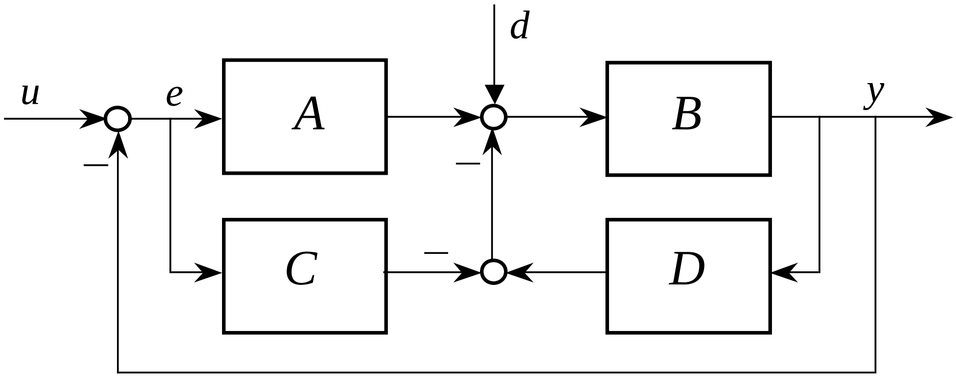
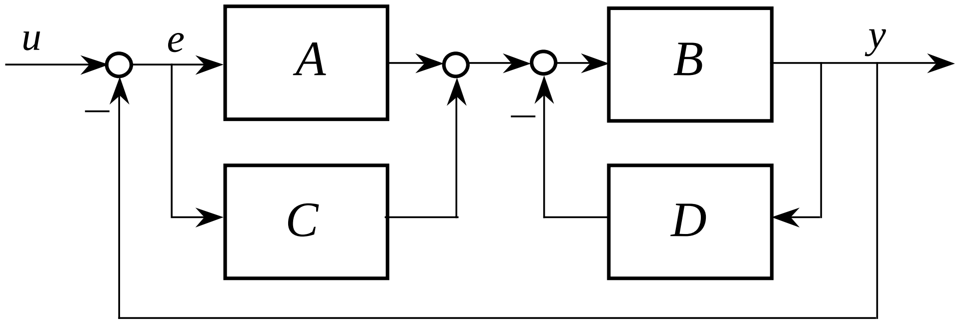
Fondamenti di automatica

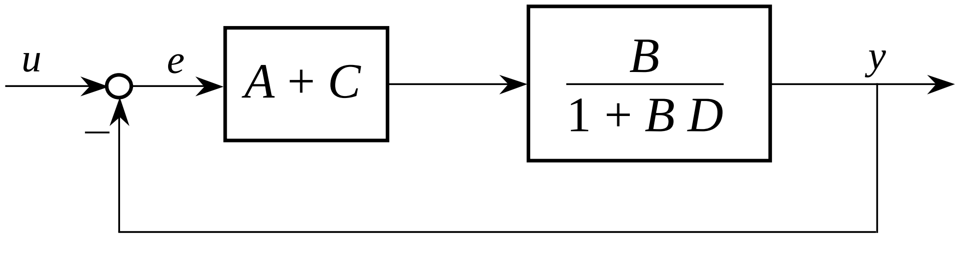
Esercizio 21

Calcolare le funzioni di trasferimento da u a y e da d a e nel seguente schema a blocchi.



Calcoliamo innanzitutto la funzione di trasferimento F_1 da u a y:





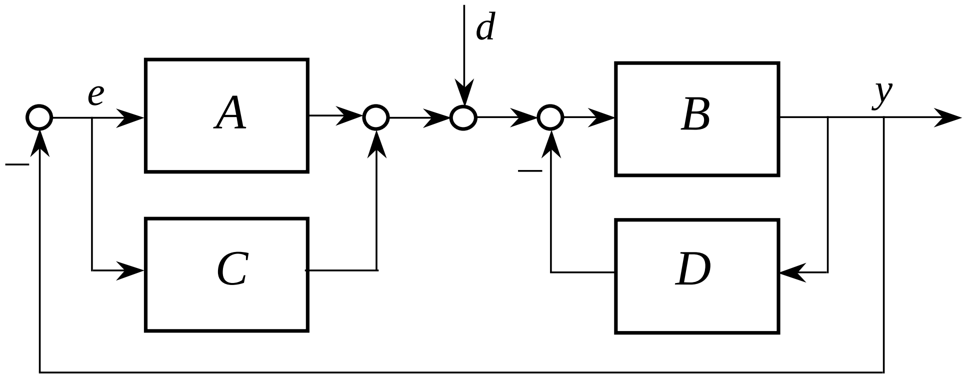
Se si pone:

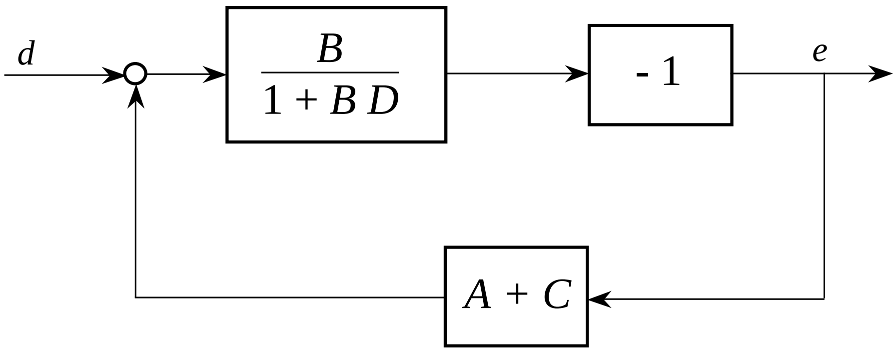
$$L := \frac{(A+C)\,B}{1 + B\,D}$$

è immediato ottenere:

$$F_1 = \frac{L}{1+L} = \frac{(A+C)\,B}{1 + B\,D + (A+C)\,B}$$

Per quanto riguarda la funzione di trasferimento F_2 da d a e, si può invece procedere nel modo seguente





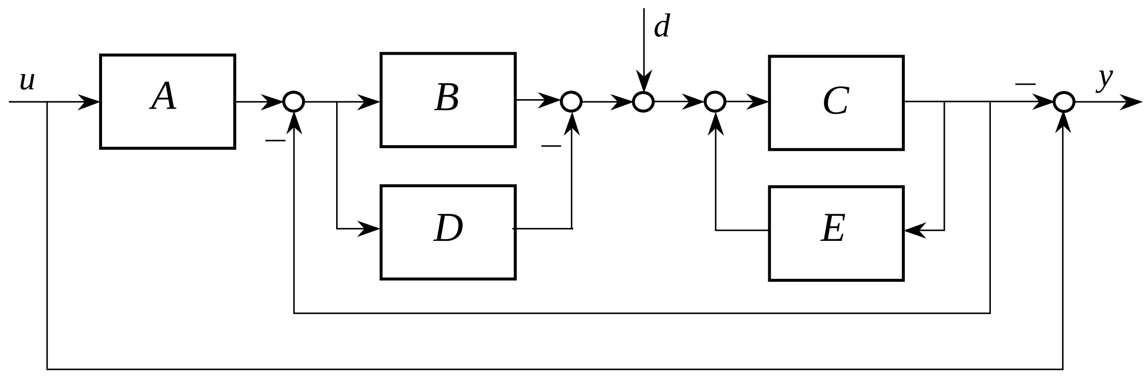
Se si pone:

$$G := \frac{B}{1 + B\,D} \quad , \quad H := A+C \quad , \quad L := -\,G\,H = -\,\frac{(A+C)\,B}{1 + B\,D}$$

