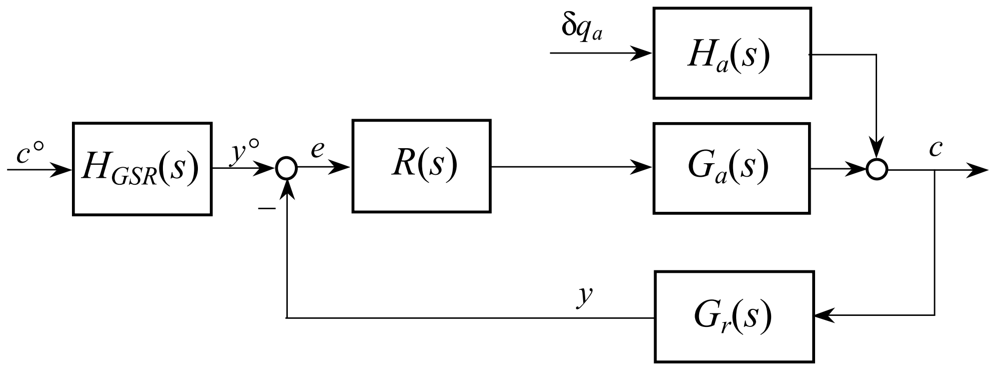
Fondamenti di automatica

***Esercizio* 23**. Con riferimento al sistema in figura



sia: $H_{GSR}(s) = G_r(s) = 0.1$,

$H_a(s) = \dfrac{5}{1 + 10\,s}$, $G_a(s) = \dfrac{80}{(1 + 10\,s)(1 + 2\,s)^2}$.

***Problema*:**

Determinare una $R(s)$ causale tale che:

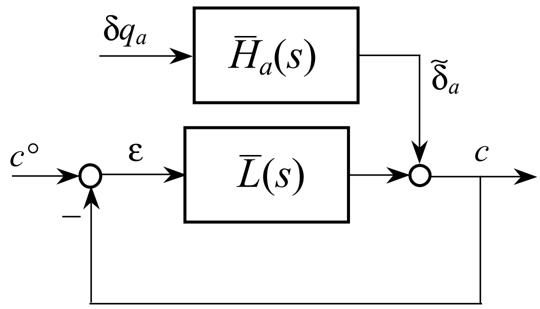
$\varphi_m \geq 50°$

$\omega_c \geq 0.1$ $[rad/udt]$

$|\varepsilon_\infty| \leq 2$ se : $c°(t) = A°\,ram(t)$, $|A°| \leq 0.3$
$\delta q_a(t) = A_a\,sca(t)$, $|A_a| \leq 15$

e calcolare il margine di guadagno del sistema ottenuto.

Progetto statico



$\bar{R}(s) := \dfrac{\mu_R}{s^{g_R}}$

$\bar{G}_a(s) = 80$, $\bar{G}_r(s) = 0.1$, $\bar{H}_a(s) = 5$

$\bar{L}(s) = 0.1 \times \dfrac{\mu_R}{s^{g_R}} \times 80 = \dfrac{8\,\mu_R}{s^{g_R}}$

Sotto le ipotesi di Bode, dev'essere $\mu = 8\,\mu_R > 0$ (condizione necessaria), di conseguenza dovrà esserere $\mu_R > 0$.

$$E(s) = \frac{1}{1 + \bar{L}(s)} C°(s) - \frac{1}{1 + \bar{L}(s)} \bar{H}_a(s)\, \Delta Q_a(s) =$$

$$= \frac{s^{g_R}}{s^{g_R} + 8\,\mu_R} \left[\frac{A°}{s^2} - \frac{A_a}{s} 5 \right]$$

$$\varepsilon_\infty := \lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim_{s\to 0} s\,E(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s^{g_R}}{s^{g_R} + 8\,\mu_R} \left[\frac{A°}{s} - A_a 5 \right]$$

$$= \begin{cases} \infty & , \quad \text{se } g_R = 0 \\ \dfrac{A°}{8\,\mu_R} & , \quad \text{se } g_R = 1 \\ 0 & , \quad \text{se } g_R > 1 \end{cases} \qquad \boxed{g_R = 1}$$

$$|\varepsilon_\infty| \le 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|A°|_{max}}{8\,\mu_R} \le 2 \quad \Leftrightarrow \quad \mu_R \ge \frac{0.3}{8 \times 2} = 0.0187 \qquad \boxed{\mu_R = 0.025}$$

$$\bar{R}(s) = \frac{0.025}{s}$$

Progetto dinamico

$$L_1(s) = \frac{0.2}{s\,(1 + 10\,s)\,(1 + 2\,s)^2} \quad ; \quad \omega_c = 0.14 \;\; , \;\; \varphi_m = 180° - |-90° - 52 - 2\times 16°| = 6°$$

Con l'aggiunta di due costanti di tempo al numeratore ($T_1 = 10$, $T_2 = 2$) e una più piccola al denominatore per assicurare la causalità ("fisica realizzabilità") del controllore si ha:

$$R(s) = \frac{0.025\,(1 + 10\,s)\,(1 + 2\,s)}{s\,(1 + T\,s)}$$

PID (*Porre N=10 e calcolare K_p, T_i, T_d e T*)

$$L_2(s) = \frac{0.2}{s\,(1 + 2\,s)\,(1 + T\,s)}$$

con T=0 (PID ideale): $\omega_c = 0.2$, $\varphi_m = 180° - |-90° - 23| = 67°$

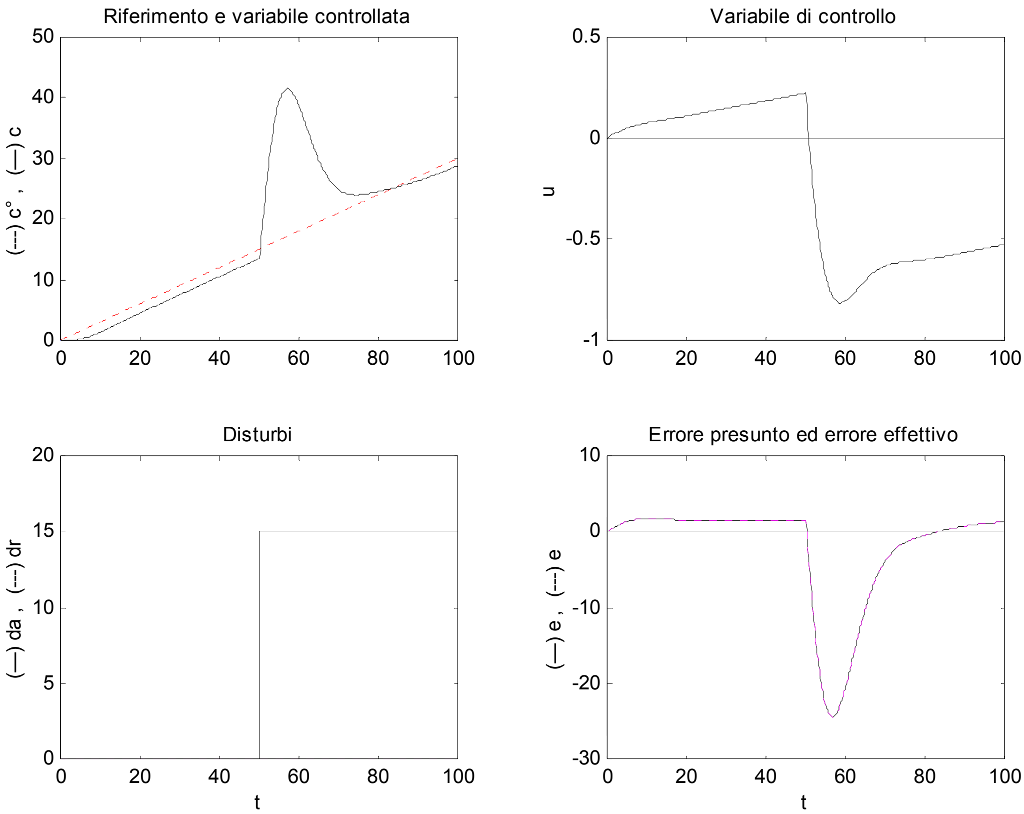
con T=1: $\omega_c = 0.2$, $\varphi_m = 180° - |-90° - 23 - 13°| = 54°$

$\omega_{180°} = 0.7$, $\mu_m = 18\ dB = 7.9$.

