Laboratorio di Fondamenti di Automatica
Quarta esercitazione

Analisi in frequenza e di stabilità con MATLAB

Premessa

- Scopo di quest'esercitazione di laboratorio:
  - imparare a usare MATLAB per analizzare le risposte di sistemi dinamici LTI a tempo continuo nel dominio della frequenza e per fare semplici analisi di stabilità di sistemi retroazionati.
- Contenuto dell'esercitazione:
  - sistemi interconnessi in MATLAB;
  - calcolo di risposte in frequenza;
  - correlazione con il dominio del tempo;
  - diagrammi di Bode e polari;
  - analisi di stabilità di sistemi retroazionati (nelle ipotesi di Bode e non);
  - conclusioni.

- Esempi (serie, parallelo, retroazione):

```
» S1=ss(-2,1,1,0);
» S2=tf(1,conv([10 1],[1 1]));
» S3=tf(0.1,[5 1]);
» S4=tf(S1+S2*S3/(1+S2*S3))
Transfer function:
   s^6+2.6 s^5+2.332s^4+0.8806s^3+0.1628s^2+0.01476s+0.00052
-------------------------------------------------------------
s^7+4.6s^6+7.53s^5+5.534s^4+1.905s^3+0.3274s^2+0.02732s+0.00088
```

Provate esempi simili (5 min) e accertatevi di aver capito.

Risposta in frequenza

- Proviamo a calcolare una risposta in frequenza con la definizione (immagine tramite la FdT del semiasse I+) e a plottarne modulo (in scala logaritmica) e fase (in gradi) avendo per ascissa (logaritmica) la pulsazione. La funzione **polyval** serve a valutare un polinomio; **loglog** e **semilogx**[**y**] sono di funzionamento intuitivo.

```
» num=[10 1];
» den=conv([1 1],[100 1]);
» j=sqrt(-1);
» w=logspace(-4,2,500);
» RF=polyval(num,j*w)./polyval(den,j*w);
» mRF=abs(RF);
» fRF=angle(RF);
» subplot(211); loglog(w,mRF);
» subplot(212); semilogx(w,fRF/pi*180);
```

