Laboratorio di Fondamenti di Automatica
Seconda esercitazione

Analisi di risposte di sistemi dinamici in MATLAB

Premessa

- Scopo di quest'esercitazione di laboratorio:
  - imparare a usare MATLAB per analizzare le risposte di sistemi dinamici LTI (lineari tempo-invarianti), prevalentemente a tempo continuo, nel dominio del tempo.
- Contenuto dell'esercitazione:
  - rappresentazione di sistemi dinamici LTI in MATLAB;
  - calcolo di risposte nel dominio del tempo;
  - risposte a scalino di sistemi del 1° e 2° ordine;
  - risposte a scalino di sistemi di ordine superiore e illustrazione del concetto di “dinamica dominante”;
  - conclusioni.

- Nello spazio di stato:

```
» S=ss(A,b,c,d)     (a tempo continuo)
» S=ss(A,b,c,d,DT) (a tempo discreto, cosa di cui
                     oggi non parliamo oltre)
```

- Ingresso/uscita (FdT funzione di trasferimento, TF transfer function):

```
» S=tf(num,den)     (a tempo continuo)
```

Esempi (definizione e conversione):

```
» S1=ss([-1 0;1 -2],[1 0]',[1 2],0);
» tf(S1)
Transfer function:
    s + 4
-------------
s^2 + 3 s + 2
```

Risposte nel dominio del tempo

- Allo scalino (stato iniziale nullo):
  - **» step(S); (visualizza)**
  - **» step(S,t); (simile, vett. dei tempi dato)**
  - **» [y,t]=step(S); (calcola risposta e tempi)**
  - **» y=step(S,t); (calcola dato il vett. dei tempi)**
- All'impulso: tutto uguale con **impulse** anziché **step**.
- Esercizio 1: provate i comandi elencati sopra ponendo **S** pari al sistema la cui funzione di trasferimento ha guadagno unitario, nessuno zero e due poli in -5 e -10. Ponete **t=0:0.01:1.** Usate **plot** per visualizzarla quando non lo fa già **step**.
- Esercizio 2: ripetete il tutto nel caso in cui i poli della funzione di trasferimento di **S** sono complessi coniugati e valgono 0.1$\pm$j0.4. Ponete **t=0:0.2:80.**

Risposte nel dominio del tempo

- Movimento libero dallo stato iniziale **x0** (per sistemi specificati nello spazio di stato):

```
» initial(S,x0);
» initial(S,x0,t);
» [y,t,x]=initial(S,x0);    (c'è anche il mov. di x)
» [y,t,x]=initial(S,x0,t); (sic)
```

- Esercizio: calcolare la risposta del sistema definito da

```
» A=[-1 0;1 -2];b=[1 0]';c=[1 2];d=0;
```

allo scalino unitario, con stato iniziale **x0'=[1 1]**, per **t** da 0 a 10s a passi di 0.01s.

```
» S=ss([-1 0;1 -2],[1;0],[1 2],0);
» x0=[1 1]';t=0:0.01:10;
» [yL,t]=initial(S,x0,t); yF=step(S,t);
» y=yL+yF;
» plot(t,yL,t,yF,t,y);
```

Risposte nel dominio del tempo

- Risposta a ingresso **u** e stato iniziale **x0** generici:

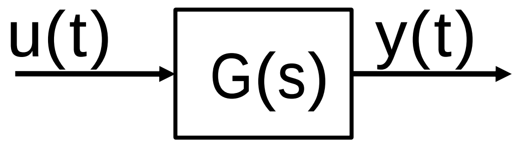
```
» y=lsim(S,u,t);            (cond. iniz. nulle)
» y=lsim(S,u,t,x0);         (cond. iniz. x0)
» [y,t,x]=lsim(S,u,t);
» [y,t,x]=lsim(S,u,t,x0);
```

Esempi:

```
» S1=tf(1,[1 1 1]);
» S2=ss(-2,1,1,1);
» t=0:0.01:20;
» u=sin(2*pi*t)+0.2*sin(2*pi*5*t);
» y1=lsim(S1,u,t);
» y2=lsim(S2,u,t,2);
```

Provate esempi simili (10 min) e accertatevi di aver capito.