Simulazioni

> L'***errore presunto*** è dato dall'errore apparente diviso per il guadagno di $G_r(s)$. Se $\delta q_r = 0$, coincide con ε.

$c°(t) = 0.3\ ram(t)$, $\delta q_a(t) = 15\ sca(t - 50)$



Ziegler e Nichols : $K_c = 8\ dB = 2.5$, $\Omega_c = 0.6$, $T_c = 10.5$

$K_p = 0.6\ K_c = 1.5$, $T_i = T_c/2 = 5.25$, $T_d = T_c/8 = 1.31$

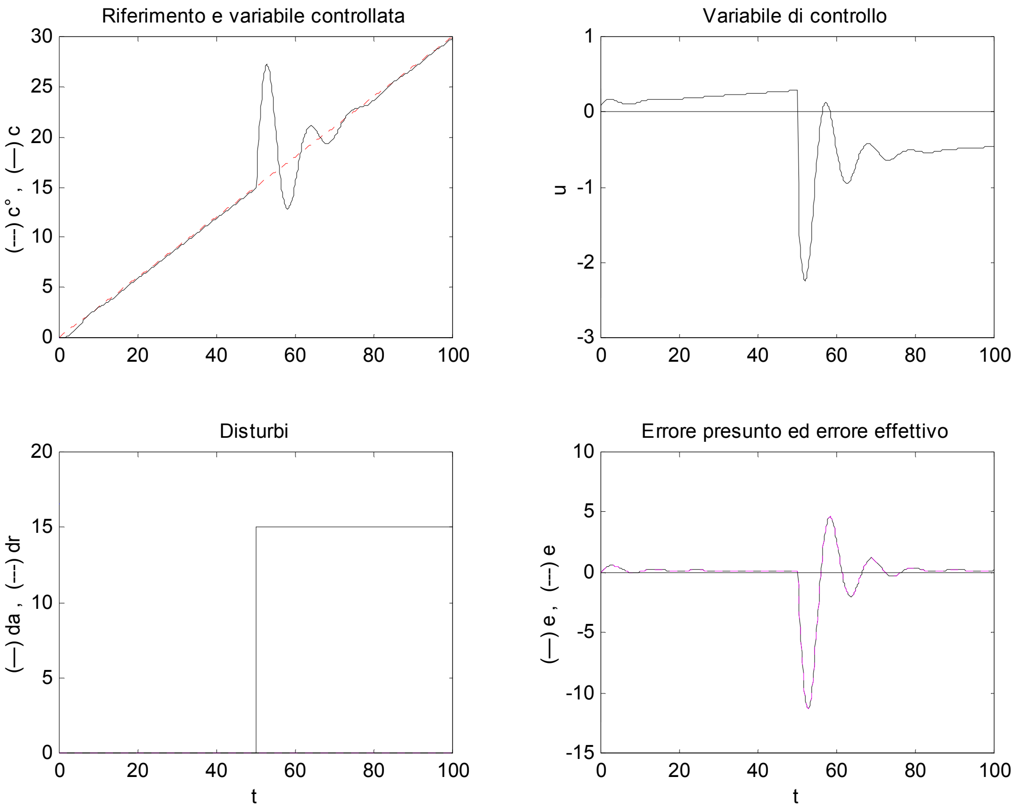
$$R_{ZN}(s) = \frac{2.1617\ s^2 + 1.5390\ s + 0.2860}{s\ (1 + 0.131\ s)}$$

(N.B.: $\mu_R = 0.286 >> \mu_{R\text{-}min}$)

($\omega_n = 2.9346$, $\zeta = 0.9787$)

$\omega_c = 0.6$, $\varphi_m = 23°$

Simulazioni

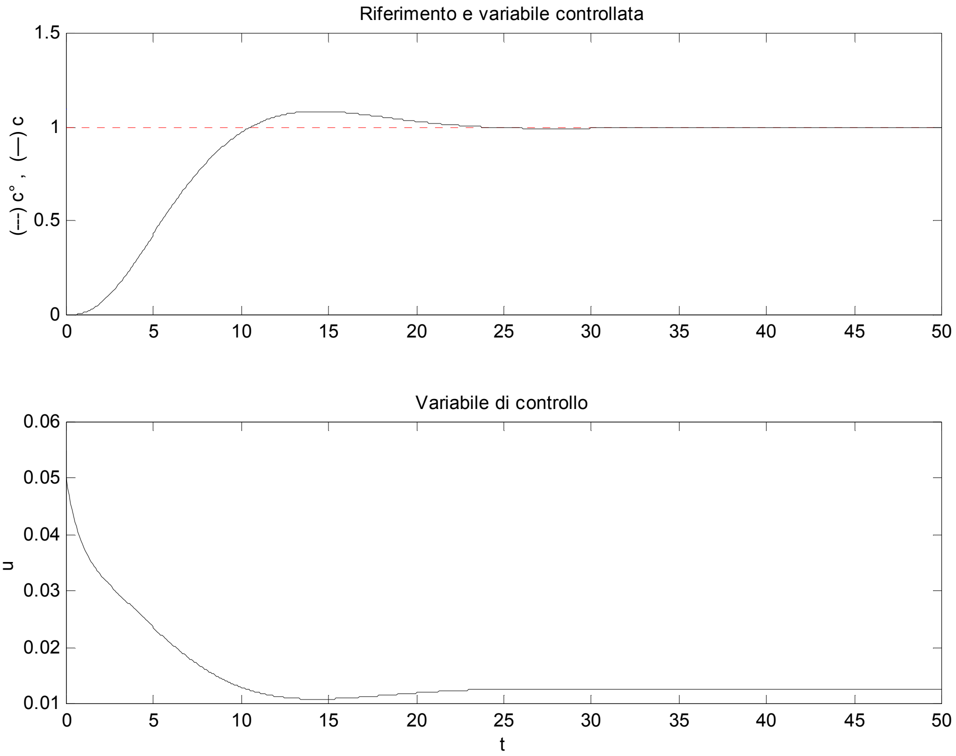


Nel caso di Ziegler e Nichols, il modulo, in *dB*, della risposta in frequenza d'anello è molto maggiore di 0 su una banda 3 volte più ampia di quella richiesta dalle specifiche, il guadagno del controllore è di un ordine di grandezza più elevato del minimo necessario a soddisfare le specifiche; il margine di fase è decisamente scarso. Questo produce transitori di forma scadente e di durata non inferiore (nonostante l'aumento di ω_c): l'errore presenta una forte sovraelongazione in risposta al riferimento, l'errore massimo prodotto dal disturbo è diminuito, ma la sollecitazione impressa all'azione di controllo è più che raddoppiata.