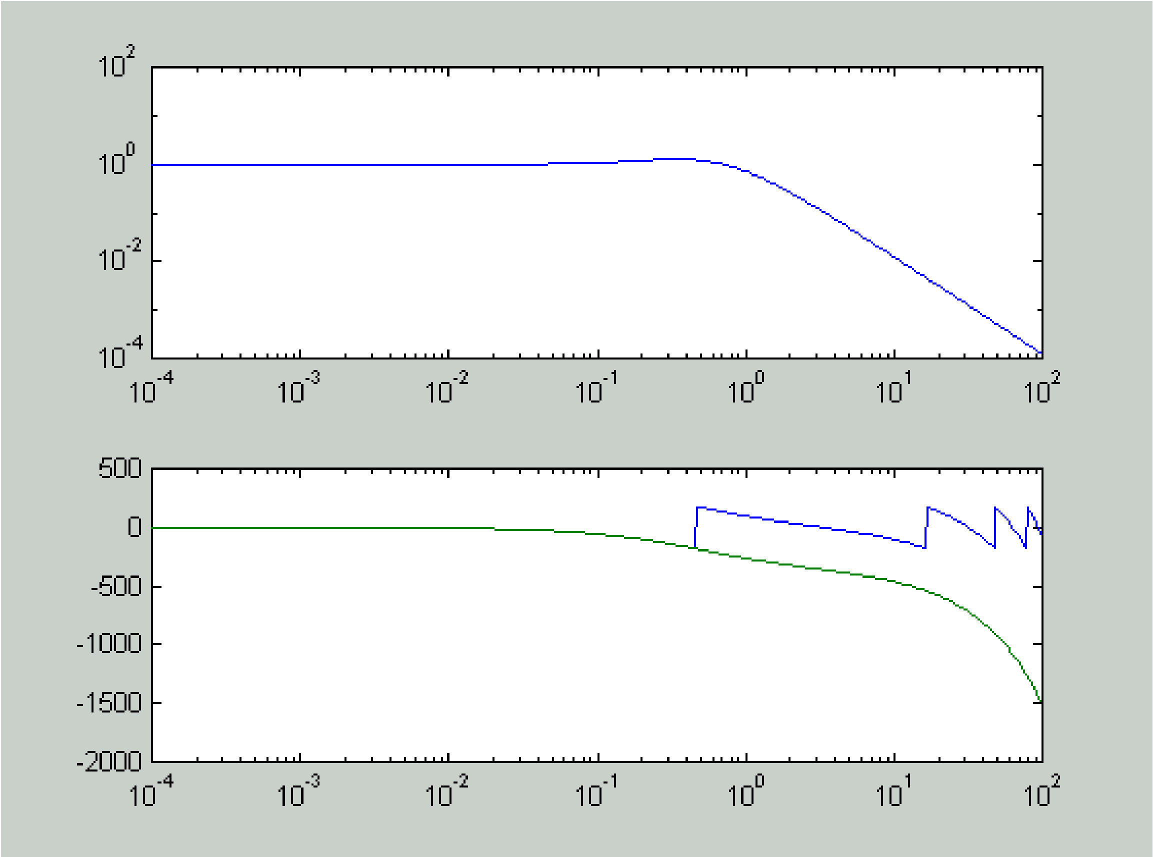
Risposta in frequenza

- Altro esempio: calcoliamo e plottiamo modulo e fase della risposta in frequenza di

$$G(s)=\frac{1-0.5s}{(1+s)(1+2s)^2}e^{-0.2s}$$

```
» num=[-5 1]; den=conv([1 1],conv([2 1],[2 1])); d=0.2;
» j=sqrt(-1);
» w=logspace(-4,2,500);
» RF=polyval(num,j*w)./polyval(den,j*w).*exp(-d*j*w);
» mRF=abs(RF);
» fRF=angle(RF);
» fRFu=unwrap(fRF);     (evita la riduzione al 1° giro)
» subplot(211); loglog(w,mRF);
» subplot(212);
```

- Risultato:



Provate esempi simili (10 min) e accertatevi di aver capito.