Risposta a scalino



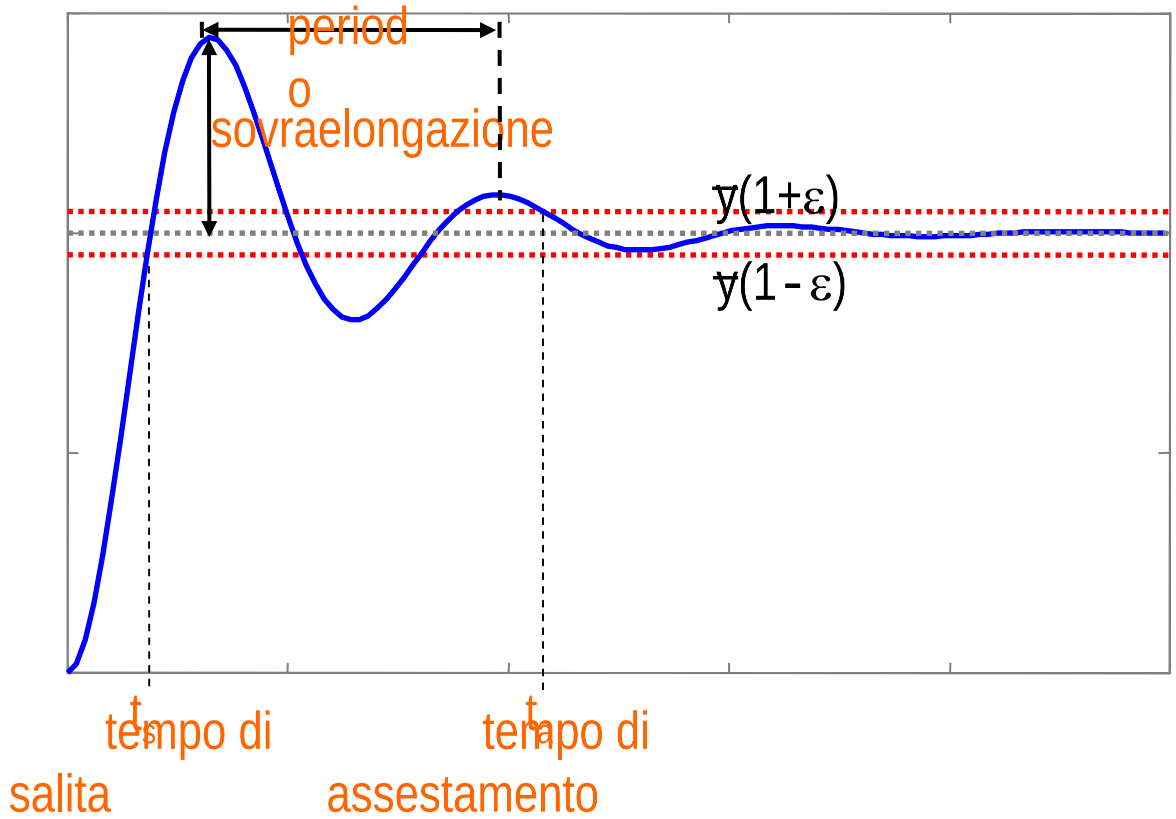
- Dato un ingresso u(t) trasformabile secondo Laplace e con *condizioni iniziali nulle*, si ha Y(s) = G(s)U(s)
- E' interessante analizzare il comportamento di un sistema sollecitato da ingressi particolari (canonici), tra cui
  - lo scalino (cosa che vedremo oggi) ma anche l'impulso, la rampa e altri segnali con trasformata del tipo U/s^n, ...
  - la sinusoide (cosa che faremo dopo che avrete conosciuto il concetto di risposta in frequenza)
- Parleremo di risposta (per ora allo scalino) sottintendendo sempre l'ipotesi di condizioni iniziali nulle.

Importanza della risposta a scalino

- La risposta a scalino rappresenta abitualmente il passaggio da un valore di regime ad un altro (transitorio).
- E' relativamente facile da ottenere in pratica (nella quarta esercitazione lo farete per davvero sull'apparato sperimentale).
- Altre risposte canoniche possono essere dedotte da essa (ad esempio poiché l'impulso è "la derivata" dello scalino, si dimostra che la risposta all'impulso è la derivata della risposta a scalino); la risposta all'impulso non è affatto facile da ottenere in pratica, anzi a rigore non è ottenibile.
- La sua conoscenza è quindi equivalente alla conoscenza della funzione di trasferimento (che coincide con la trasformata della risposta all'impulso).

Risposta a scalino di sistemi asintoticamente stabili

- L'uscita, dopo un certo transitorio, raggiunge un nuovo valore di regime y, associato all'ampiezza dell'ingresso a scalino u.
- Il transitorio è caratterizzato da
  - durata (velocità di risposta),
  - presenza di oscillazioni,
  - presenza di sovraelongazioni o sottoelongazioni.
- Parametri caratteristici della risposta:



Sistemi del 1° ordine: l'integratore

$G(s) = \mu/s$

$Y(s) = G(s)U(s) = (\mu/s)(1/s) = \mu/s^2$

$y(t) = \mu \, \mathrm{ram}(t)$

- La risposta del sistema è, a meno di una costante, l'integrale dell'ingresso:
  - la risposta allo scalino è una rampa,
  - la risposta all'impulso è uno scalino.