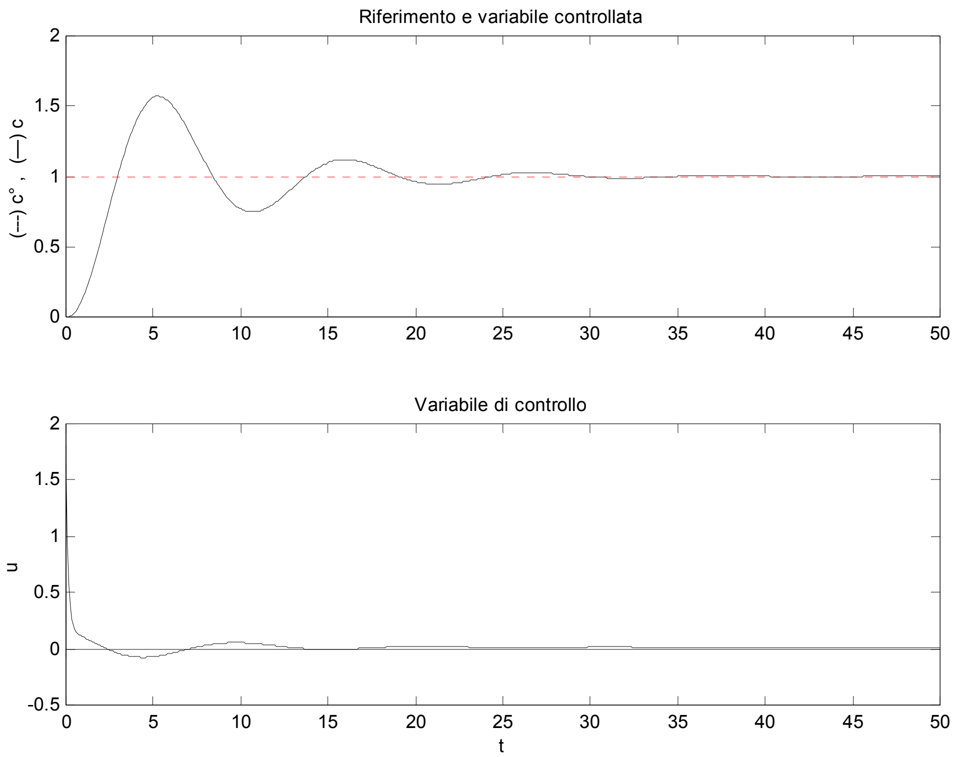
Nel complesso, la taratura di Ziegler e Nichols non fornisce un compromesso equilibrato fra le varie esigenze espresse dalle specifiche; particolarmente negativi sono il carattere oscillatorio (a basso smorzamento) e la notevole sovrelongazione delle risposte alle diverse perturbazioni nonché l'elevata intensità dell'azione di controllo (si vedano anche le successive risposte a una variazione a scalino del riferimento). Non va dimenticato, però, che questa taratura può essere ottenuta eseguendo una semplice ricetta, senza conoscere a priori alcun modello del sistema sotto controllo (e anche senza avere alcuna nozione seria di teoria del controllo!).

Simulazioni

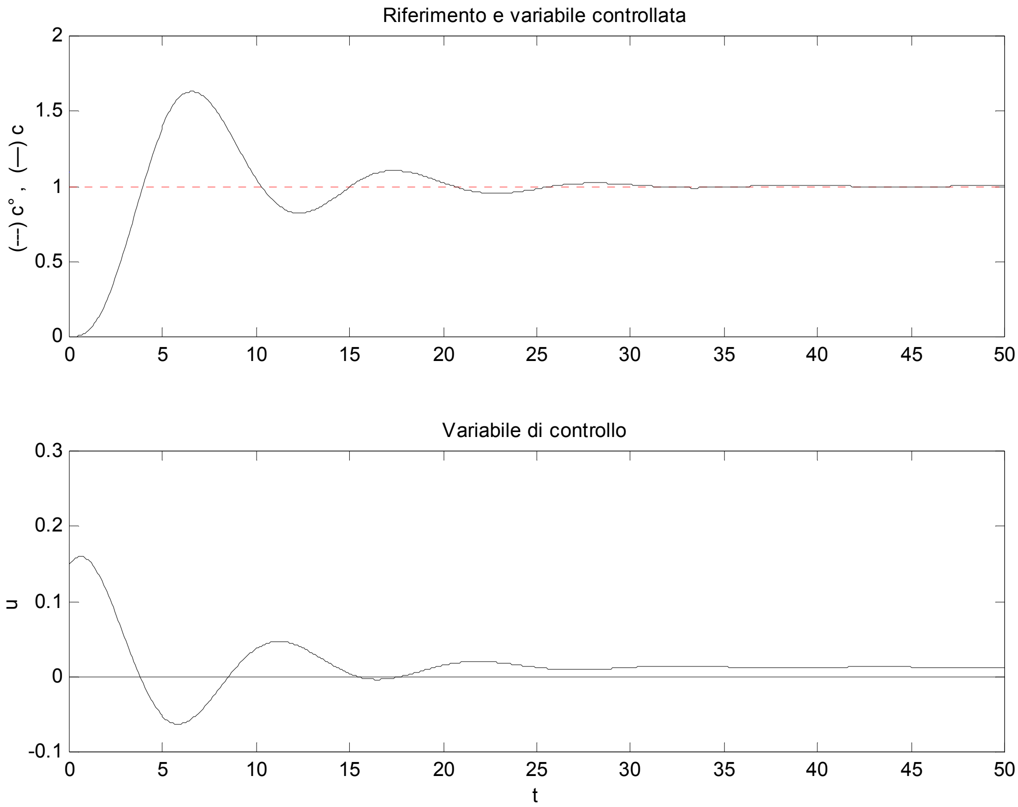
Controllore $R(s)$: risposta a scalino di $c°$



Controllore $R_{ZN}(s)$: risposta a scalino di $c°$

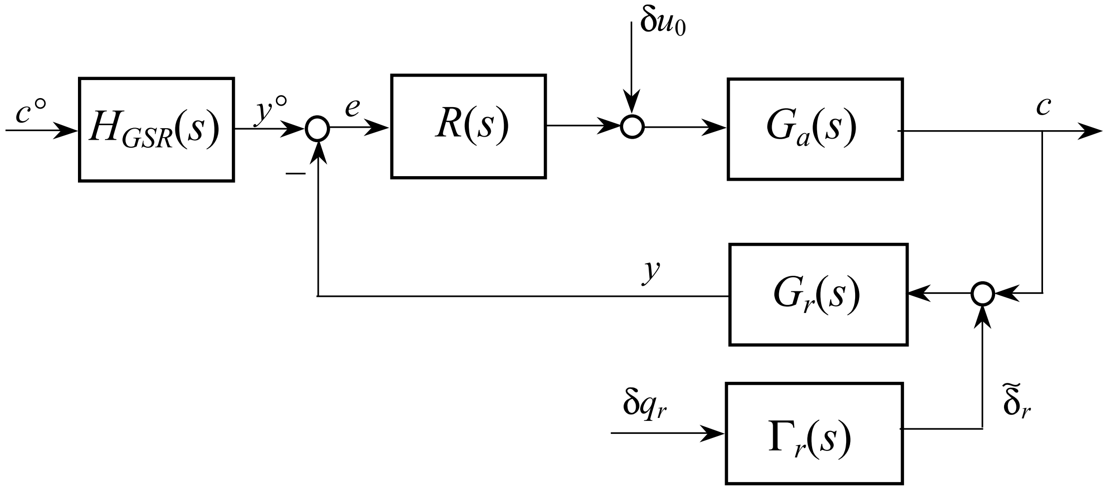


Controllore *PID* con taratura di Ziegler e Nichols, ma con il riferimento escluso dall'azione derivativa (assetto "a derivazione dell'uscita"): risposta a scalino di $c°$



Come si può notare, la qualità della risposta (durata del transitorio e sovraelongazione) è cambiata poco. Si è invece sensibilmente ridotta l'intensità dell'azione di controllo (che però è ancora circa tre volte più grande di quella richiesta dal controllore $R(s)$).