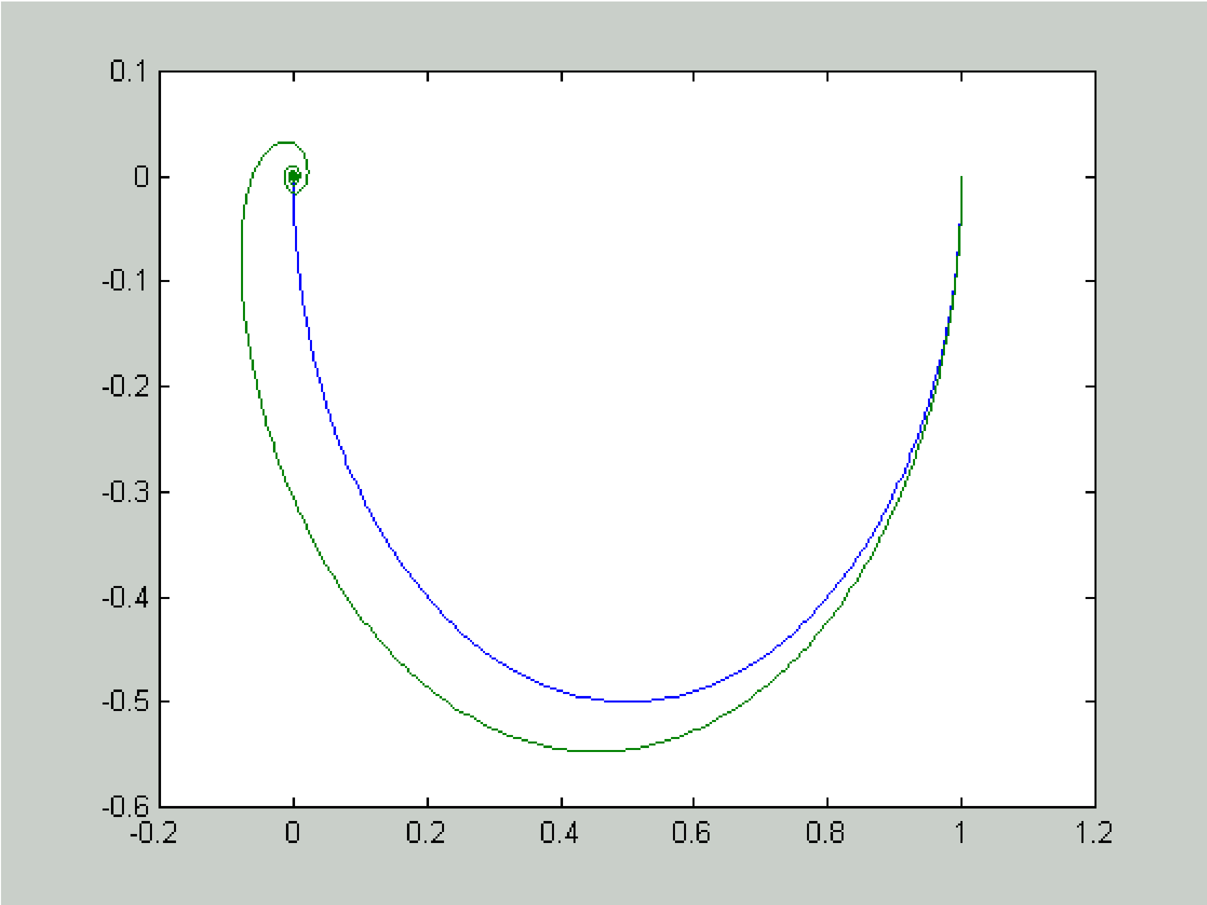
- Prendiamo adesso le due funzioni di trasferimento

$$G_1(s)=\frac{1}{1+s},G_2(s)=G_1(s)e^{-0.1s}$$

calcoliamone le risposte in frequenza e rappresentiamole nel piano complesso come curve punteggiate dalla pulsazione:

```
» num=1; den=[1 1]; d=0.1;
» w=logspace(-3,6,1000);
» RF1=polyval(num,j*w)./polyval(den,j*w);
» RF2=RF1.*exp(-d*j*w);
» plot(real(RF1),imag(RF1),real(RF2),imag(RF2));
```

- Risultato:

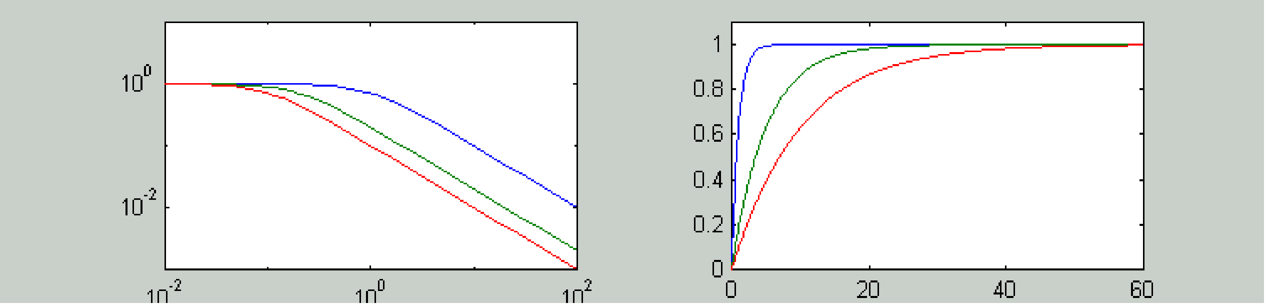


Provate esempi simili (5 min) e accertatevi di aver capito.