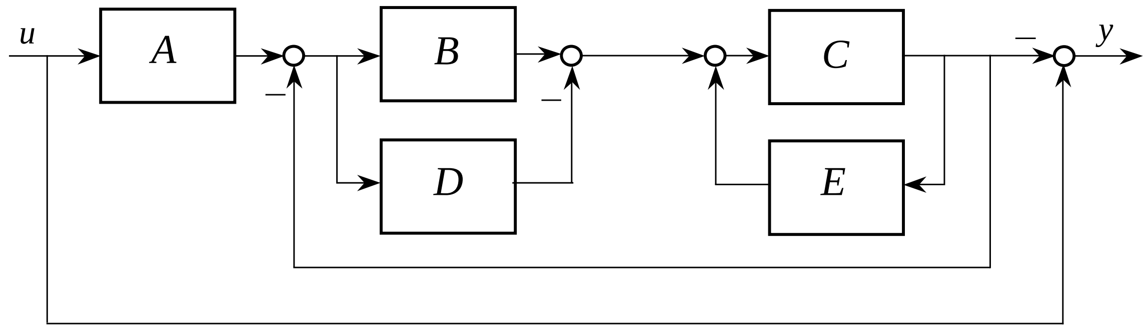
è immediato ottenere: $F_2 = \dfrac{-\,G}{1 - L} = \dfrac{-\,B}{1 + B\,D + (A+C)\,B}$.

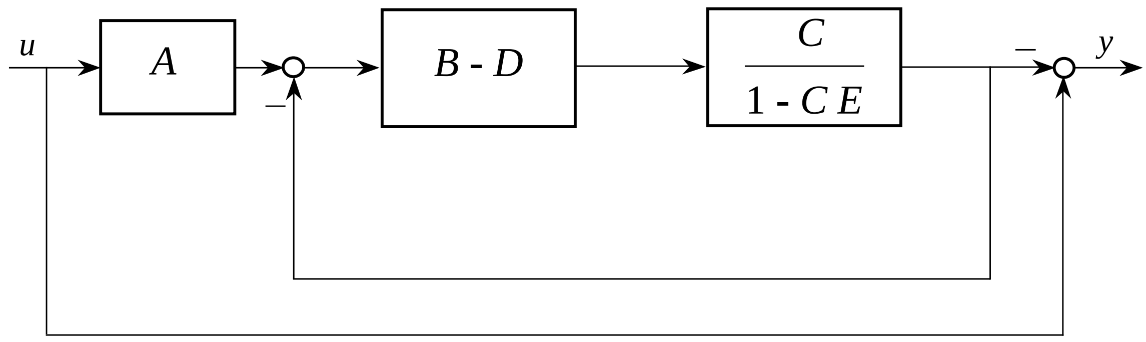
Esercizio **22**

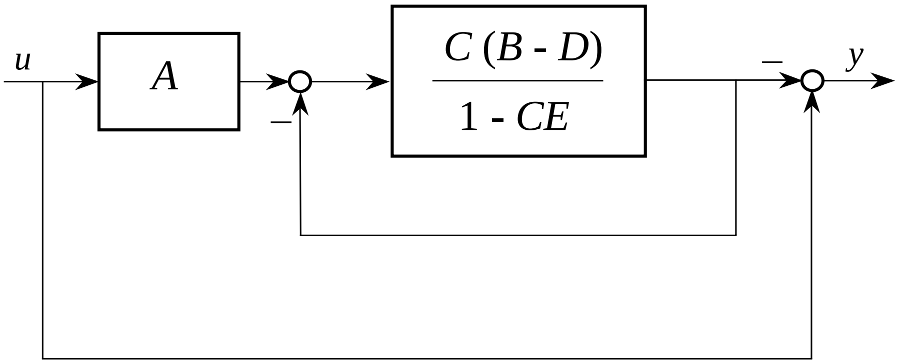
Calcolare le funzioni di trasferimento da *u* a *y* e da *d* a *y* nel seguente schema a blocchi.