Sistemi del 1° ordine senza zeri

$G(s) = \mu/(1+sT) \quad \mu,T>0$

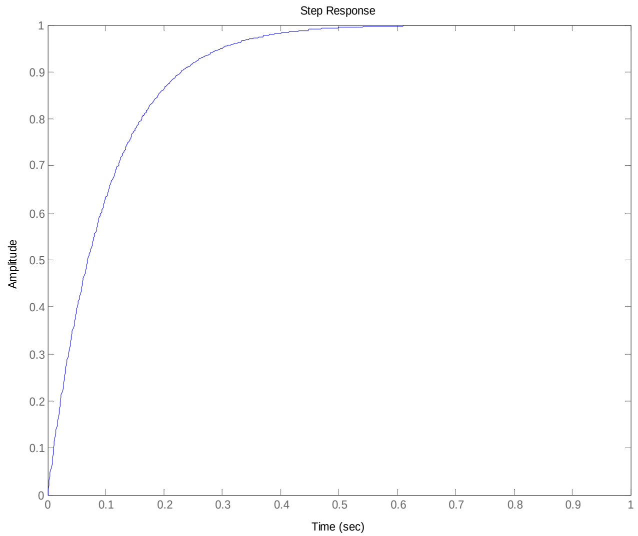
$Y(s) = G(s)U(s) = (\mu/(1+sT))(1/s) = \mu/(s(1+sT))$

Teorema del valore iniziale: $y(0) = 0, \; dy/dt|_{t=0} = \mu/T$

Quindi: $y(t) = \mu(1-e^{-t/T})$

Esempio:

```
>>mu=1;
>>T=0.1;
>>t=0:0.001:1;
>>step(tf(mu,[T 1]),t);
```



Sistemi del 1° ordine senza zeri

- Valutiamo il tempo di assestamento (al 99%) t_a:

è il minimo valore di t per cui

$0.99\mu \leq y(t) \leq 1.01\mu$ per ogni $t \geq t_a$

Nel nostro caso:

$\mu(1-e^{-t/T})=0.99\mu$, quindi $e^{-t/T} = 0.01$, quindi $t_a \approx 4.6T$

- Si assume comunemente che il tempo di assestamento (al 99%) valga 5T;
- T prende il nome di costante di tempo;
- la velocità di risposta dipende dalla posizione del polo -1/T (più il polo è vicino all'asse immaginario, cioè più T è grande, più il transitorio è lento).

Sistemi del 1° ordine con uno zero

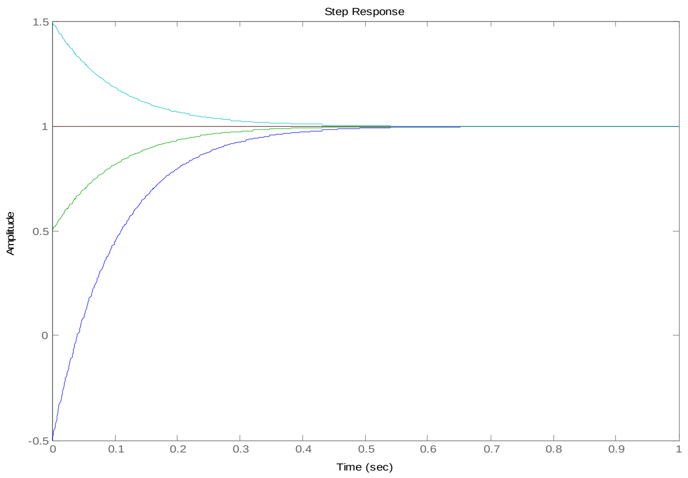
$G(s) = \mu(1+sT_z)/(1+sT_p) \qquad \mu, T_p > 0$

Teorema del valore iniziale:

$y(0) = \mu T_z/T_p, \quad dy/dt|_{t=0} = (\mu/T_p)(1-T_z/T_p)$

Studiamo con MATLAB l'andamento della risposta al variare della posizione dello zero:

```
>>vecTz=T*[-0.5 0.5 1 1.5];
>>for k=1:length(vecTz)
  step(tf(mu*[vecTz(k) 1],[T 1]),t);
  hold on,
 end
>>hold off
```



Sistemi del 2° ordine con poli reali e senza zeri

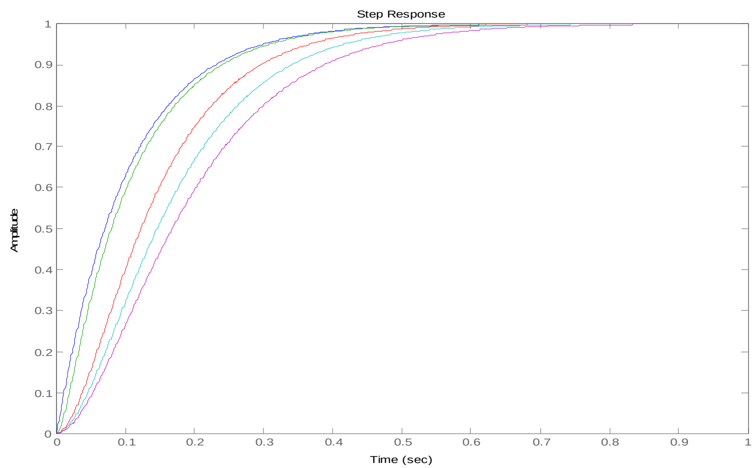
$G(s) = \mu/((1+sT_1)(1+sT_2)) \quad \mu, T_1, T_2 > 0$