Relazioni tra risposte nel tempo e in frequenza

- Relazione tra banda passante e velocità di risposta:

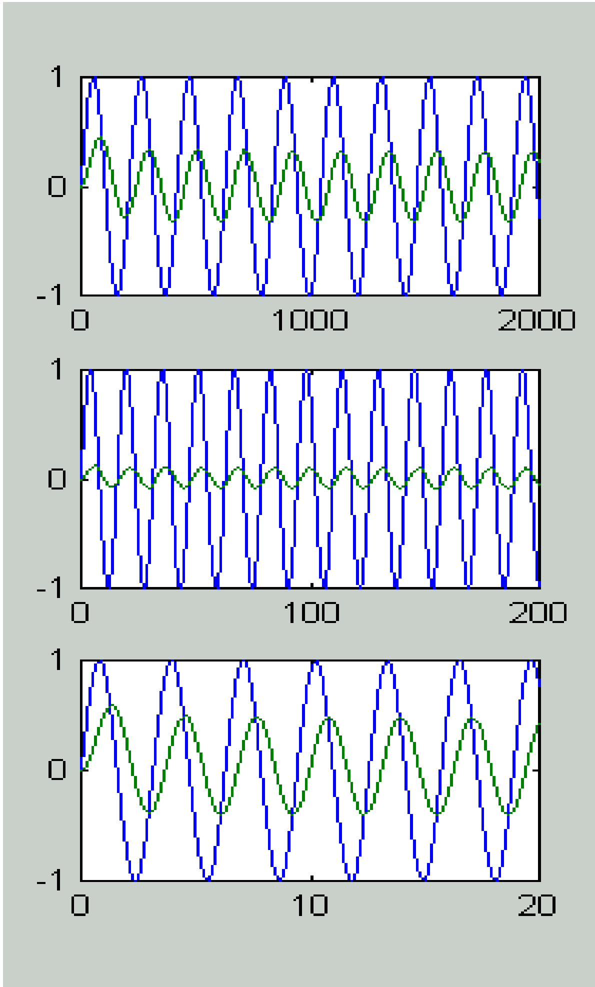
```
» w=logspace(-2,2);
» m1=abs(1./polyval([1 1],sqrt(-1)*w));
» m2=abs(1./polyval([5 1],sqrt(-1)*w));
» m3=abs(1./polyval([10 1],sqrt(-1)*w));
» t=0:0.1:60;
» y1=step(tf(1,[1 1]),t);
» y2=step(tf(1,[5 1]),t);
» y3=step(tf(1,[10 1]),t);
» subplot(121); loglog(w,m1,w,m2,w,m3);
» axis([w(1) w(end) 1e-3 10]);
» subplot(122); plot(t,y1,t,y2,t,y3);
» axis([t(1) t(end) 0 1.1]);
```



Provate esempi simili (5 min) e accertatevi di aver capito.

