(t) (z/\|z\|)\| \|z\| \leq K \|z\|$, per ogni $t \in \mathbf{R}$ e $z \in \mathbf{R}^n$. Quindi, per ogni $\varepsilon > 0$, sia: $\delta = \varepsilon/K$; in questo modo, $\|\delta x_0\| < \delta$ implica $\|\delta x(t)\| = \|\Phi(t) \delta x_0\| < K \delta = \varepsilon$. E' inoltre evidente che se, oltre a essere limitata, $\Phi(\cdot)$ si annulla all'infinito, il sistema S è asintoticamente stabile.

Mostriamo ora che se S è stabile allora $\Phi(\cdot)$ è limitata. Infatti, se $\Phi_{ij}(\cdot)$ fosse illimitata, si potrebbe porre: $\delta x_{0i} = 0$ per ogni $i \neq j$, $\delta x_{0j} = \alpha \neq 0$; in tal caso si avrebbe: $\delta x_i(t) = \Phi_{ij}(t) \alpha$; quindi, per ogni $\delta > 0$, esisterebbero $\alpha < \delta$ e δx_0 , con $\|\delta x_0\| = \alpha$, tali da far sì che $\delta x(\cdot)$ risulti illimitata (contrariamente all'ipotesi di stabilità di S). Infine, se S è asintoticamente stabile allora $\Phi(\cdot)$ è ovviamente limitata e, in più, si annulla all'infinito. Infatti, se $\Phi_{ij}(\cdot)$ non si annullasse all'infinito, basterebbe porre $\delta x_{0i} = 0$ per ogni $i \neq j$, $\delta x_{0j} = \alpha \neq 0$; si avrebbe di nuovo: $\delta x_i(t) = \Phi_{ij}(t) \alpha$; quindi, per ogni $\delta > 0$, esisterebbero $\alpha < \delta$ e δx_0 , con $\|\delta x_0\| = \alpha$, tali da far sì che $\delta x(\cdot)$ non si annulli all'infinito (contrariamente all'ipotesi di asintoticastabilità di S).

La discussione appena conclusa può essere riassunta nel modo seguente.

Proposizione 1 (*Stabilità di S e matrice di transizione*)

Il sistema S , lineare e tempo-invariante, è stabile se e solo se ogni elemento della sua matrice di transizione è limitato; è asintoticamente stabile se e solo se ogni elemento della sua matrice di transizione è limitato e tende a zero per t che tende all'infinito.



Osserviamo innanzitutto che, in vista della Proposizione 1, in un sistema S lineare *asintoticamente stabile* il movimento libero, vale a dire l'effetto dello stato iniziale sulla risposta di S a un ingresso qualsiasi, svanisce (tende a zero) col passare del tempo (al tendere di t all'infinito).

Occorre tuttavia ammettere che, da un punto di vista operativo, la soluzione offerta dalla Proposizione 1 al problema di stabilire se un sistema dinamico S lineare e tempo-invariante sia (asintoticamente) stabile o no appare

insoddisfacente. Data infatti la matrice dinamica A di S , è tutt'altro che semplice stabilire se la corrispondente matrice di transizione sia limitata o meno e, qualora essa sia limitata, se si annulli o no all'infinito. Occorre quindi individuare un criterio computazionalmente meno impegnativo.

Vediamo, almeno nel caso più semplice in cui la matrice dinamica A di S sia *diagonalizzabile*, come si possa ricavare un criterio che risponda all'esigenza appena sottolineata. Esaminiamo, cioè, il caso in cui esiste una matrice T non singolare tale che $\Lambda := T A T^{-1}$ è diagonale. Allora, gli elementi $\lambda_i, i=1, 2, \dots, n$, della diagonale principale di Λ sono gli autovalori di A , infatti:

$$\det(s I - A) = \det(s T^{-1} T - T^{-1} \Lambda T) = \det(T^{-1}(s I - \Lambda) T) = \det(s I - \Lambda) = \prod_{i=1}^n (s - \lambda_i).$$

Inoltre, notando che $A^k = (T^{-1} \Lambda T)^k = T^{-1} \Lambda T T^{-1} \Lambda T \dots T^{-1} \Lambda T = T^{-1} \Lambda^k T$, si ha:

$$e^{A t} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^{-1} \Lambda^k T t^k}{k!} = T^{-1} \Theta T$$

dove Θ è una matrice diagonale, e l' i -esimo elemento della diagonale di Θ è dato da:

$$\vartheta_i = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_i^k t^k}{k!} = e^{\lambda_i t} = e^{a_i t} e^{j b_i t} = e^{a_i t} (\cos b_i t + j \sin b_i t),$$

avendo posto: $\lambda_i := a_i + j b_i$. E' allora evidente che la matrice di transizione $e^{A t}$ è limitata e tende a zero per t che tende all'infinito se e solo se la parte reale a_i degli autovalori λ_i di $A, i=1, 2, \dots, n$, è negativa; è limitata, se alcuni autovalori di A hanno parte reale nulla e gli altri hanno parte reale negativa; è illimitata, se almeno un autovalore di A ha parte reale positiva.

Nel caso in cui la matrice A non sia diagonalizzabile, l'analisi è più laboriosa e la conclusione non dipende soltanto dalla posizione degli autovalori di A nel piano complesso. Rimandando ad altra sede per tale analisi più approfondita, riassumiamo con la proposizione che segue le conclusioni che, in generale, si possono trarre esaminando soltanto gli autovalori di A .

Proposizione 2 (Stabilità di S e autovalori della matrice dinamica A)

Il sistema S , lineare e tempo-invariante, è *asintoticamente stabile* se e solo se gli autovalori di A hanno parte reale negativa.

Se la parte reale di almeno un autovalore di A è positiva, il sistema S è *instabile*.

Se la parte reale degli autovalori di A è negativa o nulla e gli autovalori con parte reale nulla sono semplici, il sistema S è *stabile*.

Negli altri casi, cioè se la parte reale di almeno due autovalori coincidenti di A è nulla e quella di tutti gli altri è negativa o nulla, il sistema può essere tanto *instabile* quanto *stabile* (ma non asintoticamente stabile).

Illustriamo con un esempio quest'ultima affermazione. Consideriamo, per la matrice dinamica A , due possibili valori:

$$A_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

E' immediato riconoscere che A_a e A_b , pur essendo diverse, hanno lo stesso polinomio caratteristico: $\det(sI - A_a) = \det(sI - A_b) = s^2$. Pertanto entrambe hanno due autovalori coincidenti nell'origine del piano complesso (parte reale nulla!). Inoltre, A_a è diagonale, mentre A_b non è diagonalizzabile. Poiché: $\delta x(t) = e^{A t} \delta x_0$, è evidente che: $\dot{\delta x}(t) = A \delta x(t)$. Se $A = A_a$, abbiamo: $\dot{\delta x}_1(t) = \dot{\delta x}_2(t) = 0$; quindi: $\delta x_1(t) = \delta x_{01}$, $\delta x_2(t) = \delta x_{02}$. Ciò significa che, in questo caso, $e^{A t} = I$; pertanto, la matrice di transizione è limitata e, per la Proposizione 1, il sistema S_a è stabile. Se invece $A = A_b$, si ha: $\dot{\delta x}_1(t) = \delta x_2(t)$ e $\dot{\delta x}_2(t) = 0$; quindi: $\delta x_2(t) = \delta x_{02}$ mentre $\delta x_1(t) = \delta x_{02} t + \delta x_{01}$. Ciò significa che in questo secondo caso si ha:

$$e^{A_b t} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

palesamente illimitata; quindi, sempre per la Proposizione 1, il sistema S_b è instabile.

L'importanza della Proposizione 2 può essere difficilmente sopravvalutata. Essa infatti fornisce una chiave esauriente per l'analisi dell'*asintotica stabilità* di un sistema lineare tempo-invariante. D'altronde vedremo che, da un punto di vista applicativo, la stabilità asintotica è d'interesse assolutamente predominante; spesso sarà anzi insufficiente accontentarsi della stabilità asintotica; in fase di progetto, bisognerà assicurare, che sia sufficientemente elevato un *grado di asintotica stabilità* opportunamente definito.