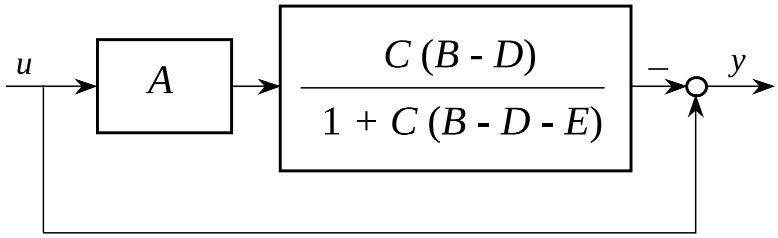


Calcoliamo innanzitutto la funzione di trasferimento F_1 da *u* a *y*:





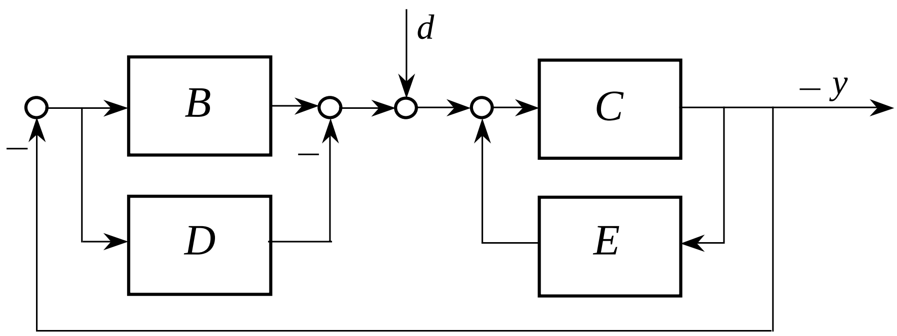


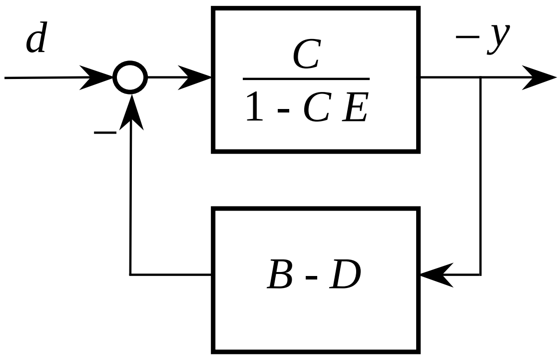


A questo punto è immediato riconoscere che

$$F_1 = 1 - \frac{A\,C\,(B - D)}{1 + C\,(B - D - E)} = \frac{1 + C\,(B - D - E) - A\,C\,(B - D)}{1 + C\,(B - D - E)} \quad .$$

Per quanto riguarda la funzione di trasferimento F_2 da d a y, si può invece procedere nel modo seguente.





A questo punto è immediato riconoscere che $F_2 = \dfrac{-C}{1 + C\,(B - D - E)}$.

Esercizio **23**

Tracciare i diagrammi di Bode asintotici (e "stimare" quelli esatti) della risposta in frequenza associata alle seguenti funzioni di trasferimento.

1) $F(s) = \dfrac{10\,s}{(1 + 0.5\,s)^2}$

2) $F(s) = \dfrac{100\,(1 + 0.5\,s)^2}{(1 + 0.04\,s)\,(1 + 0.2\,s)^2\,(1 + 2\,s)^2}$

3) $F(s) = \dfrac{100\,(1 - 0.5\,s)^2}{(1 + 0.04\,s)\,(1 + 0.2\,s)^2\,(1 + 2\,s)^2}$