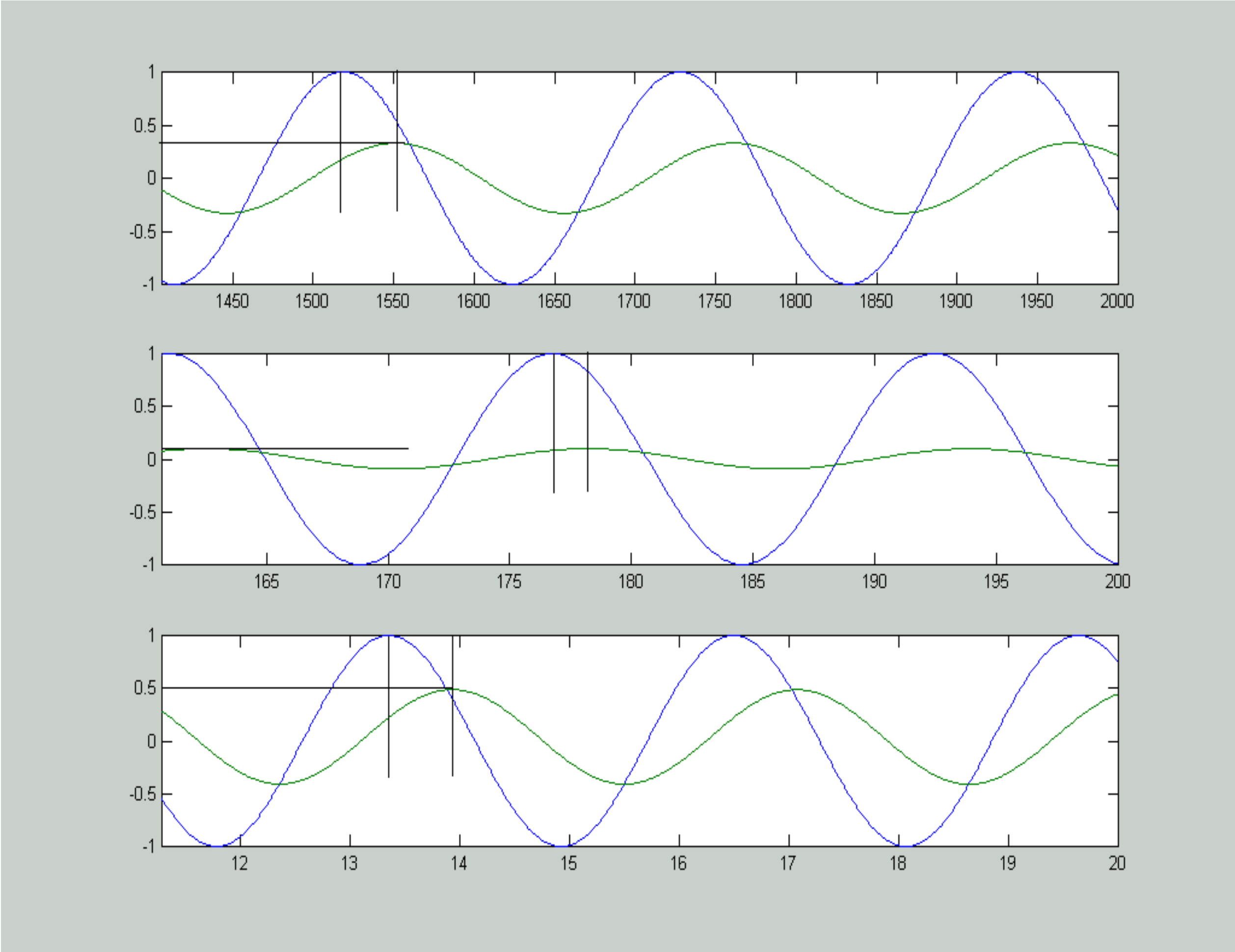
- Misura di modulo e sfasamento della risposta in frequenza ad una data pulsazione:

```
» G=tf([10 1],conv([1 1],[100 1]));
» w1=0.03; » w2=0.4; » w3=2;
» t1=0:2000;
» t2=0:0.1:200;
» t3=0:0.01:20;
» u1=sin(w1*t1);
» u2=sin(w2*t2);
» u3=sin(w3*t3);
» y1=lsim(G,u1,t1);
» y2=lsim(G,u2,t2);
» y3=lsim(G,u3,t3);
» subplot(311); plot(t1,u1,t1,y1);
» subplot(312); plot(t2,u2,t2,y2);
» subplot(313); plot(t3,u3,t3,y3);
» subplot(313); plot(t3,u3,t3,10*y3);
```