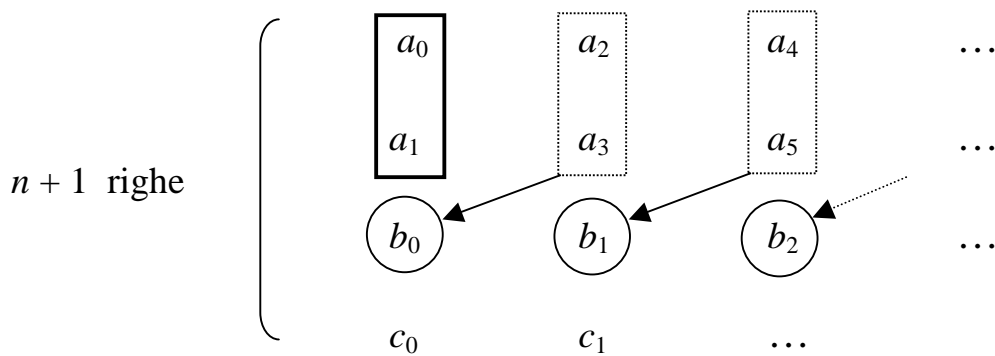
E' comunque innegabile che, per sistemi di ordine superiore al secondo, anche il calcolo degli autovalori non è banale. E' quindi naturale chiedersi se, per verificare la condizione di asintotica stabilità espressa dalla Proposizione 2, sia davvero necessario *calcolare* gli autovalori di A ; se sia necessario, cioè, risolvere l'equazione caratteristica: $\det(s I - A) = 0$. Il primo a rispondere compiutamente al quesito appena sollevato fu, nel 1877, lo studioso britannico E. J. Routh, seguito dallo svizzero A. Hurwitz che, diciotto anni dopo, indipendentemente trovò una soluzione diversa, ma equivalente. Nel seguito, ci limiteremo ad illustrare la versione dovuta a Routh.

Dato un polinomio di grado n :

$$p(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n, \quad a_0 \neq 0$$

si tratta di formulare un criterio che consenta di stabilire se le radici di $p(s)$ abbiano o no parte reale negativa. La formulazione del criterio elaborato da Routh richiede preliminarmente la costruzione di una tabella di $n+1$ righe e forma “quasi triangolare”, detta Tabella di Routh.

La **Tabella di Routh** si costruisce nel modo seguente:



$$b_0 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} \quad , \quad b_1 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1} \quad , \quad \text{etc.}$$

$$c_0 = \frac{b_0 a_3 - a_1 b_1}{b_0} \quad , \quad \text{etc.}$$

Il **Criterio di Routh** afferma che condizione necessaria e sufficiente perché le radici del polinomio $p(s)$ abbiano parte reale negativa è che gli $n+1$ elementi della prima colonna della Tabella di Routh siano diversi da zero e di segno concorde. Se due di questi elementi (ovviamente non nulli) hanno segni opposti, almeno una radice di $p(s)$ ha parte reale positiva.

Osservazione

Dato un sistema S con equazione di stato $\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t)$, il Criterio di Routh applicato al polinomio caratteristico della matrice (dinamica) A fornisce immediatamente, alla luce della Proposizione 2, un *criterio di asintotica stabilità* e una condizione sufficiente di instabilità del sistema S .

Condizione necessaria

Se le radici di $p(s)$ hanno parte reale negativa, allora gli $n+1$ coefficienti di $p(s)$ sono diversi da zero e di segno concorde. E' facile riconoscere che, nel caso $n \leq 2$, quest'ultima condizione è anche sufficiente.



Seguono alcuni esempi di applicazione del Criterio di Routh.

Esempio 1

$$p(s) = s^5 + 2 s^4 + 8 s^3 + 8 s^2 + 6 s + 2$$

Tabella di Routh:

| | | |
|--------|---|---|
| 1 | 8 | 6 |
| 2 | 8 | 2 |
| 4 | 5 | 0 |
| 5.5 | 2 | |
| 3.5455 | 0 | |
| 2 | | |

Poiché gli elementi della prima colonna sono positivi, le radici di $p(s)$ hanno parte reale negativa. E' infatti possibile verificare che:

$$p(s) = (s + 0.4363 - j 2.4260)(s + 0.4363 + j 2.4260)(s + 0.2999 - j 0.7306)(s + 0.2999 + j 0.7306)(s + 0.5277)$$

Esempio 2

$$p(s) = s^5 + 2 s^4 + 5 s^3 + 5 s^2 + 6 s + 2$$

Tabella di Routh:

| | | |
|-----|---|---|
| 1 | 5 | 6 |
| 2 | 5 | 2 |
| 2.5 | 5 | 0 |
| 1 | 2 | |
| 0 | | |

Poiché un elemento della prima colonna è nullo, non tutte le radici di $p(s)$ hanno parte reale negativa. E' infatti possibile verificare che:

$$p(s) = (s + 0.7849 - j 1.3071)(s + 0.7849 + j 1.3071)(s - j 1.4142)(s + j 1.4142)(s + 0.4302)$$

Esempio 3

$$p(s) = s^6 + 3 s^5 + 2 s^4 + 5 s^3 + s^2 + 4 s + 6$$

Tabella di Routh:

| | | | |
|----------|---------|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 6 |
| 3 | 5 | 4 | 0 |
| 0.3333 | -0.3333 | 6 | |
| 8 | -50 | 0 | |
| 1.7500 | 6 | | |
| -77.4286 | 0 | | |
| 6 | | | |

Poiché gli elementi della prima colonna non sono di segno concorde, non tutte le radici di $p(s)$ hanno parte reale negativa. E' infatti possibile verificare che:

$$p(s) = (s + 0.2972 - j 1.3679)(s + 0.2972 + j 1.3679)(s - 0.6809 - j 1.4142)(s - 0.6809 + j 1.4142)(s + 2.8924)(s + 0.8749)$$

Esempio 4

$$p(s) = s^4 + 5 s^3 + s^2 - 4 s + 6$$

Poiché i coefficienti del polinomio non sono di segno concorde, è violata la condizione necessaria; quindi, non tutte le radici di $p(s)$ hanno parte reale negativa. E' infatti possibile verificare che:

$$p(s) = (s + 4.5176)(s + 1.6674)(s - 0.5925 - j 0.6674)(s - 0.5925 + j 0.6674)$$

Esempio 5 $p(s) = -s^2 - 3 s - 2$

Poiché i coefficienti di $p(s)$ sono non nulli e di segno concorde, è soddisfatta la condizione necessaria e, poiché il grado del polinomio è uguale a due, tale condizione è anche sufficiente; quindi si può concludere che le radici di $p(s)$ hanno parte reale negativa.

Esempio 6

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3.5368 \times 10^{-5} \\ 0 & -0.0122 & 3.1831 \times 10^{-4} \\ 17.3180 & -17.3180 & -0.6148 \end{bmatrix}$$

$$\chi(s) := \det(s I - A) = s^3 + 0.6270 s^2 + 0.0136 s + 0.7468 \times 10^{-5}$$

Tabella di Routh:

| | |
|-------------------------|-------------------------|
| 1 | 0.0136 |
| 0.6270 | 0.7468×10^{-5} |
| 0.0136 | 0 |
| 0.7468×10^{-5} | |

Poiché gli elementi della prima colonna sono positivi, le radici di $\chi(s)$ (gli autovalori di A) hanno parte reale negativa. E' infatti facile verificare che:

$$\chi(s) = (s + 0.6045) (s + 0.0219) (s + 0.5628 \times 10^{-3}) ;$$

cioè che -0.6045 , -0.0219 e -0.5628×10^{-3} sono gli autovalori di A .

Esempio 7

$$\chi(s) = s^5 + 0.5384 s^4 + 0.0021 s^3 + 0.810 s + 0.6874$$

Poiché il coefficiente di s^2 è nullo, è violata la condizione necessaria; quindi non tutte le radici di $\chi(s)$ hanno parte reale negativa. Infatti, $\chi(s)$ si annulla in $0.7162 \pm j 0.6861$. Se $\chi(s)$ è il polinomio caratteristico della matrice dinamica di un sistema S lineare e tempo-invariante, S non è asintoticamente stabile.