Teorema del valore iniziale:

$y(0) = 0, \; dy/dt|_{t=0} = 0, \; d^2y/dt^2|_{t=0} = \mu/(T_1T_2)$

Studiamo con MATLAB l'andamento della risposta al variare della seconda costante di tempo:

```
>>vecT2=T*[0.01 0.1 0.5 0.75 1];
>>for k=1:length(vecT2)
  step(tf(mu,conv([T 1],[vecT2(k) 1])),t),
  hold on,
 end
>>hold off
```



Sistemi del 2° ordine con poli reali e senza zeri

- Osservazioni:
  - la risposta parte con pendenza nulla;
  - il tempo di assestamento è pari a circa 5 volte la costante di tempo maggiore, la quale domina il comportamento più lento: $t_a \approx 5 \max(T_1, T_2)$;
  - la velocità di risposta dipende quindi dalla posizione del polo più vicino all'asse immaginario;
  - la costante di tempo minore produce il suo effetto essenzialmente nei primi istanti del transitorio.

Sistemi del 2° ordine con poli reali e uno zero

$G(s) = \mu(1+sT_z)/((1+sT_1)(1+sT_2)) \quad \mu, T_1, T_2 > 0$

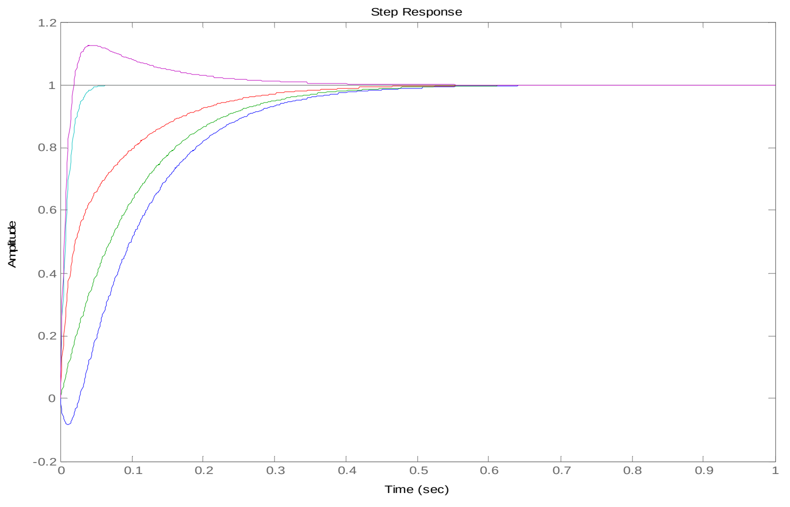
Teorema del valore iniziale:

$y(0) = 0, \; dy/dt|_{t=0} = 0, \; d^2y/dt^2|_{t=0} = (\mu T_z)/(T_1 T_2)$

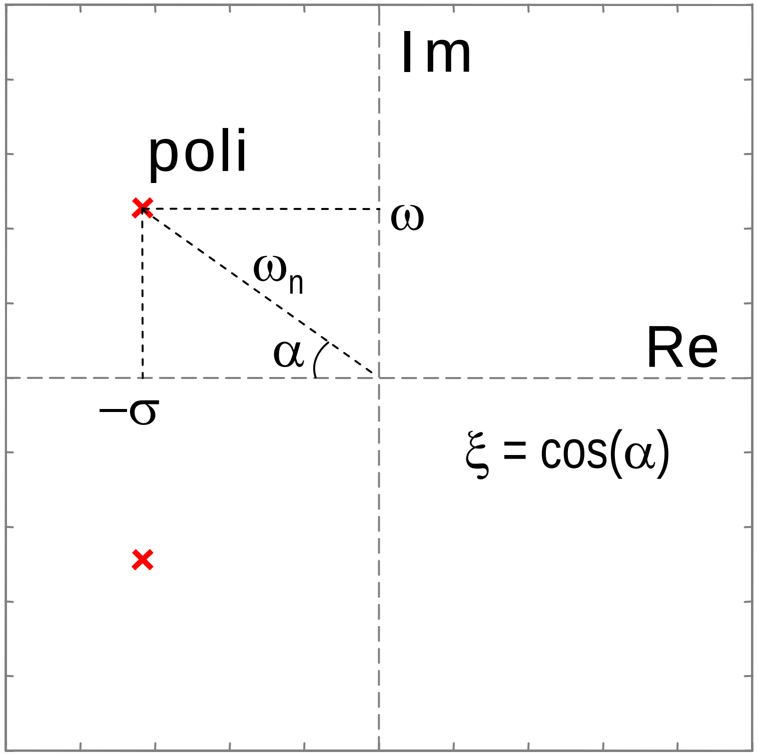
Studiamo con MATLAB l'andamento della risposta al variare della costante di tempo dello zero:

```
>>vecTz=T*[-0.2 0.1 0.5 1 1.2];
>>for k=1:length(vecTz)
  step(tf(mu*[vecT2(k) 1],conv([T 1],[0.1*T 1])),t),
  hold on,
end
>>hold off
```