***Esercizio* 24**. Con riferimento al sistema in figura



sia ancora:

$H_{GSR}(s) = G_r(s) = 0.1$

$\Gamma_r(s) = 10 \qquad , \qquad G_a(s) = \dfrac{80}{(1 + 10\, s)(1 + 2\, s)^2}$

***Problema*:**

Indicando con $E_r(s)$ la trasformata del contributo all'errore effettivo ε dovuto a δq_r, determinare una $R(s)$ causale tale che:

$\varphi_m \geq 55°$

$\omega_c \geq 0.05 \quad [rad/udt]$

$|E_r(j\omega)| \leq 0.1\ |\Delta Q_r(j\omega)| \qquad , \qquad \forall\ \omega \geq 1.5 \ \ [rad/udt]$

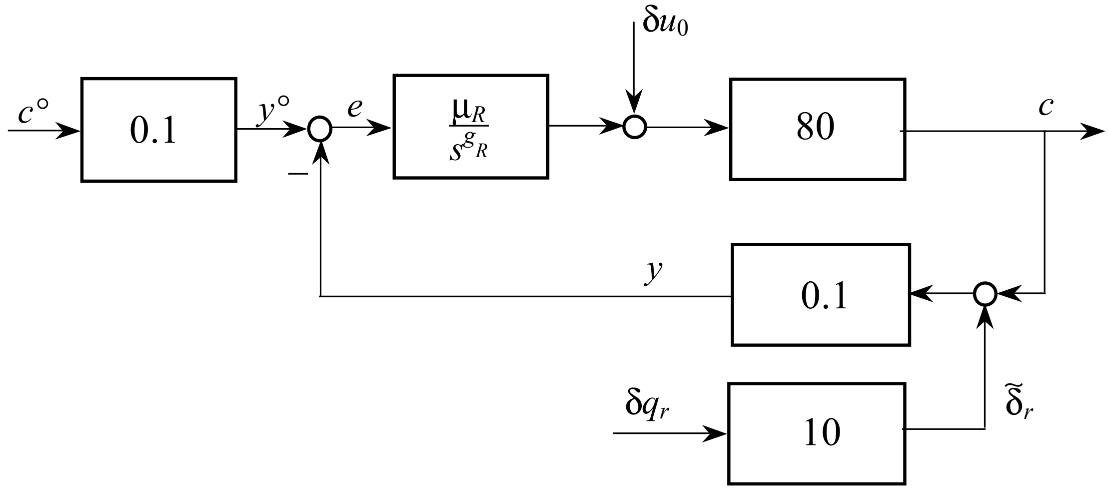
$|\varepsilon_\infty| \leq 0.8$ se : $c°(t) = A° sca(t) \quad , \qquad |A°| \leq 30$

$|\delta u_0| \leq 0.4$

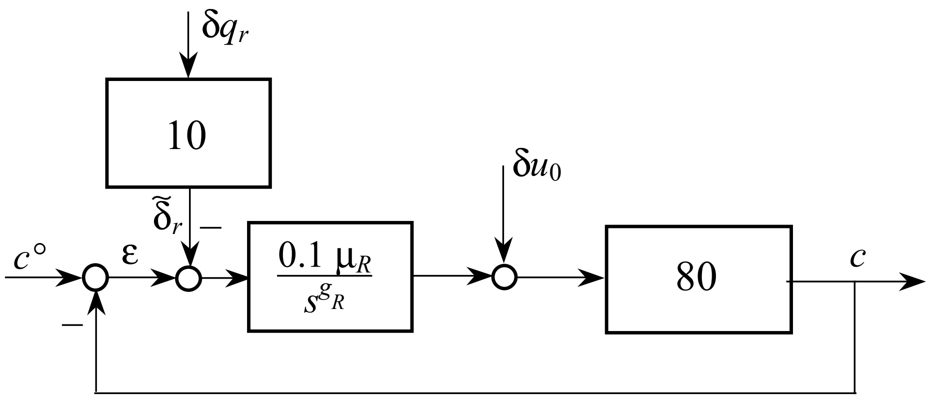
$\delta q_r(t) = A_r\, sca(t) \quad , \qquad |A_r| \leq 0.05$

Progetto statico

Dopo aver tolto le costanti di tempo



ovvero



Nel calcolo di ε_∞ possiamo considerare la costante δu_0 come uno scalino di ampiezza δu_0. Allora,

$$\mathrm{E}(s) = \frac{1}{1+\bar{L}(s)}\, C^\circ(s) - \frac{80}{1+\bar{L}(s)}\, \frac{\delta u_0}{s} + \frac{10\, \bar{L}(s)}{1+\bar{L}(s)}\, \Delta Q_r(s)$$

dove: $\bar{L}(s) := \dfrac{8\,\mu_R}{s^{g_R}}$. Quindi, se $c^\circ(t) = A^\circ sca(t)$ e $\delta q_r(t) = A_r\, sca(t)$,

$$\mathrm{E}(s) = \frac{s^{g_R}}{s^{g_R} + 8\,\mu_R}\, \frac{A^\circ}{s} - \frac{80\, s^{g_R}}{s^{g_R} + 8\,\mu_R}\, \frac{\delta u_0}{s} + \frac{80\,\mu_R}{s^{g_R} + 8\,\mu_R}\, \frac{A_r}{s}\, .$$

$$\varepsilon_\infty = \lim_{s\to 0} s\,\mathrm{E}(s) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+8\,\mu_R}\,(A^\circ - 80\,\delta u_0 + 80\,\mu_r\,A_r) & , \quad \text{se } g_R = 0 \\[2ex] 10\,A_r & , \quad \text{se } g_R > 0 \end{cases}$$

Il valore minimo di g_R che può consentire di soddisfare le specifica relativa alla precisione statica è $g_R = 0$. Poiché: $|A^\circ| \le 30$, $|\delta u_0| \le 0.4$, $|A_r| \le 0.05$ e $\mu_R > 0$ (sotto le ipotesi di Bode $\mu > 0$ è una condizione necessaria, e $\mu = 8\,\mu_R$), se si pone $\boxed{g_R = 0}$, si ha:

$$|\varepsilon_\infty| = \frac{1}{1+8\,\mu_R}\,|\,A^\circ - 80\,\delta u_0 + 80\,\mu_r\,A_r| \le \frac{1}{1+8\,\mu_R}\,(|A^\circ| + 80\,|\delta u_0| + 80\,\mu_r\,|A_r|)\ .$$

Quindi,

$$|\varepsilon_\infty| \le \frac{1}{1+8\,\mu_R}\,(|A^\circ|_{max} + 80\,|\delta u_0|_{max} + 80\,\mu_r\,|A_r|_{max})\ .$$

Allora la condizione $|\varepsilon_\infty| \le 0.8$ è verificata se:

$$\frac{1}{1+8\,\mu_R}\,(30 + 80 \times 0.4 + 80\,\mu_r\,0.05) \le 0.8$$

cioè se:

$$30 + 32 + 4\,\mu_R \le 0.8\,(1 + 8\,\mu_R) \qquad \Leftrightarrow \qquad \mu_R \ge \frac{62 - 0.8}{8 \times 0.8 - 4} = 25.50\ .$$

Con (non molta) prudenza, poniamo: $\boxed{\mu_R = 30}$.