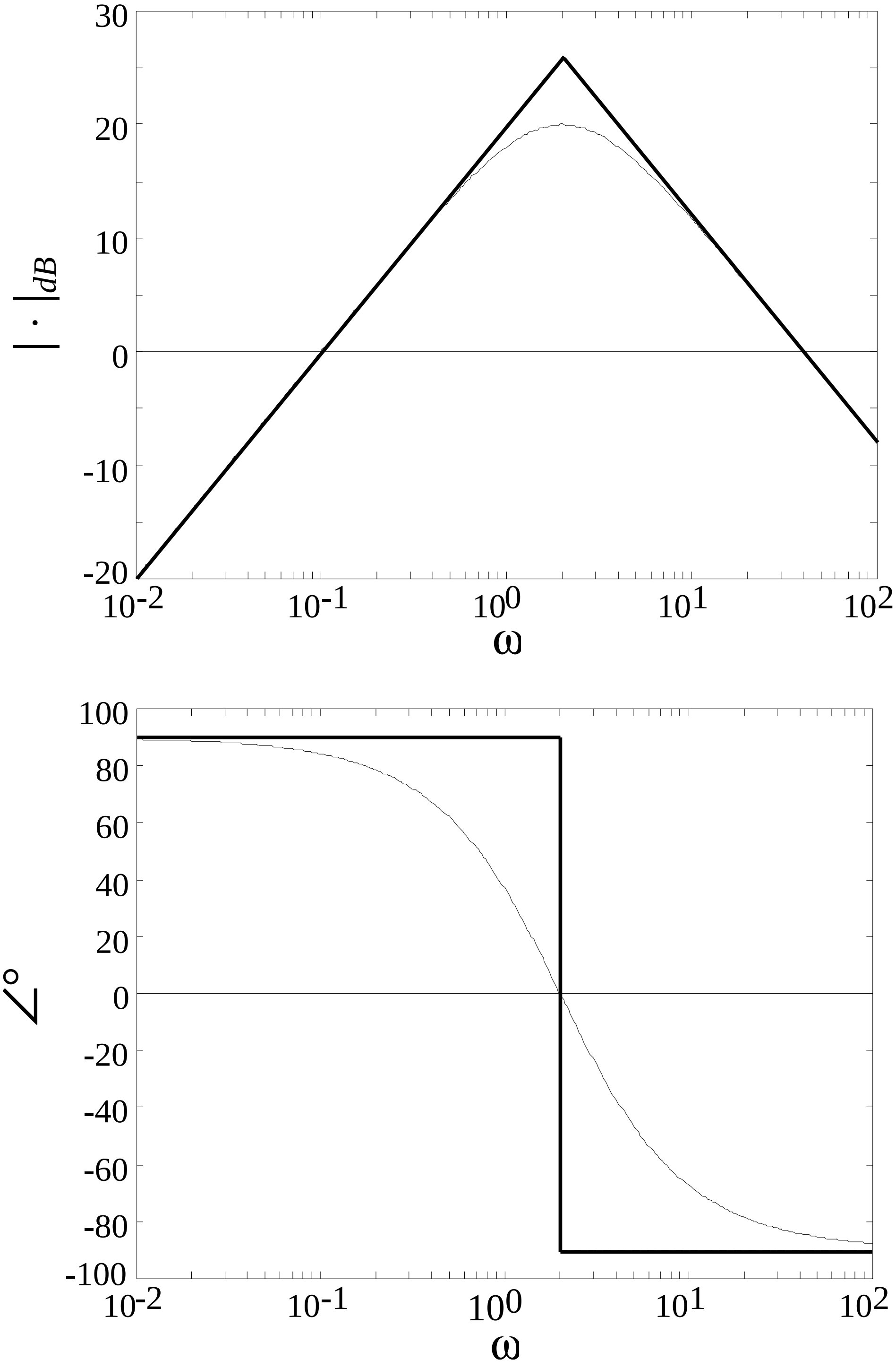
4) $F(s) = \dfrac{1333\,(s + 3)}{s\,(s^2 + 20\,s + 400)} = \dfrac{10}{s}\,\dfrac{1 + 0.3333\,s}{1 + \dfrac{s}{20} + \dfrac{s^2}{400}}$