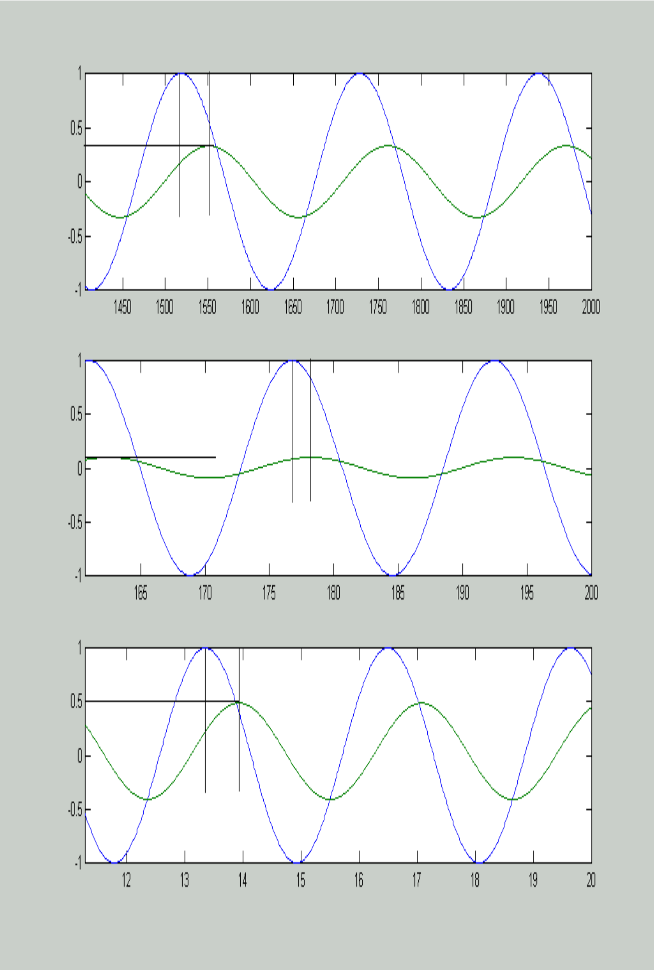
Relazioni tra risposte nel tempo e in frequenza

- Usando lo strumento di zoom evidenziamo le ultime oscillazioni dei movimenti forzati che abbiamo calcolato e valutiamo
  - l'ampiezza |Y| dell'uscita e
  - la distanza temporale D tra i massimi corrispondenti di questa e dell'ingresso (ovviamente col segno + se in anticipo, - se in ritardo).



Relazioni tra risposte nel tempo e in frequenza

- Risultati:



Pulsazione ω_1=0.03 (periodo 209s):

|Y|=0.4 → |G(j0.03)| = 0.4/1=0.4

D=-32 → arg°(G(j0.03))=-32/209*360°=-56°

Pulsazione ω_2=0.4 (periodo 15.7s):

|Y|=0.1 → |G(j0.4)| = 0.1/1=0.1

D=-1.6 → arg°(G(j0.4))=-1.6/15.7*360°=-36°

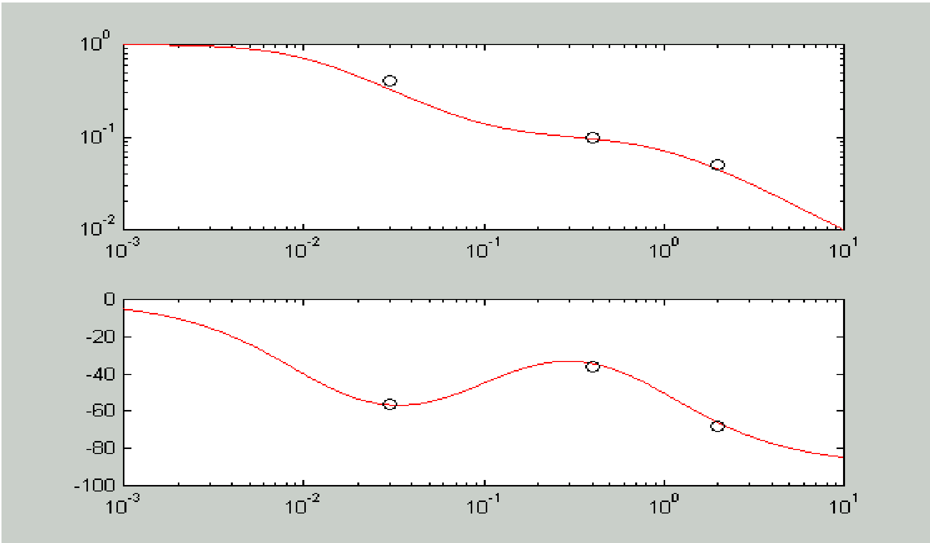
Pulsazione ω_3=2 (periodo 3.14s):