Osservazione. Poichè nei sistemi di controllo di tipo zero il guadagno della funzione di trasferimento d'anello ($\mu = 8\ \mu_R$) dev'essere maggiore di 10 per assicurare un minimo di precisione statica a fronte di variazioni del riferimento o a disturbi sulla linea d'andata, si poteva notare che comunque:

$$\frac{80\,\mu_R}{1+8\,\mu_R}\,0.05 \cong 10 \times 0.05 = 0.5 \qquad \text{e} \qquad 1 + 8\,\mu_R \cong 8\,\mu_R$$

e imporre:

$$\frac{1}{8\,\mu_R}\,30 + \frac{80}{8\,\mu_R}\,0.4 + 0.5 \le 0.8 \qquad \Leftrightarrow \qquad \mu_R \ge \frac{62}{8 \times 0.3} = 25.83\ .$$

Progetto dinamico

Il primo passo da compiere è ricondurre la specifica:

$|E_r(j\omega)| \leq 0.1\ |\Delta Q_r(j\omega)| \quad , \quad \forall\ \omega \geq 1.5\ \ [rad/udt]$

ad un'equivalente condizione su $|L(j\omega)|$. Per questo, ricordiamo che

$$|E_r(j\omega)| = \frac{|L(j\omega)|}{1 + |L(j\omega)|}\ |\tilde{\Delta}_r(j\omega)| \quad , \quad |\tilde{\Delta}_r(j\omega)| = |\Gamma_r(j\omega)|\ |\Delta Q_r(j\omega)| = 10\ |\Delta Q_r(j\omega)|\ .$$

Dunque, la condizione $|E_r(j\omega)| \leq 0.1\ |\Delta Q_r(j\omega)|$ è equivalente a:

$$10\,\frac{|L(j\omega)|}{1 + |L(j\omega)|} \leq 0.1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{|L(j\omega)|}{1 + |L(j\omega)|} \leq 0.01 \quad ;$$

ma ciò è possibile solo per $\omega \geq \omega_c$, infatti ricordiamo che

$$\frac{|L(j\omega)|}{1 + |L(j\omega)|} \cong \begin{cases} 1 & , \quad \omega \leq \omega_c \\ |L(j\omega)| & , \quad \omega \geq \omega_c \end{cases} .$$

In conclusione, la condizione $|E_r(j\omega)| \leq 0.1\ |\Delta Q_r(j\omega|$, $\forall\ \omega \geq 1.5$, è equivalente a:

$$|L(j\omega)| \leq 0.01 \qquad \Leftrightarrow \qquad |L(j\omega)|_{dB} \leq -40 \quad , \quad \forall\ \omega \geq 1.5\ \ [rad/udt] \ .$$

Tenuto conto dei risultati del progetto statico, a questo punto si ha:

$$L_1(s) = \frac{30 \times 80 \times 0.1}{(1 + 10\,s)(1 + 2\,s)^2} = \frac{240}{(1 + 10\,s)(1 + 2\,s)^2}\ .$$

La corrispondente risposta in frequenza d'anello viola sia la specifica sul margine di fase che quella su $|E_r(j\omega)|$. Una correzione plausibile è mostrata in figura (linea rossa) e corrisponde alla funzione di trasferimento d'anello

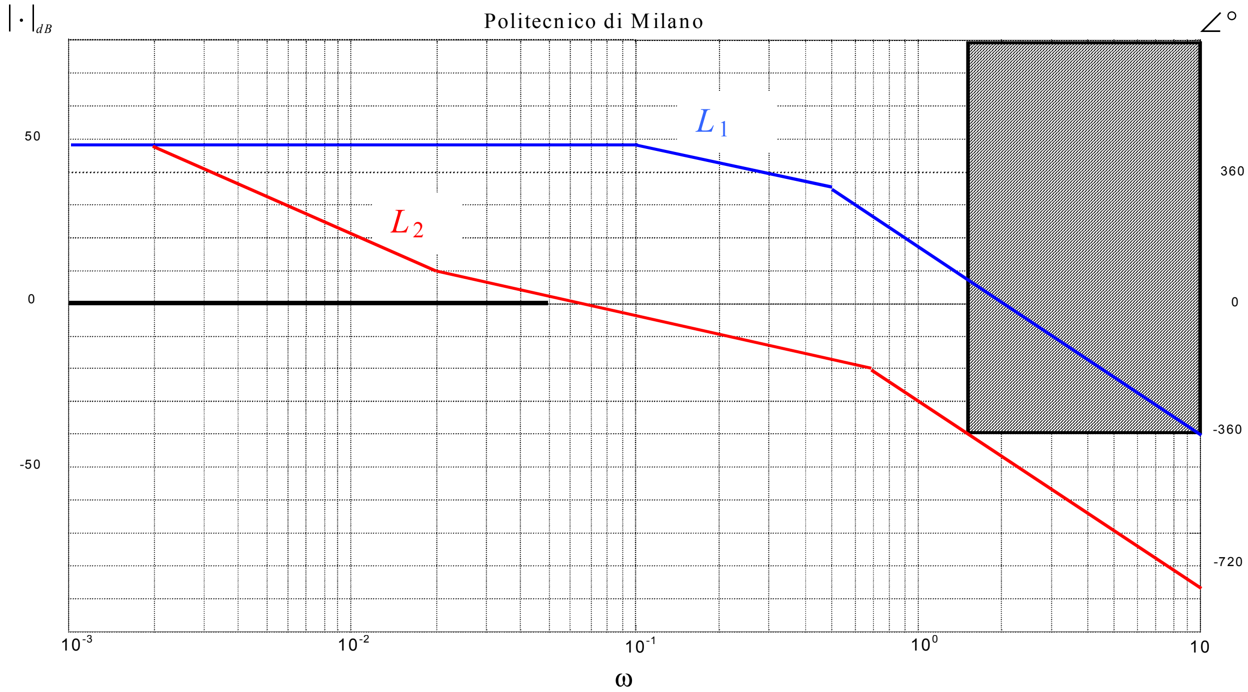
$$L_2(s) = 240\,\frac{1 + 50\,s}{(1 + 500\,s)^2(1 + 1.4\,s)^2}$$

che palesemente rispetta la specifica su ω_c e quella su $|E_r(j\omega)|$. Per quanto riguarda il margine di fase, si ha:

$$\varphi_m = 180° - |-2 \times 88 + 75 - 2 \times 8| = 62° > 55° \ .$$

Per passare da $L_1(s)$ a $L_2(s)$ occorre introdurre le seguenti costanti di tempo:

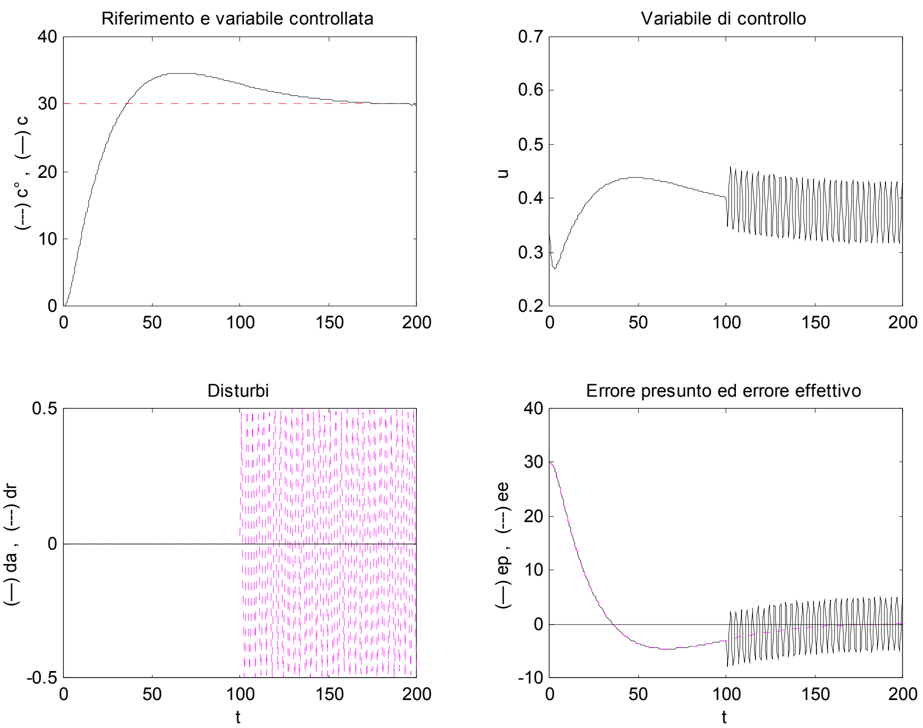
$$\frac{(1 + 50\,s)(1 + 10\,s)(1 + 2\,s)^2}{(1 + 500\,s)^2(1 + 1.4\,s)^2} \quad .$$



In definitiva, la funzione di trasferimento del controllore così progettato è:

$$R(s) = \frac{L_2(s)}{G_a(s)\,G_r(s)} = 30\,\frac{(1 + 50\,s)(1 + 10\,s)(1 + 2\,s)^2}{(1 + 500\,s)^2(1 + 1.4\,s)^2} \quad .$$

Simulazione: $\quad c°(t) = 30\, sca(t), \quad q_r(t) = 0.5\, sin(2\, t)\, sca(t - 100).$



Si noti come la sinusoide "in alta frequenza" sulla linea di retroazione sia stata filtrata: la variabile controllata c e quindi l'errore effettivo (linea tratteggiata rossa) non ne risentono. Poiché il controllore è un sistema dinamico in senso improprio, il disturbo sinusoidale in retroazione si ripercuote non solo sull'andamento dell'errore presunto (proporzionale all'errore apparente) ma anche sulla variabile di controllo, con il rischio, alla lunga, di danneggiare l'attuatore. Se la pulsazione del disturbo è costante e nota, un rimedio potrebbe consistere nell'inserire nel controllore un "filtro a spillo" con pulsazione d'interdizione uguale alla pulsazione del disturbo sinusoidale, cioè 2 [*rad*/*udt*]:

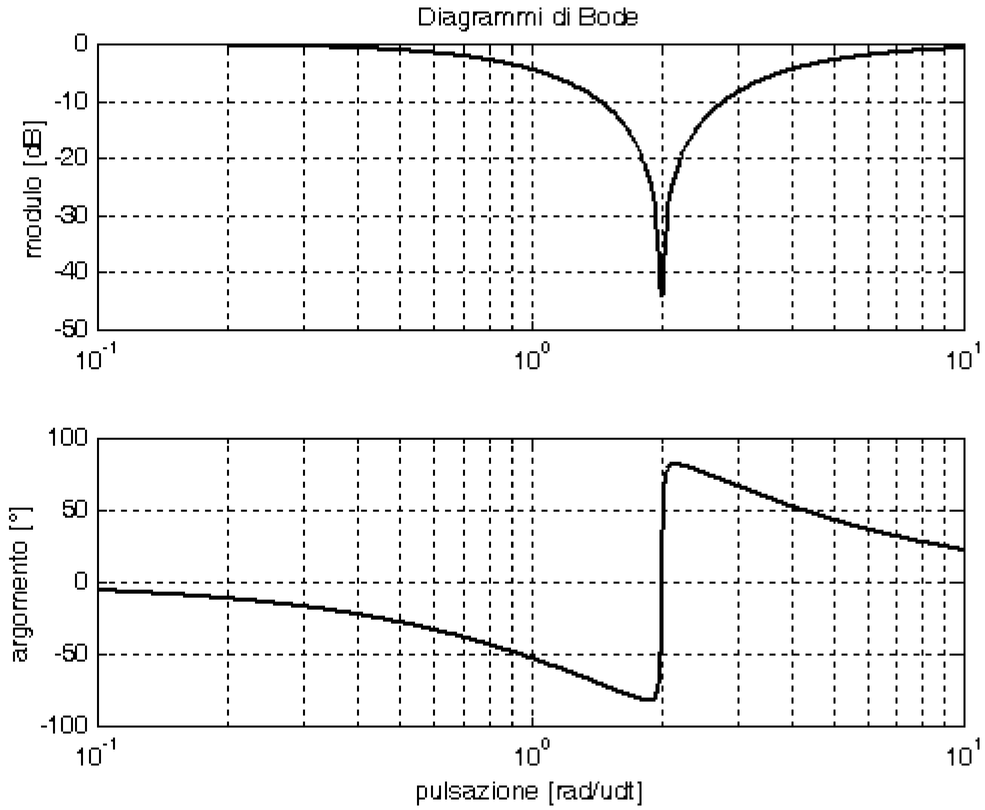
$$\frac{1 + 0.05\, s + 0.25\, s^2}{1 + s + 0.25\, s^2}$$

che altera in modo insignificante la banda passante e il margine di fase (la pulsazione naturale $\omega_n = 2$ è molto maggiore della pulsazione critica), ma attenua sensibilmente l'ampiezza della "vibrazione" presente sulla variabile di controllo.

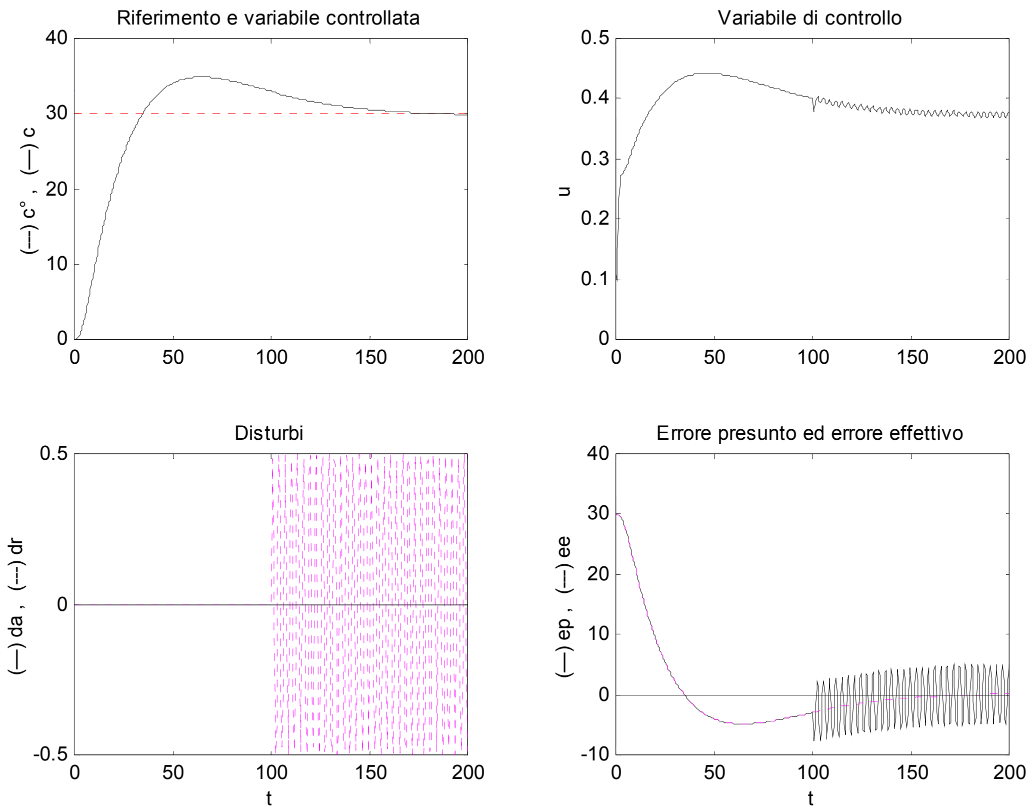
Le figure che seguono mostrano la risposta in frequenza (modulo) del "filtro a spillo" e il risultato di una simulazione.