Coefficienti incerti: il criterio di Kharitonov

Si consideri ancora un polinomio di grado n del tipo:

$$p(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n \quad ,$$

e si supponga che sia noto non il valore esatto di tutti i coefficienti a_i , ma solo l'intervallo dei *valori ammissibili* di a_i ; gli estremi, cioè, di un intervallo chiuso entro il quale il valore di a_i certamente ricade:

$$a_i^- \leq a_i \leq a_i^+ .$$

Qualora, per qualche i , il valore di a_i fosse noto, si avrebbe: $a_i^- = a_i^+$. In queste condizioni, risulta di ovvio interesse sapere sotto quali condizioni le radici di $p(s)$ hanno *parte reale negativa qualunque sia il valore ammissibile dei coefficienti* incerti. Un'elegante soluzione del problema, data nel 1978 da un

giovane (allora) matematico russo, ha destato in tutto il mondo un grande interesse fra i ricercatori interessati allo studio della stabilità di sistemi dinamici lineari e tempo-invarianti affetti da parametri incerti. Il risultato è il seguente.

Criterio di Kharitonov

Le radici di $p(s)$ hanno parte reale negativa qualunque sia il valore ammissibile dei coefficienti se e solo se la parte reale delle radici di:

$$\begin{aligned} p_1(s) &= a_0^+ s^n + a_1^+ s^{n-1} + a_2^- s^{n-2} + a_3^- s^{n-3} + a_4^+ s^{n-4} + \dots \\ p_2(s) &= a_0^- s^n + a_1^- s^{n-1} + a_2^+ s^{n-2} + a_3^+ s^{n-3} + a_4^- s^{n-4} + \dots \\ p_3(s) &= a_0^+ s^n + a_1^- s^{n-1} + a_2^- s^{n-2} + a_3^+ s^{n-3} + a_4^+ s^{n-4} + \dots \\ p_4(s) &= a_0^- s^n + a_1^+ s^{n-1} + a_2^+ s^{n-2} + a_3^- s^{n-3} + a_4^- s^{n-4} + \dots \end{aligned}$$

è negativa.



In automatica, il caso più frequente, e quindi più interessante, è però più strutturato di quello considerato da Kharitonov. I coefficienti a_i non sono semplicemente vincolati ad assumere un valore qualsiasi all'interno di un determinato intervallo, indipendentemente uno dall'altro; essi sono, più in generale, funzioni note di un vettore q di parametri incerti, per il quale può ritenersi noto l'insieme Q dei valori ammissibili. Se il sistema S è (asintoticamente) stabile qualunque sia il valore di q in Q , si dice che la sua (asintotica) stabilità è *robusta* relativamente a Q . Una breve riflessione consente di riconoscere che, se a_i^- e a_i^+ sono, rispettivamente, il minimo e il massimo di $a_i(q)$ su Q , allora tutti i valori dei coefficienti a_i corrispondenti a valori ammissibili del parametro (vettoriale) q sono palesemente compresi negli intervalli $[a_i^-, a_i^+]$, ma è importante notare che non tutte le possibili combinazioni di valori dei coefficienti a_i compresi negli intervalli suddetti devono necessariamente corrispondere a valori ammissibili di q .

In questo caso, il Criterio di Kharitonov fornisce dunque una condizione sufficiente, ma tutt'altro che necessaria per la stabilità asintotica robusta di S relativamente a Q ; una condizione, cioè, solo sufficiente affinché le radici del polinomio

$$p(s, q) = a_0(q) s^n + a_1(q) s^{n-1} + a_2(q) s^{n-2} + \dots + a_{n-1}(q) s + a_n(q)$$

abbiano parte reale negativa per tutti i valori ammissibili di q .

Il criterio di Routh consente di ricavare *insiemi di disequazioni* che implicitamente specificano la regione \mathcal{R} , nello spazio dei parametri, costituita da tutti i punti q tali che le radici di $p(s, q)$ abbiano parte reale negativa, ma è tutt'altro che semplice (se si escludono casi elementari, connotati da non più di due o tre parametri) stabilire definitivamente se $Q \subseteq \mathcal{R}$ oppure no.

Esempio 8

Sia:

$$A(q) := \begin{bmatrix} -(1+q_1) & 1+q_1 & 2(1+4q_1+3q_2-q_1^2) \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

la matrice dinamica di un sistema S lineare e tempo-invariante e sia:

$$q := \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}, \quad q \in Q := \{q : 46 \leq q_1 \leq 50, 800 \leq q_2 \leq 1000\}$$

il vettore dei parametri e, rispettivamente, l'insieme dei suoi possibili valori. Si vuol sapere se S è asintoticamente stabile per tutti i valori di q in Q ; in altre parole, se la stabilità asintotica di S è *robusta* relativamente a Q .

Il polinomio caratteristico di $A(q)$ è dato da:

$$\begin{aligned} \chi(s, q) &:= \det(sI - A(q)) = s^3 + (1+q_1)s^2 + q_1s + 6(q_1+q_2) - 2q_1^2 := \\ &:= s^3 + a_1(q)s^2 + a_2(q)s + a_3(q) \end{aligned}$$

quindi, la Tabella di Routh ha la forma seguente:

$$\begin{array}{cc} 1 & q_1 \\ (1+q_1) & 6(q_1+q_2) - 2q_1^2 \\ \beta(q) & 0 \\ 6(q_1+q_2) - 2q_1^2 & \end{array}$$

dove:

$$\beta(q) := \frac{q_1(1+q_1) - 6(q_1+q_2) + 2q_1^2}{1+q_1} = \frac{3q_1^2 - 5q_1 - 6q_2}{1+q_1}.$$

Dunque S è asintoticamente stabile se e solo se:

$$(1 + q_1) > 0$$

$$\beta(q) > 0$$

$$6(q_1 + q_2) - 2q_1^2 > 0 \quad ;$$

cioè, se e solo se :

$$q_1 > -1$$

$$3q_1^2 - 5q_1 - 6q_2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad q_2 < 0.5q_1^2 - 5/6q_1 := h_b(q_1)$$

$$6(q_1 + q_2) - 2q_1^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad q_2 > 1/3q_1^2 - q_1 := h_a(q_1)$$

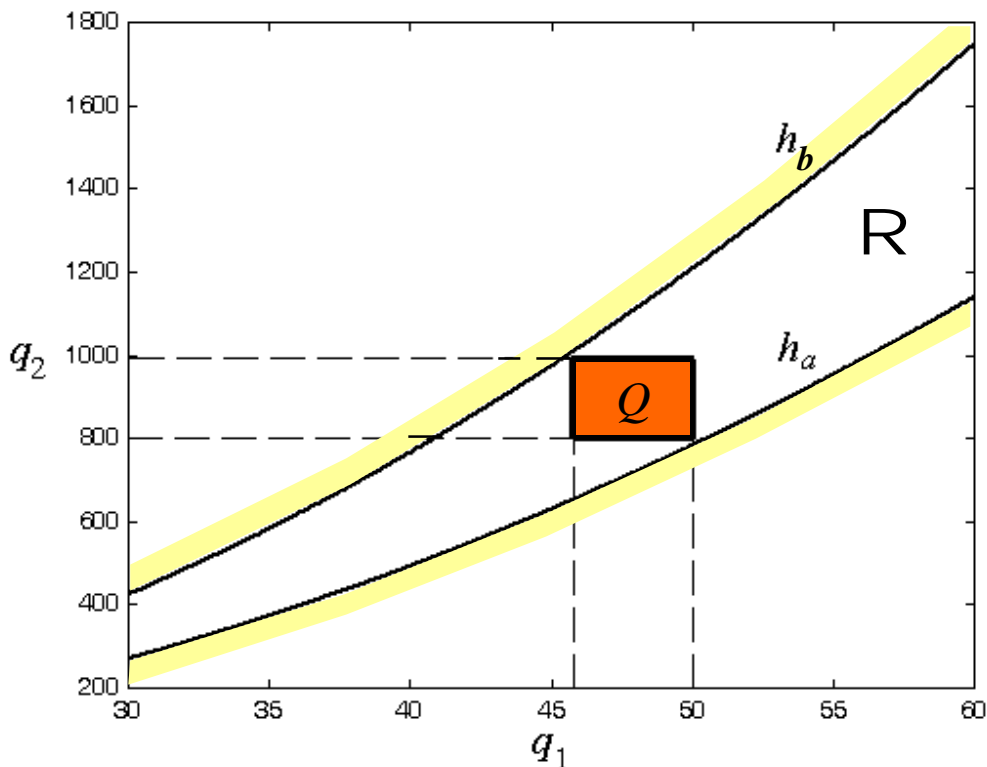


Fig. 3.1 : Regione di asintotica stabilità $R = \{q : q_1 > -1, q_2 > h_a(q_1), q_2 < h_b(q_1)\}$

In questo caso, la regione R di asintotica stabilità è facilmente visualizzabile (Fig.3.1); pertanto, è anche facile concludere che S è asintoticamente stabile in modo robusto relativamente a Q . Tuttavia si comprende che, con un numero maggiore di parametri, tanto la visualizzazione di R quanto la verifica della condizione $Q \subseteq R$ possono rapidamente divenire problemi computazionalmente impervi.