Notare la presenza di sottoelongazioni o sovraelongazioni.



$$G \quad s = \frac{}{1 \quad 2\frac{}{_n} s \quad \frac{1}{{}^2_n} s^2}$$



ω_n e ξ si dicono rispettivamente "pulsazione naturale" e "fattore di smorzamento"

Formule di conversione:

$\omega = \omega_n(1 - \xi^2)^{1/2}$

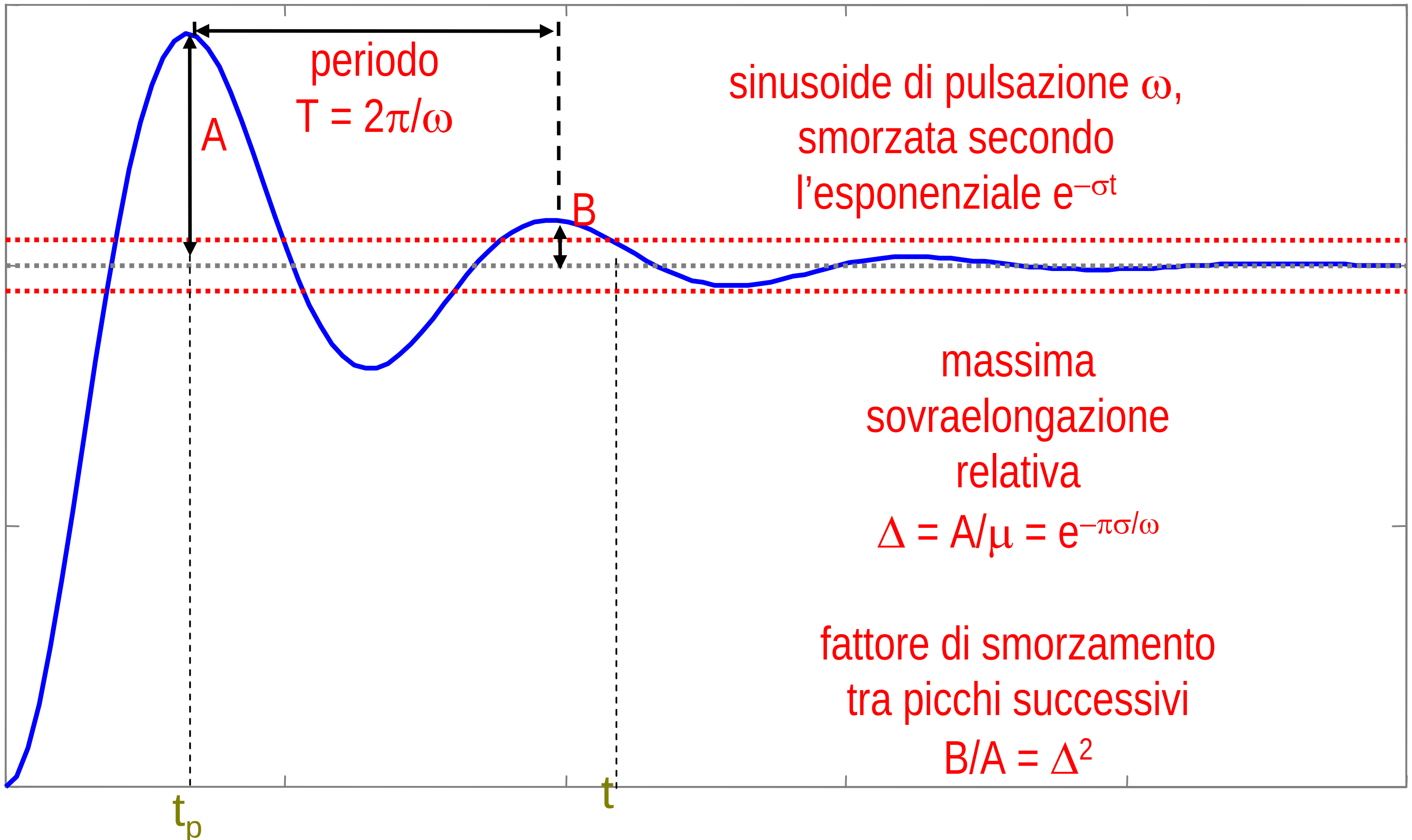
$\sigma = \xi\omega_n$

$\xi = \cos(\alpha) = \cos(\mathrm{arctg}(\omega/\sigma))$

$\omega_n = (\omega^2 + \sigma^2)^{1/2}$

Sistemi del 2° ordine con poli complessi coniugati

- Parametri caratteristici della risposta a scalino;



tempo di primo picco
$t_p = T/2 = \pi/\omega$

tempo di assestamento
$t_a \cong 5\ (1/\sigma)$

Sistemi del 2° ordine con poli complessi coniugati

- Valori:

$t_a \approx 5\ (1/\sigma) = 5\ (1/\xi\omega_n)$

$T = 2\pi/\omega = 2\pi/\omega_n(1 - \xi^2)^{1/2}$

$t_p = T/2 = \pi/\omega = \pi/\omega_n(1 - \xi^2)^{1/2}$

$\Delta = A/\mu = e^{-\pi\sigma/\omega} = e^{-\pi\xi/(1 - \xi\ \ )}$

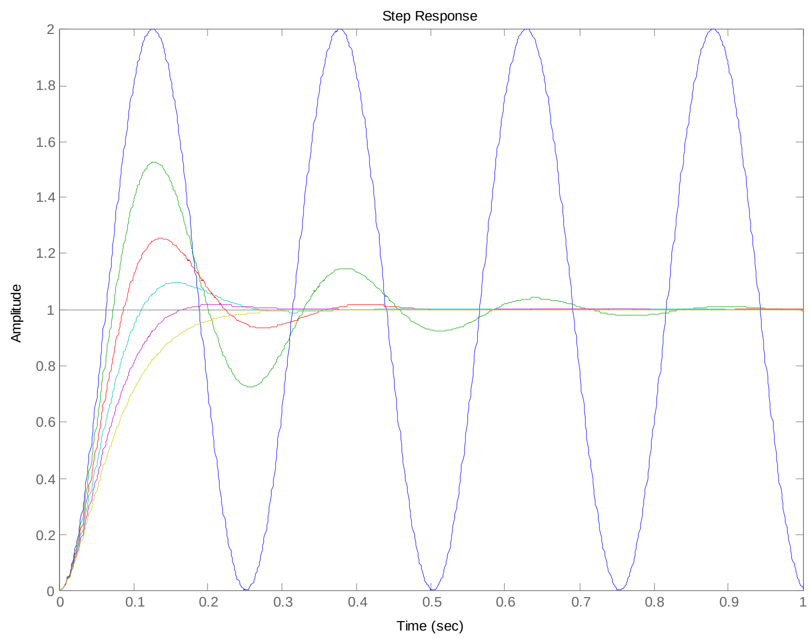
- Osservazioni:
  - Δ dipende solo da ξ e non da ω_n
  - per $\xi = 0$ (poli immaginari puri) si hanno oscillazioni non smorzate
  - per $\xi = 1$ (poli reali coincidenti) la risposta non oscilla

Studiamo con MATLAB l'andamento della risposta al variare dello smorzamento:

```
>>vecCsi=[0:0.2:1];
>>wn = 25;
>>for k=1:length(vecCsi);
  step(tf(mu,[1/wn^2 2*vecCsi(k)/wn 1]),t),
  hold on,
end
>>hold off
```

A parità di ω_n, al crescere di ξ da 0 a 1

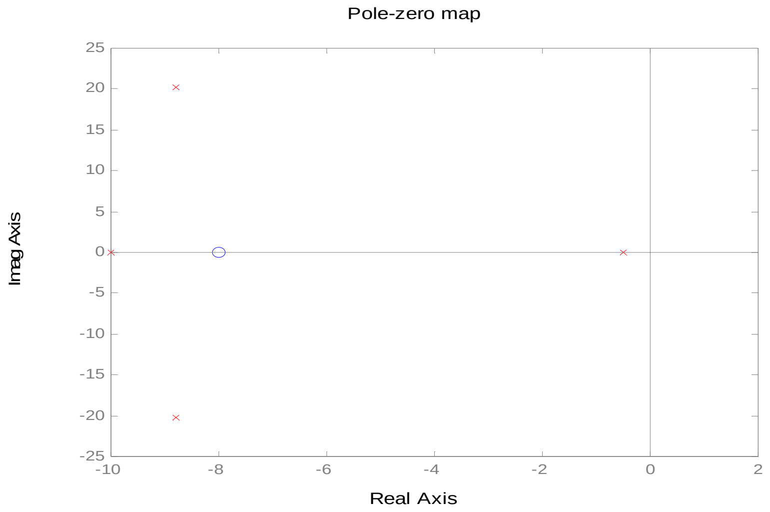
- Δ diminuisce
- T e t_p aumentano ($\rightarrow \infty$ per $\xi \rightarrow 1$)