Si noti infine come la formula $t_a = 5 \div 10/\omega_c = 80 \div 167$ [*udt*] consenta di prevedere con buona accuratezza la durata del transitorio.

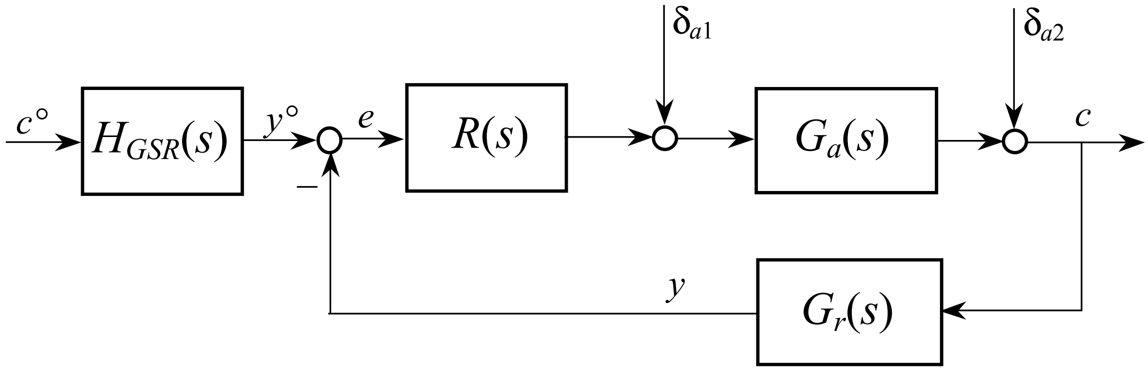
Filtro a spillo



Simulazione. $c°(t) = 30\ sca(t),\quad q_r(t) = 0.5\ sin(2\ t)\ sca(t-100)$



***Esercizio* 25.** Con riferimento al sistema in figura



sia:

$$G_a(s;\tau) = \frac{10\, e^{-\tau s}}{s} \qquad , \qquad G_r(s) = \frac{0.02}{1 + 0.8\, s}$$

$$H_{GSR}(s) = 0.02$$

***Problema*:**

***a*)** Indicando con $E_{a2}(s)$ il contributo all'errore effettivo dovuto a δ_{a2}, determinare una $R(s)$ causale tale che, con $\tau = 0$, risulti:

$\varphi_m \geq 55°$

$0.1 \leq \omega_c \leq 1 \quad [rad/udt]$

$|E_{a2}(j\omega)| \leq 0.025\, |\Delta_{a2}(j\omega)| \qquad , \qquad \forall\, \omega \in [0.005, 0.05] \ \ [rad/udt]$

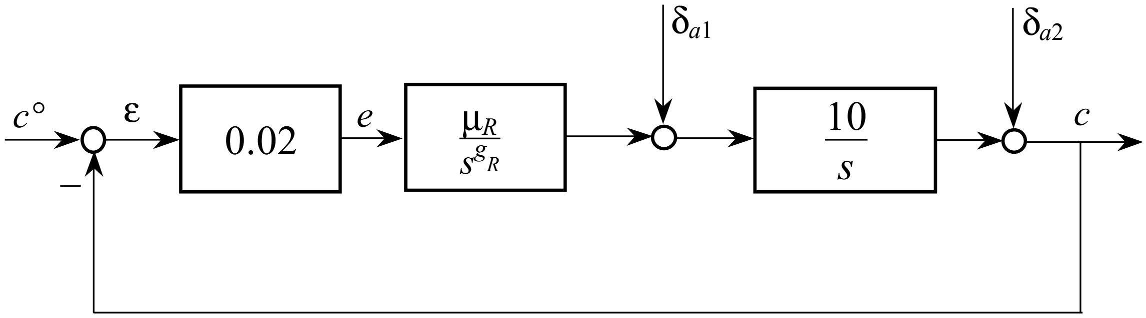
$|\varepsilon_\infty| \leq 1.25$ se : $c°(t) = A° sca(t)$, $|A°| \leq 30$

$\delta_{a1}(t) = A_1\, sca(t)$, $|A_1| \leq 0.05$

***b*)** Valutare come si modificano le prestazioni del sistema di controllo per la presenza di un ritardo $\tau = 0.2$ [*udt*].

Progetto statico

Considerando solo le componenti asintotiche delle varie funzioni di trasferimento (conseguenti all'eliminazione delle costanti di tempo e del ritardo), lo schema a blocchi del sistema di controllo può essere equivalentemente ridotto al seguente.



Allora, la trasformata di Laplace dell'effetto su ε di $c°(t) = A° sca(t)$ e del disturbo $\delta_{a1}(t) = A_1\, sca(t)$ è dato da:

$$E(s) = \frac{1}{1+\frac{0.2\,\mu_R}{s^{(g_R+1)}}}\left[\frac{A°}{s} - \frac{10\,A_1}{s^2}\right].$$

$$\varepsilon_\infty = \lim_{s\to 0} s\,E(s) = \begin{cases} \dfrac{-10\,A_1}{0.2\,\mu_R} & ,\quad \text{se } g_R = 0 \\[2ex] 0 & ,\quad \text{se } g_R > 0\ . \end{cases}$$

Poniamo: $\boxed{g_R = 0}$. Allora, poiché $|A°| \le 30$, $|A_1| \le 0.05$ e $\mu_R > 0$, la condizione $|\varepsilon_\infty| \le 1.25$ diventa:

$$\frac{50\,|A_1|_{max}}{\mu_R} = \frac{2.5}{\mu_R} \le 1.25 \qquad \Leftrightarrow \qquad \mu_R \ge \frac{2.5}{1.25} = 2$$

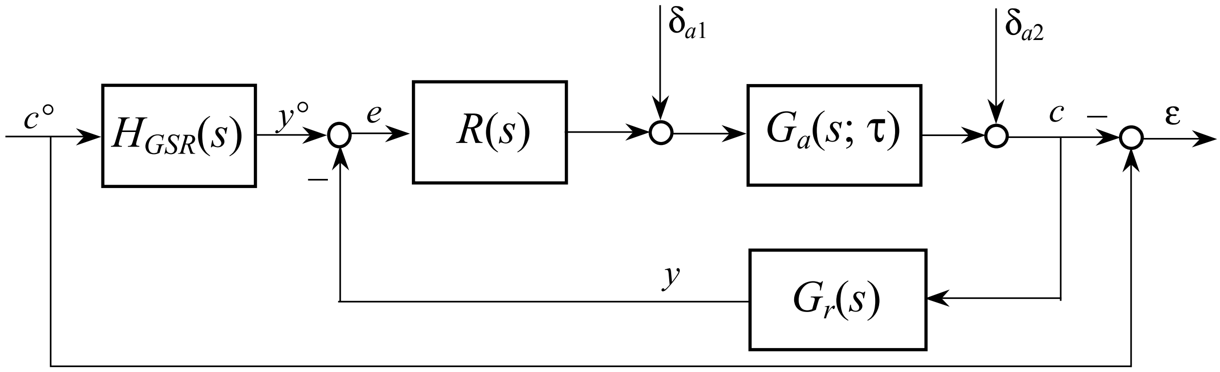
Per prudenza, poniamo: $\boxed{\mu_R = 3}$.