Un modo alternativo di affrontare il problema, sia pure senza alcuna garanzia di pervenire in ogni caso ad una soluzione, è offerto dal teorema di Kharitonov.

Ricordando che:

$$a_1(q) := 1 + q_1 \quad , \quad a_2(q) := q_1 \quad , \quad a_3(q) := 6(q_1 + q_2) - 2q_1^2$$

avremmo potuto procedere nel modo seguente. Poniamo: $a_0^- = a_0^+ = 1$, e inoltre

$$a_i^- := \min_{q \in Q} a_i(q) \quad , \quad a_i^+ := \max_{q \in Q} a_i(q) \quad , \quad i = 1, 2, 3 ;$$

cioè:

$$a_1^- = 47 \quad , \quad a_1^+ = 51 \quad , \quad a_2^- = 46 \quad , \quad a_2^+ = 50 \quad , \quad a_3^- = 100 \quad , \quad a_3^+ = 2044 .$$

Quindi,

$$p_1(s) = s^3 + 51s^2 + 46s + 100$$

$$p_2(s) = s^3 + 47s^2 + 50s + 2044$$

$$p_3(s) = s^3 + 47s^2 + 46s + 2044$$

$$p_4(s) = s^3 + 51s^2 + 50s + 100$$

e applicando 4 volte il Criterio di Routh si verifica facilmente che le radici dei polinomi di Kharitonov: $p_1(s)$, $p_2(s)$, $p_3(s)$ e $p_4(s)$, hanno parte reale negativa. Pertanto, le radici di

$$p(s) = s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3$$

hanno parte reale negativa per ogni $a_i \in [a_i^-, a_i^+]$, $i=1, 2, 3$. Poiché $q \in Q$ implica $a_i \in [a_i^-, a_i^+]$, $i=1, 2, 3$, possiamo concludere, anche per questa via, che S è asintoticamente stabile in modo robusto relativamente a Q . Si noti, però, che $a_i \in [a_i^-, a_i^+]$, $i=1, 2, 3$, non implica $q \in Q$; ad esempio, se $q = [46 \quad 700]'$, si ha $q \notin Q$ e tuttavia:

$$a_1 = 47 \in [a_1^-, a_1^+] \quad , \quad a_2 = 46 \in [a_2^-, a_2^+] \quad , \quad a_3 = 244 \in [a_3^-, a_3^+] .$$

Quindi, se la parte reale di una radice di uno dei polinomi di Kharitonov fosse risultata non negativa, allora, per almeno un valore ammissibile di a_i , $i=1, 2, 3$, il sistema S non sarebbe stato asintoticamente stabile; ma nessuna conclusione si sarebbe potuto trarre circa la robustezza della stabilità asintotica di S relativamente a Q .

4. Stabilità dell'equilibrio in un sistema non lineare

Il comportamento di un sistema dinamico S non lineare in prossimità di un punto di equilibrio è descritto con buona accuratezza dal modello lineare δS tangente a S nel punto di equilibrio considerato. E' allora naturale aspettarsi che la stabilità del punto di equilibrio in S sia, almeno in parte, legata alla stabilità di δS . Tale legame è alla base del cosiddetto *metodo indiretto* di Liapunov (per l'analisi della stabilità) che, per i sistemi introdotti nel primo capitolo, può essere espresso nel modo seguente.

Proposizione 3

Sia \bar{x} uno stato di equilibrio di un sistema dinamico S e sia A la matrice dinamica del sistema lineare δS tangente a S nel punto di equilibrio considerato.

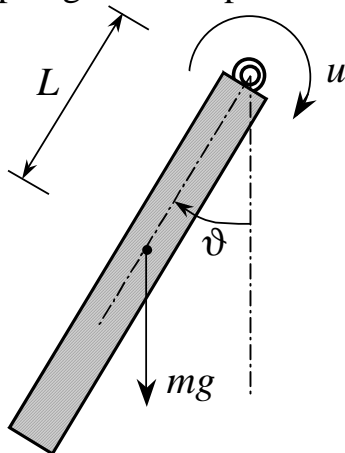
- Se gli autovalori di A hanno parte reale negativa, allora \bar{x} è uno stato di equilibrio asintoticamente stabile di S .
- Se almeno un autovalore di A ha parte reale positiva, allora \bar{x} è uno stato di equilibrio instabile di S .

□

Negli altri casi, \bar{x} può essere uno stato di equilibrio asintoticamente stabile, oppure semplicemente stabile, oppure anche instabile di S . In particolare, va sottolineato che la stabilità asintotica dello stato di equilibrio \bar{x} non implica la stabilità asintotica e neppure la semplice stabilità di δS ; per contro, la stabilità o l'instabilità di δS non implicano la stabilità o, rispettivamente, l'instabilità di \bar{x} così come la stabilità o l'instabilità di \bar{x} non implicano necessariamente la stabilità o, rispettivamente, l'instabilità di δS .

Esempio 9

Torniamo ad esaminare il pendolo semplice di Fig.4.1, già considerato nel sesto paragrafo del primo capitolo. Il modello in forma normale già adottato per questo sistema era costituito dalle seguenti equazioni:



$$S : \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) & \text{equazione di stato} \\ y(t) = g(x(t)) & \text{equazione d'uscita} \end{cases}$$

dove:

$$x_1 := \vartheta, \quad x_2 := \dot{\vartheta}$$

$$f_1(x, u) := x_2, \quad f_2(x, u) := -\frac{A}{J} x_2 - \frac{m g L}{J} \sin(x_1) + \frac{1}{J} u$$

$$f(x, u) := [f_1(x, u) \quad f_2(x, u)]', \quad g(x) := x_1$$

Fig. 4.1 : Pendolo.

Per ogni valore costante \bar{u} della coppia al perno, che in valore assoluto non superi $m g L$, gli stati di equilibrio di S sono dati da:

$$\bar{x}_1 = \bar{y} := \arcsin(\bar{u}/(m g L))$$

$$\bar{x}_2 = 0 .$$

Ad esempio, per $\bar{u} = 2 m g L / 3$, nell'intervallo $(-\pi, \pi]$ si ha:

$$\bar{x}_{1a} = 0.7297 \text{ (} 41^\circ 48' 37'' \text{)} , \quad \bar{x}_{1b} = 2.4119 \text{ (} 138^\circ 11' 23'' \text{)} ; \quad \bar{x}_{2a} = \bar{x}_{2b} = 0 .$$

Il polinomio caratteristico della matrice dinamica di δS (Cap.1, Par.7) è dato da:

$$\chi(s) = s^2 + \frac{A}{J} s + \frac{m g L}{J} \cos(\bar{x}_1)$$

quindi

$$\chi_a(s) = s^2 + \frac{A}{J} s + 0.7454 \frac{m g L}{J} , \quad \chi_b(s) = s^2 + \frac{A}{J} s - 0.7454 \frac{m g L}{J} .$$

Pertanto, poiché i parametri A , J , m , g e L sono ovviamente positivi, si può concludere che \bar{x}_a è uno stato di equilibrio asintoticamente stabile del sistema non lineare S , mentre \bar{x}_b è uno stato di equilibrio instabile.