|10Y|=0.5 → |G(j2)| = 0.05/1=0.05

D=-0.6 → arg°(G(j2))=-0.6/3.14*360°=-68°

- Verifichiamo osservando la risposta in frequenza calcolata:

```
» w=logspace(-3,1,1000); j=sqrt(-1);
» RF=polyval([10 1],j*w)./polyval(conv([1 1],[100 1]),j*w);
» m=abs(RF); f=angle(RF)/pi*180;
» subplot(211);
» loglog(w,m,'r',[w1 w2 w3],[0.4 0.1 0.05],'ok');
» subplot(212);
» semilogx(w,f,'r',[w1 w2 w3],[-56 -36 -68],'ok');
```



Provate a fare l'analogo col diagramma polare (10 min).

Tre comandi utili

- Il comando **bode** calcola e/o traccia a video i diagrammi di Bode;
- Il comando **nyquist** calcola e/o traccia a video il diagramma di Nyquist;
- Il comando **margin** calcola i margini di fase e guadagno data la funzione di trasferimento d'anello e/o li mostra a video sui relativi diagrammi di Bode.

- Usate il sistema di help di MATLAB per apprendere la sintassi dei tre comandi e quindi
  - tracciate i diagrammi di Bode e di Nyquist di $\mathbf{G(s)=1/(s(1+s))}$;
  - analizzate la stabilità del sistema di controllo con funzione di trasferimento d'anello $\mathbf{L(s)=1/(s(1+sT)^2)}$ al variare di $\mathbf{T}$;
  - dato il sistema di controllo con funzione di trasferimento d'anello $\mathbf{L(s)=k/(s(1+s)^2)}$, trovate il valore di $\mathbf{k}$ che dà un margine di fase di 45° e determinate la relativa pulsazione critica.

Analisi di stabilità e stabilizzazione con Nyquist

- Vediamo soltanto un paio di esempi semplici:
  - Analizzate con Nyquist la stabilità del sistema di controllo in retroazione negativa con **P(s)=1/((s+10)(s-3)) e R(s)=1 (è instabile);**
  - determinate un regolatore in retroazione (negativa) **R(s)** che renda asintoticamente stabile il sistema in anello chiuso;
    ATTENZIONE:
    - non siete nelle ipotesi di Bode e dovrete usare il criterio di Nyquist,
    - non potete cancellare il polo instabile;

  SOLUZIONE: ad esempio **R(s)=50**, che fa fare al diagramma di Nyquist della risposta in frequenza di **L=RP** un giro antiorario attorno al punto -1.
  - fate la stessa cosa con **G(s)=1/((s+1)(s-3))*;***
    SUGGERIMENTO: con R(s)=k c'è comunque un giro orario; provate allora a cancellare il polo stabile (questo si può sempre fare) e sostituirlo con uno più lontano dall'asse, ovvero usate ad esempio la struttura R(s)=k(s+1)/(s+10).

Provate un esempio simile (5min) e accertatevi di aver capito

Conclusioni

- Abbiamo visto come rappresentare sistemi interconnessi e come calcolare e rappresentare risposte in frequenza in MATLAB.
- Abbiamo correlato, in modo semplice e non esaustivo, i domini del tempo e della frequenza.
- Abbiamo imparato a fare analisi di stabilità nelle ipotesi di Bode e non, vedendo anche un semplice esempio di stabilizzazione con uso del criterio di Nyquist.

- Nella prossima esercitazione determinerete un modello dell'apparato sperimentale di laboratorio, in modo da usare quanto sapete – e nel frattempo imparerete a lezione – per fare, nell'ultima esercitazione, la sintesi e la prova del relativo controllo.