Progetto dinamico

Anche qui, vediamo innanzitutto come si possa ricondurre la specifica:

$$|E_{a2}(j\omega)| \le 0.025\,|\Delta_{a2}(j\omega)| \qquad , \qquad \forall\ \omega \in [0.005, 0.05]\ \ [rad/udt]$$

ad un'equivalente condizione su $|L(j\omega)|$. Ricordando che $\varepsilon := c° - c$ e facendo riferimento al seguente schema a blocchi,



si riconosce facilmente che la funzione di trasferimento da δ_{a2} a ε è data da:

$$F_{a2}(s) = \frac{-1}{1+L(s)} = -S(s) \qquad , \qquad L(s) := R(s)\, G_a(s)\, G_r(s)\ .$$

Inoltre, la banda [0.005, 0.05] è sicuramente compresa nella banda passante ($\omega_c \geq 0.1$) e sappiamo che, sulla banda passante ($|L(j\omega)| >> 1$), $|S(j\omega)| \cong 1/|L(j\omega)|$. Allora la condizione

$$|F_{a2}(j\omega)| \leq 0.025 \qquad , \qquad \forall\, \omega \in [0.005,\ 0.05]\ \ [rad/udt]$$

è (con buona approssimazione) equivalente a:

$$|L(j\omega)| \geq \frac{1}{0.025} = 40 \quad \Leftrightarrow \quad |L(j\omega)|_{dB} \geq 32 \qquad , \qquad \forall\, \omega \in [0.005,\ 0.05]\ \ [rad/udt]\ .$$

Tenendo conto del progetto statico, a questo punto si ha:

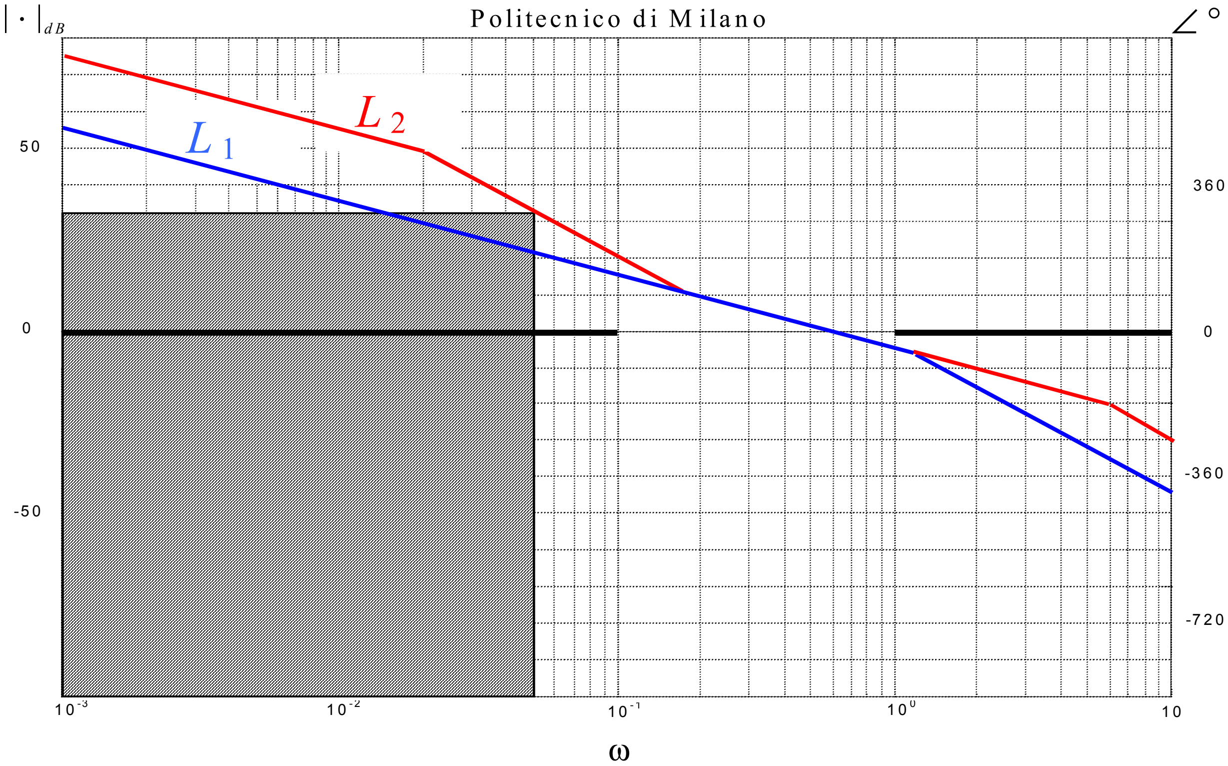
$$L_1(s;\,\tau) = \frac{0.6\, e^{-\tau s}}{s\,(1+0.8\,s)}$$

Il modulo della risposta in frequenza d'anello corrispondente a $\tau = 0$ ha l'andamento mostrato nella figura che segue. In particolare, si ha:

$$\omega_c = 0.6\ \ [rad/udt] \qquad , \qquad \varphi_m = 180° - |-90° - 28°| = 62°\ .$$

Ma il diagramma invade la zona interdetta. Occorre, quindi modificare l'andamento in bassa frequenza; ad esempio, come indicato in figura (linea rossa). In questo modo, la banda passante resta invariata, ma il margine di fase diventa:

$$\varphi_m = 180° - |-90° - 88° + 71° - 28°| = 45°\ .$$



Per aumentare il margine di fase, possiamo ampliare la zona in cui il diagramma ha pendenza –1 attorno alla pulsazione critica. Ciò comporta una modifica del diagramma anche in alta frequenza (linea rossa). In questo modo si ha:

$$L_2(s;\,0) = 6\,\frac{(1 + 5.882\,s)}{s\,(1 + 50\,s)(1 + 0.167\,s)}$$

$$\varphi_m = 180° - |-90° - 88° + 71° - 6°| = 67°$$

$$R(s) = \frac{L_2(s;\,0)}{G_a(s;\,0)\;G_r(s)} = 30\,\frac{(1 + 5.882\,s)(1 + 0.8\,s)}{(1 + 50\,s)(1 + 0.167\,s)} \quad .$$

b) Un ritardo di 0.2 [*udt*] produce una riduzione del margine di fase pari a:

$$\delta\varphi_m = -\,\tau\,\omega_c\,\frac{180}{\pi} = -\,\frac{0.2 \times 0.6 \times 180}{\pi} = -\,6.88 \qquad \rightarrow \qquad \varphi_m = 60°$$

mentre la pulsazione critica (la banda passante) e la precisione statica rimangono invariate.