5. Risposte particolari di notevole interesse

In questo paragrafo esamineremo brevemente risposte notevoli di un sistema dinamico S lineare e tempo invariante, che supponiamo noto in forma normale:

$$S : \begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) & \text{equazione di stato} \\ y(t) = C x(t) + D u(t) & \text{equazione d'uscita .} \end{cases}$$

In particolare, introdurremo le principali *risposte canoniche*, vale a dire le risposte di S a particolari andamenti, detti canonici, dei segnali d'ingresso. Facendo prevalentemente riferimento al caso di sistemi asintoticamente stabili, esamineremo quindi due tipi particolari di *risposte a regime*; concentreremo infatti l'attenzione sulle risposte *costanti* a ingressi costanti (condizioni di equilibrio) e su quelle *periodiche* a ingressi periodici.

5.1 Risposte canoniche

Ricordiamo innanzitutto quali sono i principali *segnali canonici*, atti a rappresentare, in modo schematico ma significativo, particolari eventi plausibilmente presenti all'ingresso di sistemi dinamici.

5.1.1 Impulso o funzione δ di Dirac

L'impulso (ideale), o funzione δ di Dirac, a rigore non è una funzione ma può essere pensato come il limite, per ϵ tendente a zero, della funzione costante a tratti $ir(t; \epsilon)$ mostrata in Fig.5.1 ed indicata a volte come "impulso reale (unitario) di durata ϵ ".

$$imp(t) := \delta(t) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} ir(t; \epsilon).$$

Un'importante e (relativamente) intuitiva proprietà dell'impulso può essere formulata nel modo seguente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(t) imp(t-t_0) dt = v(t_0),$$

qualunque sia la funzione reale di variabile reale $v(\cdot)$, continua in t_0 .

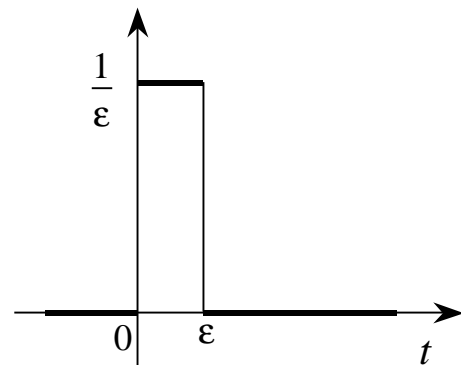


Fig. 5.1 : Impulso reale di durata ϵ .

5.1.2 Scalino

La funzione scalino è definita come segue:

$$sca(t) := \begin{cases} 1 & , \quad t > 0 \\ 0 & , \quad t \leq 0 \end{cases}$$

Si noti che se poniamo (Fig.5.2):

$$w(t; \epsilon) := \int_0^t ir(\tau; \epsilon) d\tau$$

allora $sca(t)$ è il limite, per ϵ che tende a zero, di $w(t, \epsilon)$.

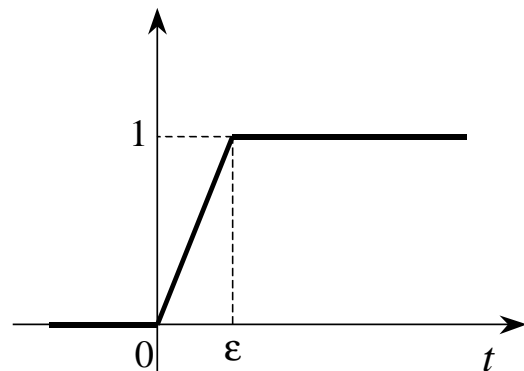


Fig. 6.2 : La funzione $w(\cdot, \epsilon)$.

5.1.3 Rampa

La rampa può essere definita come integrale dello scalino. Precisamente:

$$ram(t) := \int_0^t sca(\tau) d\tau = \begin{cases} t & , t > 0 \\ 0 & , t \leq 0 \end{cases}$$

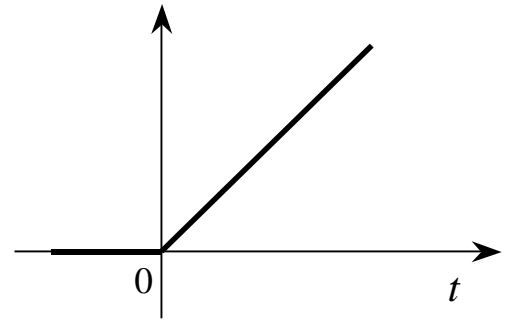


Fig. 5.3 : La funzione rampa.

La funzione $ram(\cdot)$ è mostrata in Fig.5.3.

5.1.4 Parabola

In maniera del tutto analoga, la parabola può essere definita come integrale della rampa. Precisamente:

$$par(t) := \int_0^t ram(\tau) d\tau = \begin{cases} t^2/2 & , t > 0 \\ 0 & , t \leq 0 \end{cases}$$

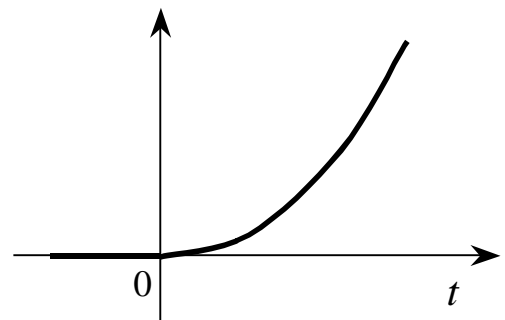


Fig. 5.4 : La funzione parabola.

La funzione $par(\cdot)$ è mostrata in Fig.5.4.

I segnali canonici hanno, per definizione, “ampiezza” unitaria; naturalmente, i segnali $A imp(\cdot)$, $A sca(\cdot)$, $A ram(\cdot)$ e $A par(\cdot)$ sono un impulso, uno scalino, una rampa e una parabola di ampiezza A . Ad esempio, un segnale pari a $10 t^2$ per $t > 0$ e nullo altrove è una parabola di ampiezza 20. Essi sono rappresentativi di un segnale rispettivamente soggetto, in un determinato istante, preso come origine dell’asse dei tempi, a una forte e sporadica perturbazione istantanea oppure a una brusca variazione del valore corrente, o di quello della derivata prima, o della derivata seconda.

Le risposte canoniche del sistema S , e precisamente: la *risposta all’impulso* (o impulsiva), *a scalino*, *a rampa* e *a parabola* di S , sono gli andamenti dell’uscita di S quando l’ingresso è, rispettivamente, un impulso, uno scalino, una rampa o una parabola (di solito di ampiezza unitaria), e lo stato iniziale è nullo.

Ad esempio, se u e y sono scalari, la risposta a scalino (unitario) di S è data (per ogni $t > 0$) da:

$$\sigma(t) = C \int_0^t e^{A(t-\tau)} d\tau B + D \quad .$$

In base alla definizione di $e^{A t}$, è facile riconoscere che

$$\frac{d}{d\tau} e^{A(t-\tau)} = -e^{A(t-\tau)} A = -A e^{A(t-\tau)} .$$

Allora, se A è non singolare, si ha:

$$\int_0^t e^{A(t-\tau)} d\tau = \left[-A^{-1} e^{A(t-\tau)} \right]_0^t = A^{-1} (e^{A t} - I) ,$$

quindi, in quel caso,

$$\sigma(t) = C A^{-1} (e^{A t} - I) B + D ,$$

per ogni $t > 0$.

5.2 Risposta costante (di equilibrio) a un ingresso costante

Sappiamo che gli stati di equilibrio di S corrispondenti a un ingresso costante e uguale a \bar{u} sono le soluzioni costanti dell'equazione di stato; cioè, le soluzioni dell'equazione

$$A x + B \bar{u} = 0$$

nell'incognita x . Se A è non singolare, la soluzione esiste, è unica ed è data da:

$$\bar{x} = -A^{-1} B \bar{u} .$$

Di conseguenza, è unica, in questo caso, la risposta costante:

$$\bar{y} = -C A^{-1} B \bar{u} + D \bar{u} .$$

Possiamo tornare un attimo all'espressione della risposta a scalino $\sigma(t)$ di S per osservare che, se S è un sistema asintoticamente stabile, gli autovalori di A hanno parte reale negativa e quindi A è non singolare; pertanto,

$$\sigma(t) = C A^{-1} (e^{A t} - I) B + D ,$$

per ogni $t > 0$, $\sigma(0^+) = D$, e il limite di $\sigma(t)$ per t che tende all'infinito è uguale a \bar{y} , dal momento che, al tendere di t all'infinito, ogni elemento di $e^{A t}$ tende a zero.