Sistemi con ordine maggiore di 2

Consideriamo un sistema (asintoticamente stabile) del 4° ordine e vediamo dove sono nel piano complesso i suoi poli e zeri (si usa il comando pzmap):

```
>>mu=1; Tz=1/8; csi=0.4; wn=22; T1=0.1; T2=2;
>>S=tf([Tz 1],conv(conv([T1 1],[T2 1]),[1/wn^2 2*csi/wn 1]));
>>pzmap(S);
```

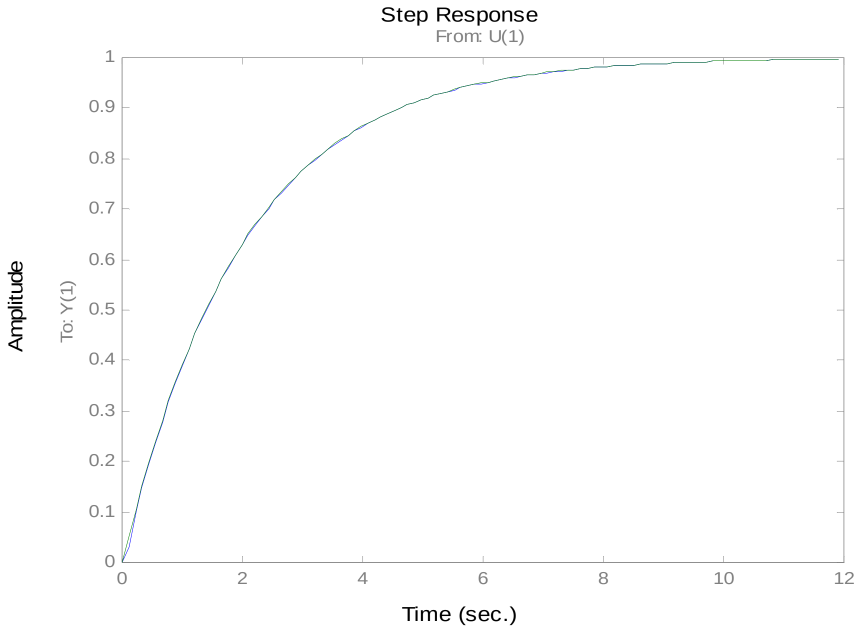


Chiediamoci da cosa dipende la sua dinamica dominante, ovvero la dinamica più lenta dei suoi transitori (ad esempio, di risposta a scalino).

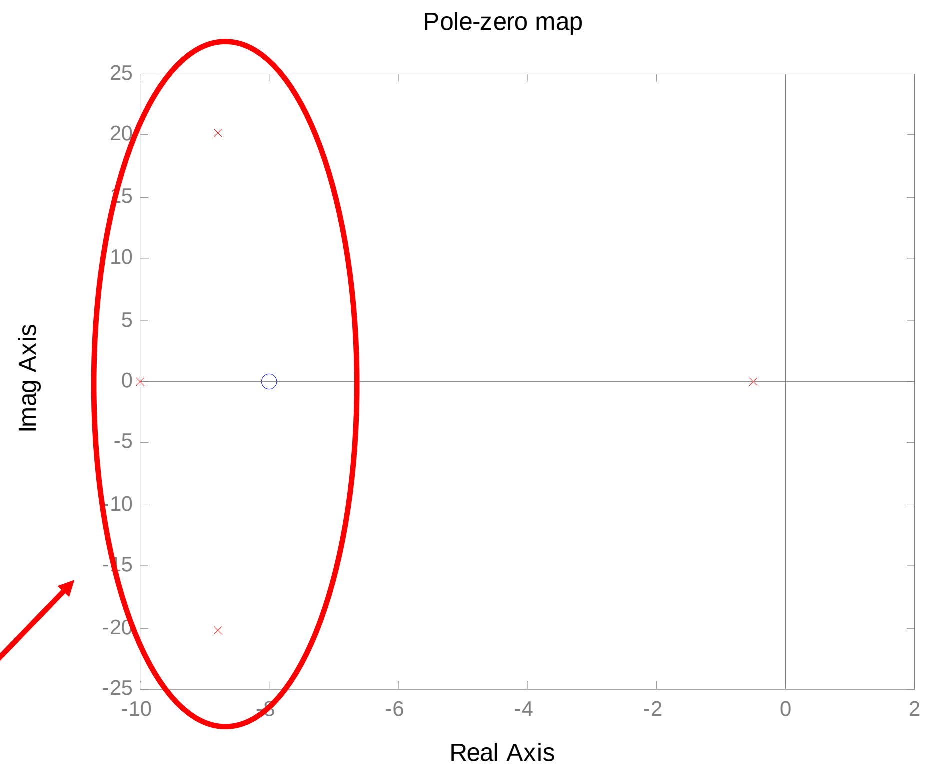
Sistemi con ordine maggiore di 2

Verifichiamo che la sua risposta a scalino è praticamente uguale a quella di un sistema con lo stesso guadagno (ovvio) e il solo polo più lento, ossia quello con la costante di tempo più grande:

```
>>step(S,tf(mu,[T2 1]));
```