---

1) $F(s) = \dfrac{10\,s}{(1 + 0.5\,s)^2}$

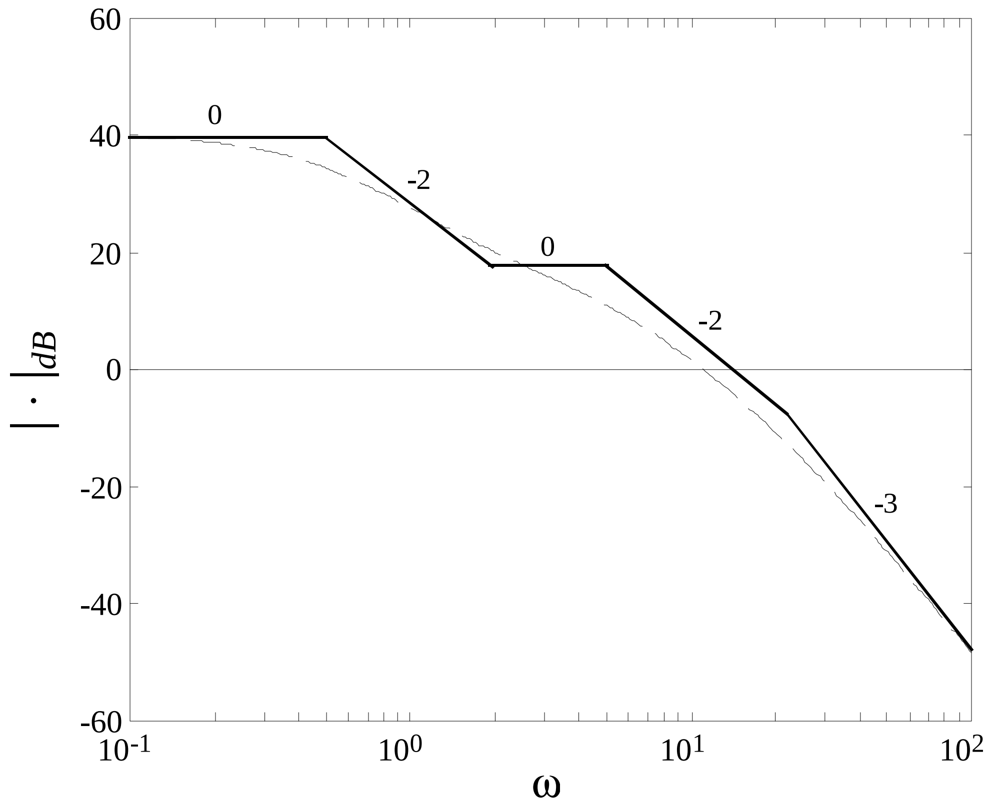
$\mu = 10$, $g = -1$, $T = 0.5$, $\Omega = 2$.

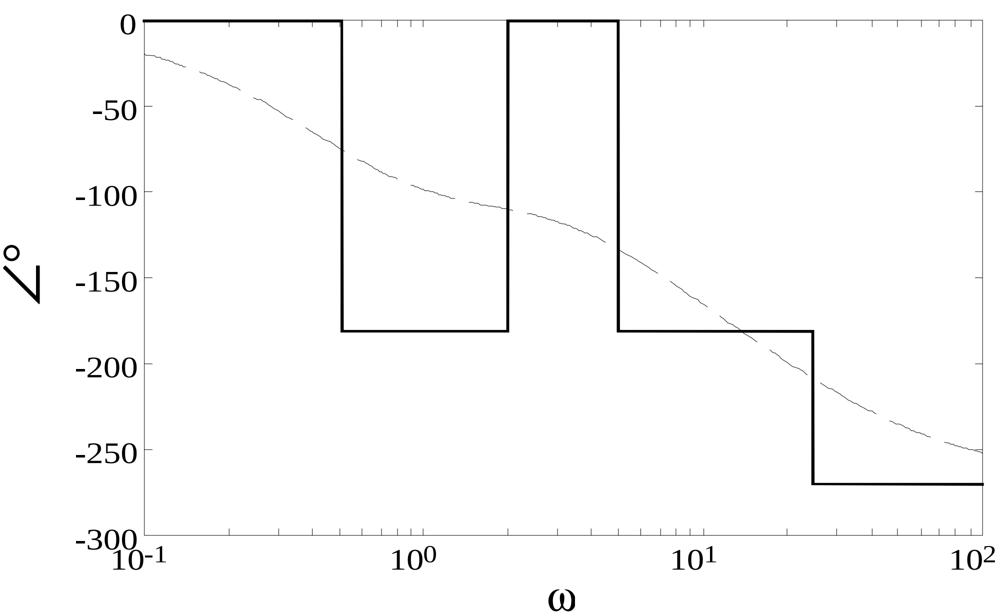
I corrispondenti diagrammi di Bode asintotici (in grassetto) ed esatti sono mostrati nella figura che segue.