Poiché ogni movimento di un sistema asintoticamente stabile è non solo asintoticamente ma globalmente stabile, il movimento (dello stato) di S forzato da un ingresso costante uguale a \bar{u} a partire da uno stato iniziale x_0 deve tendere a $\bar{x} = -A^{-1} B \bar{u}$ qualunque sia x_0 , se S è asintoticamente stabile. Infatti:

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} d\tau B \bar{u}$$

ma sappiamo anche che, se \bar{x} è uno stato di equilibrio di S e $x_0 = \bar{x}$, allora $x(t) = \bar{x}$ per ogni $t \geq 0$, cioè:

$$\bar{x} = e^{At} \bar{x} + \int_0^t e^{A(t-\tau)} d\tau B \bar{u}$$

quindi (come c'era da aspettarsi),

$$\delta x(t) := x(t) - \bar{x} = e^{At} (x_0 - \bar{x}) = e^{At} \delta x(0)$$

e pertanto,

$$x(t) = \bar{x} + e^{At} (x_0 - \bar{x}) .$$

Se S è asintoticamente stabile, ogni elemento di e^{At} tende a zero al tendere di t all'infinito; quindi, qualunque sia lo stato iniziale x_0 , il movimento $x(\cdot)$ forzato dall'ingresso costante $u(t) = \bar{u}$ tende, per t che tende all'infinito, all'unico stato di equilibrio $\bar{x} = -A^{-1} B \bar{u}$. Ogni movimento di un sistema S asintoticamente stabile prodotto da un ingresso costante \bar{u} a partire da $x_0 \neq \bar{x}$ differisce dallo stato di equilibrio \bar{x} corrispondente a \bar{u} di un termine *transitorio* dato da $e^{At} (x_0 - \bar{x})$. Il transitorio ha durata teoricamente infinita, ma in pratica può ritenersi *esaurito* dopo un intervallo di tempo limitato di durata approssimativamente stimabile, come vedremo, in 5÷8 volte l'inverso della distanza dall'asse immaginario dell'autovalore di A ad esso più vicino.

Considerazioni del tutto analoghe valgono ovviamente per la risposta $y(\cdot)$ di un sistema asintoticamente stabile ad un ingresso costante. Infatti,

$$y(t) = C x(t) + D \bar{u} = \bar{y} + C e^{At} (x_0 - \bar{x}) ;$$

la risposta tende cioè, asintoticamente, all'uscita di equilibrio (che esiste ed è unica).

Se S non è asintoticamente stabile, possono esistere una, nessuna o infinite condizioni di equilibrio corrispondenti ad un ingresso costante \bar{u} . Ma se x_0 non è uno stato di equilibrio, non vi è alcuna garanzia che la risposta forzata da \bar{u} tenda, dopo un transitorio iniziale, ad un'uscita di equilibrio o che rimanga limitata.

Esempio 10

A titolo illustrativo, riprendiamo l'Esempio 5 del primo capitolo. Consideriamo, cioè, il circuito elettrico di Fig.5.5, il cui comportamento può essere descritto, come sappiamo, da un sistema dinamico lineare tempo-invariante

$$S : \begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \\ y(t) = C x(t) \end{cases}$$

dove: $u := v_1$, $y := x_1 := v_2$, $x_2 := i_2$, e inoltre

$$A := \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_0 R_0} & -\frac{1}{C_0} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} \frac{1}{C_0 R_0} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C := [1 \quad 0].$$

Per quanto riguarda il valore numerico dei parametri, consideriamo tre casi:

- a) $R_0 = 100 [\Omega]$, $R = 2 [\Omega]$, $C_0 = 2.7 [\mu F]$, $L = 0.5 [mH]$;
- b) $R_0 = 300 [\Omega]$, $R = 0.7 [\Omega]$, $C_0 = 2.7 [\mu F]$, $L = 0.5 [mH]$;
- c) $R_0 = 100 [\Omega]$, $R = 6 [\Omega]$, $C_0 = 2.7 [\mu F]$, $L = 1.5 [mH]$.

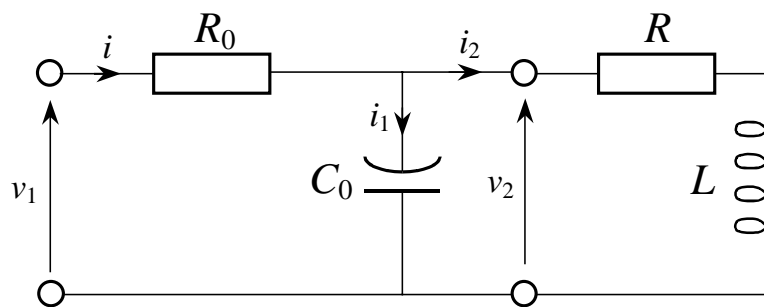


Fig. 5.5 : Un circuito elettrico.

Il polinomio caratteristico di A è dato da:

$$\chi(s) = s^2 + \alpha s + \beta$$

dove:

$$\alpha := \frac{R}{L} + \frac{1}{R_0 C_0} = \frac{R R_0 C_0 + L}{R_0 L C_0} \quad , \quad \beta = \frac{1}{L C_0} + \frac{R}{R_0 L C_0} = \frac{R_0 + R}{R_0 L C_0} .$$

In tutti e tre i casi, le radici di $\chi(s)$ sono complesse coniugate. Seguendo allora una conveniente consuetudine, mettiamo in evidenza la *pulsazione naturale* ω_n e il *fattore di smorzamento* ζ della coppia di radici in questione, scrivendo:

$$\chi(s) := s^2 + 2 \zeta \omega_n s + \omega_n^2 .$$

Ovviamente,

$$\omega_n = \sqrt{\beta} \quad , \quad \zeta = \frac{\alpha}{2 \omega_n} = \frac{\alpha}{2 \sqrt{\beta}} .$$

Come mostrato in Fig.5.6, ω_n è il modulo e $-\zeta \omega_n$ la parte reale delle due radici, mentre la parte immaginaria è data da: $\pm j \omega_r$, dove:

$$\omega_r := \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

Le risposte a scalino ($\bar{u} = 1, x_0 = 0$) del sistema di Fig.5.5, nei tre casi (a), (b) e (c) precedentemente specificati, sono mostrate in Fig.5.7.

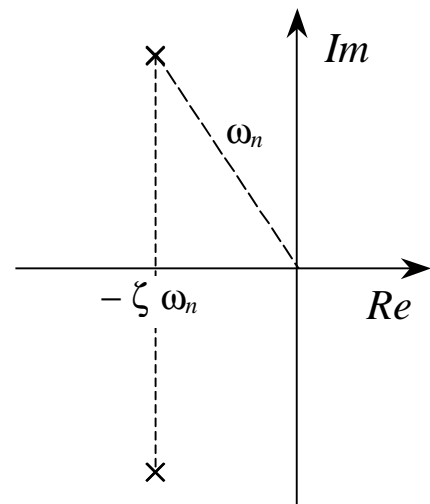
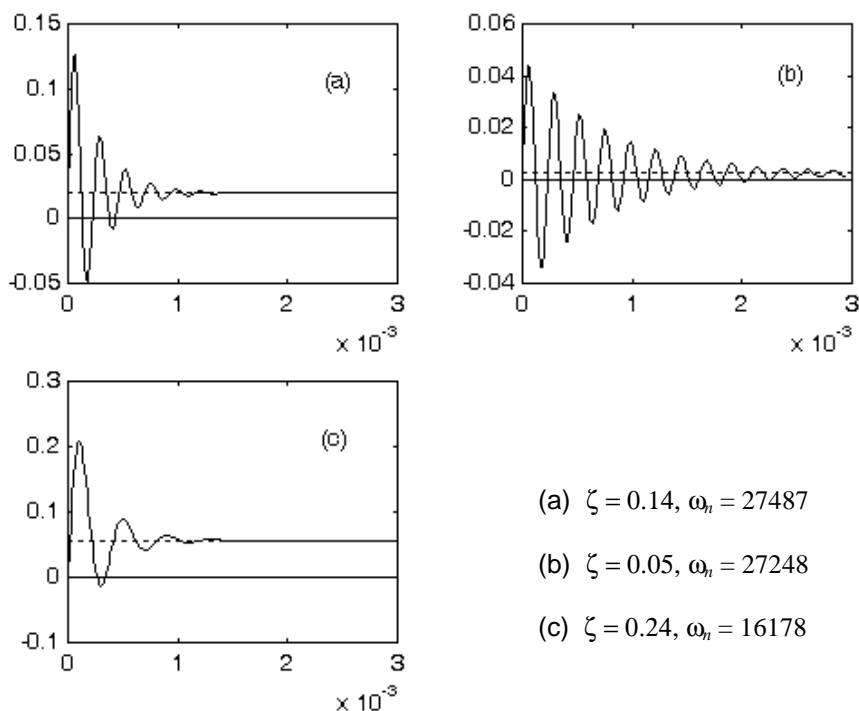