Sistemi con ordine maggiore di 2

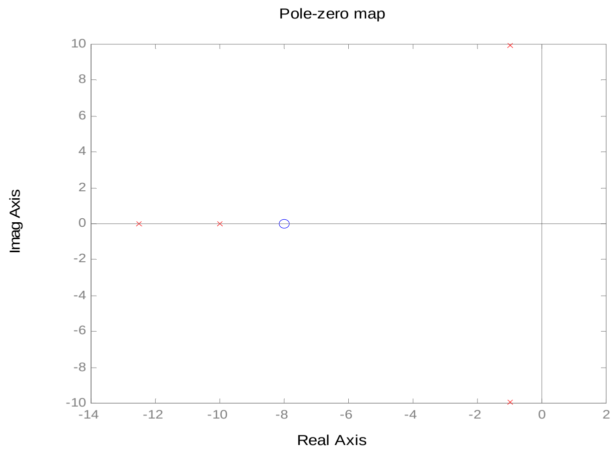


Le singolarità più lontane dall'asse immaginario hanno un effetto trascurabile sull'andamento della risposta: il loro effetto si esaurisce rapidamente nei primi istanti del transitorio.

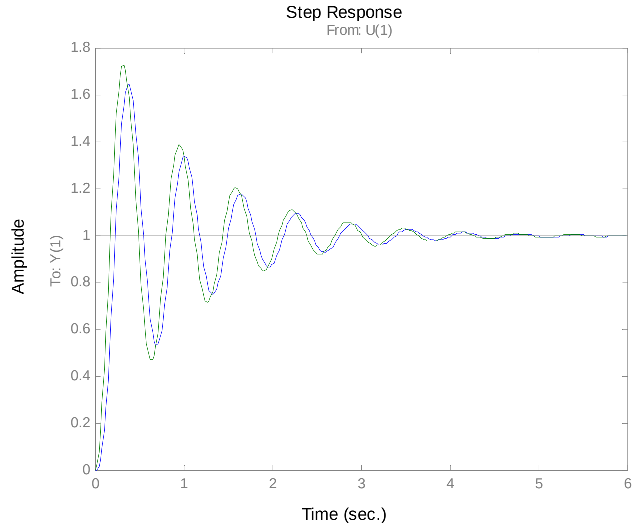
Sistemi con ordine maggiore di 2

Consideriamo un altro sistema (asintoticamente stabile) del 4° ordine, dove le singolarità "dominanti", ovvero più vicine all'asse immaginario, sono una coppia di poli complessi coniugati, e verifichiamo che la sua risposta a scalino è praticamente indistinguibile da quella di un sistema del 2° ordine con lo stesso guadagno e la sola coppia di poli complessi:

```
>>mu=1; Tz=1/8; csi=0.1; wn=10; T1=0.1; T2=0.08;
>>S=tf([Tz 1],conv(conv([T1 1],[T2 1]),[1/wn^2 2*csi/wn 1]));
>>pzmap(S);
```




```
>>step(S,tf(mu,[1/wn^2 2*csi/wn 1]));
```



Sistemi con ordine maggiore di 2

- La dinamica dominante di un sistema S di ordine > 2 è approssimabile con un sistema del 1° o 2° ordine con
  - lo stesso guadagno di S,
  - i poli (e gli zeri) di S più vicini all'asse immaginario (purché non vicini rispettivamente ad altri zeri o poli).

- Tale approssimazione consente di valutare le caratteristiche "macroscopiche" del transitorio e in particolare la sua durata t_a.
- La qualità dell'approssimazione è tanto migliore quanto più rilevante è la separazione tra le singolarità incluse nel modello approssimante e quelle eliminate.

Conclusioni

- Abbiamo visto come calcolare in MATLAB risposte di sistemi dinamici nel dominio del tempo.
- In particolare abbiamo studiato la risposta a scalino di sistemi semplici, accennando (l'argomento sarà ripreso) alla sua importanza per trarre informazioni su un sistema (almeno in parte) incognito. Tenete a mente queste cose per quando dovrete trarre da esperimenti un modello dell'apparato di laboratorio da controllare (quarta esercitazione).
- Abbiamo visto come sia (talvolta) possibile approssimare con modelli di ordine basso dinamiche più complesse.
- A lezione approfondirete quanto visto; nella prossima seduta analizzeremo sistemi dinamici nel dominio della frequenza e vedremo come questo e il dominio del tempo si correlano.