Fig. 5.6 : Radici complesse



- (a) $\zeta = 0.14, \omega_n = 27487$
- (b) $\zeta = 0.05, \omega_n = 27248$
- (c) $\zeta = 0.24, \omega_n = 16178$

Fig. 5.7 : Risposte a scalino

In ogni caso, poiché α e β sono positivi, il sistema è asintoticamente stabile. La durata t_a del transitorio (tempo di assestamento stimato) è pari a circa 5÷8 volte l'inverso della distanza degli autovalori di A dall'asse immaginario:

$$t_a \cong \frac{5}{\zeta \omega_n} = \begin{cases} 1.3 \times 10^{-3} & , \text{ nel caso (a)} \\ 3.8 \times 10^{-3} & , \text{ nel caso (b)} \\ 1.3 \times 10^{-3} & , \text{ nel caso (c)} \end{cases} .$$

Il periodo T delle oscillazioni (smorzate) che si manifestano durante il transitorio è dato da:

$$T = \frac{2 \pi}{\omega_r} \quad , \quad \omega_r := \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad ,$$

dove $\pm j \omega_r$ è la parte immaginaria degli autovalori di A (Fig.6.6); quindi, il numero di oscillazioni “visibili” durante il transitorio è stimabile in:

$$n_o \cong \frac{t_a}{T} = \frac{5 \sqrt{1 - \zeta^2}}{2 \pi \zeta} \approx \frac{0.75}{\zeta} \quad , \quad (0 \leq \zeta < 0.7) \quad ,$$

ovviamente arrotondato all'intero più vicino. Qualora fosse $\zeta < 0$, il sistema sarebbe instabile e quindi $n_o = \infty$; mentre, per $\zeta > 0.7$, non ci sarebbero oscillazioni “visibili” ($n_o = 0$). Infine, per quanto riguarda i valori “a transitorio esaurito” delle risposte mostrate in Fig.5.7, abbiamo ($\bar{u} = 1, D = 0$):

$$\bar{y} = -C A^{-1} B \bar{u} + D \bar{u} = -C A^{-1} B = \begin{cases} 0.0196 & , \text{ nel caso (a)} \\ 0.0023 & , \text{ nel caso (b)} \\ 0.0566 & , \text{ nel caso (c)} \end{cases} .$$

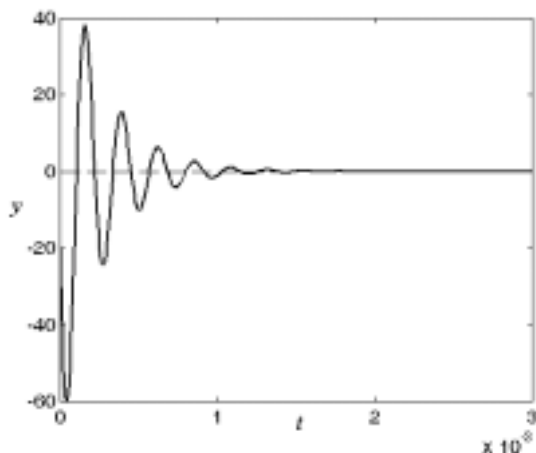


Fig. 5.8 : Risposta nel caso (a) con $x(0) \neq 0$.

Per sottolineare come la durata del transitorio dipenda essenzialmente da $\zeta \omega_n$, cioè dalla distanza dall'asse immaginario degli autovalori di A , consideriamo, nel caso (a), la risposta libera ($\bar{u} = 0$) a partire da:

$$x(0) = [-20 \quad 5]' .$$

Il risultato (Fig.5.8) è quello atteso: nonostante la diversa intensità e natura della perturbazione, la durata approssimativa del transitorio è invariata.

6.3 Risposta periodica a un ingresso periodico

Sia $u_p(\cdot)$ un segnale periodico di periodo fondamentale (o minimo) T ; T sarà quindi il più piccolo valore positivo di τ tale che $u_p(t + \tau) = u_p(t)$, per ogni t . La pulsazione fondamentale di u_p sarà $\Omega := 2\pi/T$.

Ci chiediamo innanzitutto se, sotto l'azione di $u_p(\cdot)$, esista un regime periodico di periodo fondamentale T . Ci domandiamo, cioè, se con $u(t) = u_p(t)$ esistono soluzioni periodiche dell'equazione di stato e corrispondenti risposte periodiche di periodo T del sistema S . La questione è di notevolissima importanza tecnica: si pensi, ad esempio, alle reti elettriche di potenza funzionanti in regime sinusoidale o al problema delle vibrazioni indotte nelle macchine da sollecitazioni periodiche.

Fissato l'ingresso periodico $u_p(\cdot)$, si chiama *generatore periodico* di S (corrispondente a u_p) qualunque punto dello spazio di stato che, preso come stato iniziale, fa sì che risulti: $x(T) = x(0)$. Una breve riflessione consente di riconoscere come il movimento che scaturisce da un generatore periodico, sotto l'azione dell'ingresso $u_p(\cdot)$, sia effettivamente un movimento periodico di S ; vale a dire: una soluzione periodica dell'equazione di stato. Infatti, in ogni intervallo di durata T successivo o precedente quello che ha l'origine dell'asse dei tempi come istante iniziale sia l'andamento dell'ingresso che lo stato iniziale (e quindi l'intero movimento) si ripeteranno invariati.

La ricerca delle soluzioni periodiche dell'equazione di stato quando $u(t) = u_p(t)$ equivale allora alla ricerca dei generatori periodici di S (corrispondenti a u_p). Tale ricerca è, di solito, decisamente ardua nel caso di equazioni di stato non lineari; ma, nel caso lineare, la disponibilità della soluzione generale in forma esplicita (formula di Lagrange) rende più agevole la soluzione del problema. Infatti, poiché

$$x(T) = e^{AT} x(0) + \int_0^T e^{A(T-\tau)} B u_p(\tau) d\tau ,$$

l'equazione (nell'incognita x) che dev'essere soddisfatta da ogni generatore periodico è la seguente:

$$x = e^{AT} x + \int_0^T e^{A(T-\tau)} B u_p(\tau) d\tau$$

ovvero :

$$(I - e^{AT})x = b \quad , \quad b := \int_0^T e^{A(T-\tau)} B u_p(\tau) d\tau .$$

Come per la ricerca degli stati di equilibrio corrispondenti a un ingresso costante, si tratta di risolvere un sistema di equazioni lineari algebriche. La soluzione esiste ed è unica se e solo se la matrice $I - e^{AT}$ è non singolare; altrimenti, o non c'è soluzione o ce ne sono infinite. Se $I - e^{AT}$ è non singolare, il generatore periodico è dato da:

$$x_g = (I - e^{AT})^{-1} b = (I - e^{AT})^{-1} \int_0^T e^{A(T-\tau)} B u_p(\tau) d\tau .$$

La matrice $I - e^{AT}$ è non singolare se e solo se e^{AT} non ha autovalori uguali a 1 e questo accade se e solo se A non ha autovalori del tipo $jk\Omega$, dove Ω è la pulsazione fondamentale di u_p e k un intero qualsiasi (la dimostrazione è omessa, ma si noti che $e^{jk\Omega T} = e^{jk2\pi} = 1$).

Si noti che, se S è asintoticamente stabile, A non può avere autovalori immaginari e quindi $I - e^{AT}$ è sicuramente non singolare. In questo caso dunque, $x_g = (I - e^{AT})^{-1} b$ è l'unico generatore periodico di S corrispondente a u_p . Il movimento periodico di S forzato da u_p è unico ed è dato da:

$$x_p(t) = e^{At} x_g + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u_p(\tau) d\tau .$$

Se $x_0 \neq x_g$, il movimento di S forzato da u_p a partire da $x(0) = x_0$, vale a dire:

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u_p(\tau) d\tau ,$$

non è periodico, ma (ancora una volta)

$$\delta x(t) := x(t) - x_p(t) = e^{At} (x_0 - x_g) = e^{At} \delta x(0)$$

e quindi

$$x(t) = x_p(t) + e^{At} (x_0 - x_g) .$$

Se S è *asintoticamente stabile*, ogni elemento di e^{At} tende a zero al tendere di t all'infinito; quindi, qualunque sia lo stato iniziale x_0 , il movimento $x(\cdot)$ forzato dall'ingresso periodico $u_p(\cdot)$ tende, per t che tende all'infinito, all'unico movimento periodico $x_p(\cdot)$ di S prodotto da $u_p(\cdot)$.

In ogni movimento $x(\cdot)$ forzato dall'ingresso periodico $u_p(\cdot)$, a partire da uno stato iniziale $x_0 \neq x_g$, sono riconoscibili un termine di regime $x_p(\cdot)$ e un termine *transitorio* dato da $e^{At} (x_0 - x_g)$. Il transitorio ha durata teoricamente infinita, ma in pratica può ritenersi *esaurito* dopo un intervallo di tempo limitato di durata approssimativamente stimabile, come vedremo, in 5÷8 volte l'inverso della distanza dall'asse immaginario dell'autovalore di A ad esso più vicino.

Considerazioni del tutto analoghe valgono ovviamente per la *risposta periodica* $y_p(\cdot)$, di un sistema *asintoticamente stabile*, all'ingresso periodico $u_p(\cdot)$. Infatti,

$$y_p(t) = C x_p(t) + D u_p(t)$$

e, se $x_0 \neq x_g$,

$$y(t) = C x(t) + D u_p(t) = y_p(t) + C e^{At} (x_0 - x_g) ;$$

l'uscita, cioè, tende asintoticamente all'unica risposta periodica di S forzata dall'ingresso periodico u_p . Qualunque sia x_0 , $y(\cdot)$ tende a diventare periodica; dopo un transitorio di durata solo teoricamente infinita, $y(t) \cong y_p(t)$.

Esempio 11

Consideriamo di nuovo il semplice circuito elettrico di Fig.5.5 (Esempio 10) e, per quanto riguarda il valore dei parametri, supponiamo di essere nel caso denominato (a): $R_0 = 100 [\Omega]$, $R = 2 [\Omega]$, $C_0 = 2.7 [\mu F]$, $L = 0.5 [mH]$.

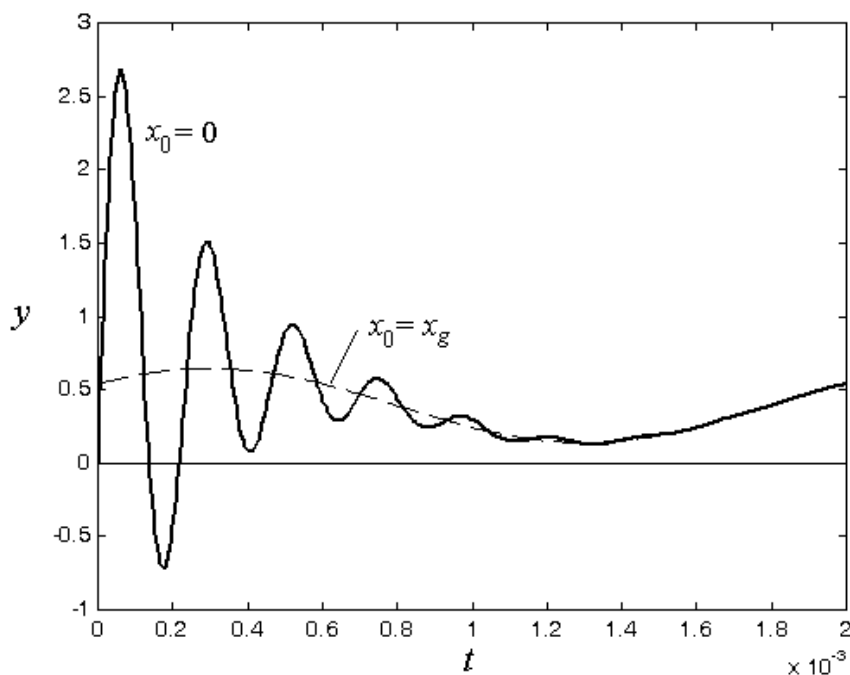


Fig. 5.9 : Risposta ($x_0=0$) e risposta periodica all'ingresso $u_p(t) = 20 + 10 \sin(3141.59 t)$.

Supponiamo inoltre che l'ingresso $u_p(\cdot)$ sia una senoide a 500 [Hz]:

$$u_p(t) = 20 + 10 \sin(2 \pi 500 t) .$$

La pulsazione fondamentale dell'ingresso u_p è $\Omega = 2 \pi 500 = 3141.59$ [rad/sec]; ad essa corrisponde un periodo di 2 [msec].

Il generatore periodico corrispondente a u_p è $x_g = [0.5416 \ 0.1929]'$. In Fig.5.9, sono mostrate la risposta periodica del sistema all'ingresso u_p (linea tratteggiata) e la risposta $y(\cdot)$ prodotta dall'ingresso u_p a partire dallo stato iniziale $x_0 = 0$ (linea continua). Com'era da attendersi, dopo un transitorio della durata di circa 1.3 [msec], $y(t)$ è praticamente coincidente con la risposta periodica.

6. Considerazioni conclusive

In questo capitolo s'è affrontata l'analisi nel dominio del tempo di sistemi dinamici lineari e tempo-invarianti; l'analisi, cioè, basata su una descrizione nella quale i segnali compaiono come funzioni del tempo.

Si sono innanzitutto riprese e approfondite le nozioni di movimento (dello stato) e di risposta (o movimento dell'uscita) di un sistema S , lineare e tempo-invariante, conseguenti all'applicazione di un segnale $u(\cdot)$, definito per $t \geq 0$, a partire dallo stato iniziale $x(0) = x_0$. La formula di Lagrange consente di dare, di tali movimenti, un'espressione in forma esplicita e di mettere adeguatamente in luce, nei suoi vari aspetti, il cosiddetto principio di sovrapposizione degli effetti.

Si è quindi cominciato ad affrontare il problema della stabilità introducendo, con riferimento ad un sistema non lineare (tempo-invariante, a dimensioni finite), le principali definizioni di Liapunov relative alla stabilità del movimento. Si è poi concentrata l'attenzione sui sistemi lineari, per i quali si è dimostrato come sia possibile trasferire le nozioni di stabilità dal singolo movimento all'intero sistema. Si sono quindi enunciati e commentati alcuni importanti criteri di stabilità asintotica, o di instabilità, e di stabilità asintotica robusta rispetto a un insieme ammissibile di parametri incerti.

L'analisi della stabilità del movimento nei sistemi non lineari esula dai limiti imposti ad una trattazione introduttiva. Tuttavia, notevoli informazioni circa la stabilità asintotica, o l'instabilità, di quei particolari movimenti che sono gli stati di equilibrio di un sistema non lineare si possono trarre dal modello lineare tangente al sistema in esame nella condizione di equilibrio considerata; più precisamente, dagli autovalori della sua matrice dinamica.

Infine, si sono introdotte e brevemente discusse varie risposte molto significative di un sistema S , lineare e tempo-invariante. Nel farlo, si è prestata

un'attenzione del tutto particolare al caso dei sistemi asintoticamente stabili. Le cosiddette risposte canoniche rappresentano gli andamenti dell'uscita di S , sotto l'azione degli ingressi "canonici", vale a dire dei segnali impulso, scalino, rampa e parabola di ampiezza unitaria, a partire da stato iniziale nullo. La risposta costante a un ingresso costante e la risposta periodica a un ingresso periodico sottendono invece l'esistenza di particolari regimi (costante o periodico).