30
20
10
0
-10
-20
$|\cdot|_{dB}$
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
ω
100
80
60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
∠°
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
ω

2) $$F(s) = \frac{100\,(1 + 0.5\,s)^2}{(1 + 0.04\,s)\,(1 + 0.2\,s)^2\,(1 + 2\,s)^2}$$

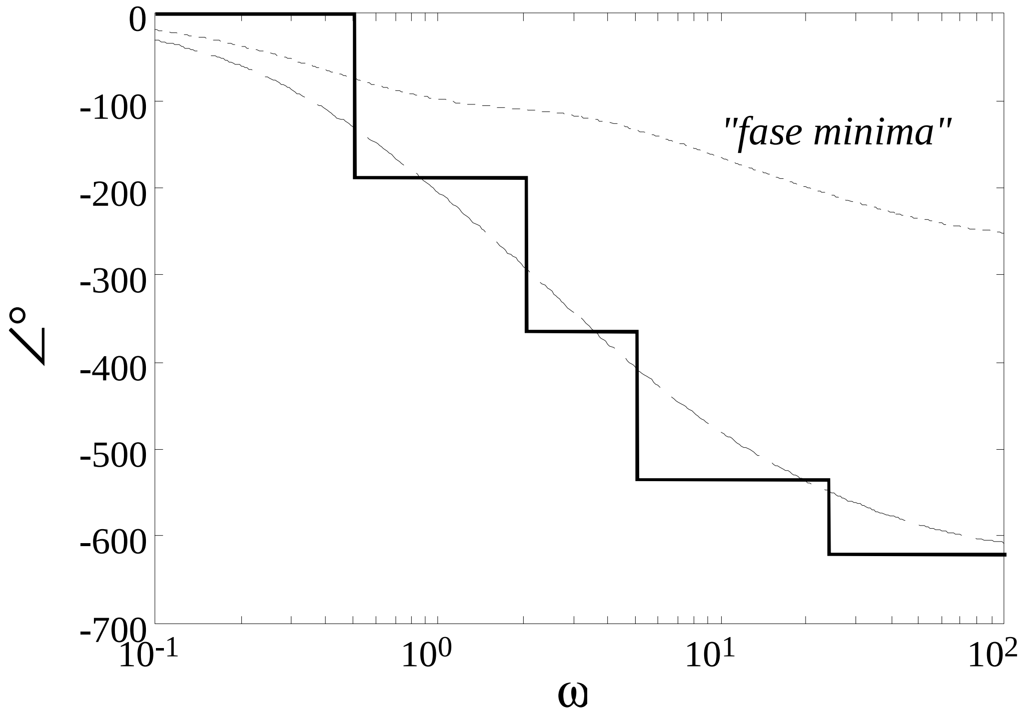
$\mu = 100 \quad , \quad g = 0 \quad , \quad \Omega_1 = 0.5 \quad , \quad \Omega_2 = 2 \quad , \quad \Omega_3 = 5 \quad , \quad \Omega_4 = 25 \quad .$





3) $F(s) = \dfrac{100\,(1 - 0.5\,s)^2}{(1 + 0.04\,s)\,(1 + 0.2\,s)^2\,(1 + 2\,s)^2}$

I valori di μ, g e Ω_i, i = 1, 2, 3, 4, così come il diagramma del modulo $|F(j\omega)|_{dB}$ restano invariati (rispetto al caso precedente). Cambia invece il diagramma degli argomenti (o delle fasi).



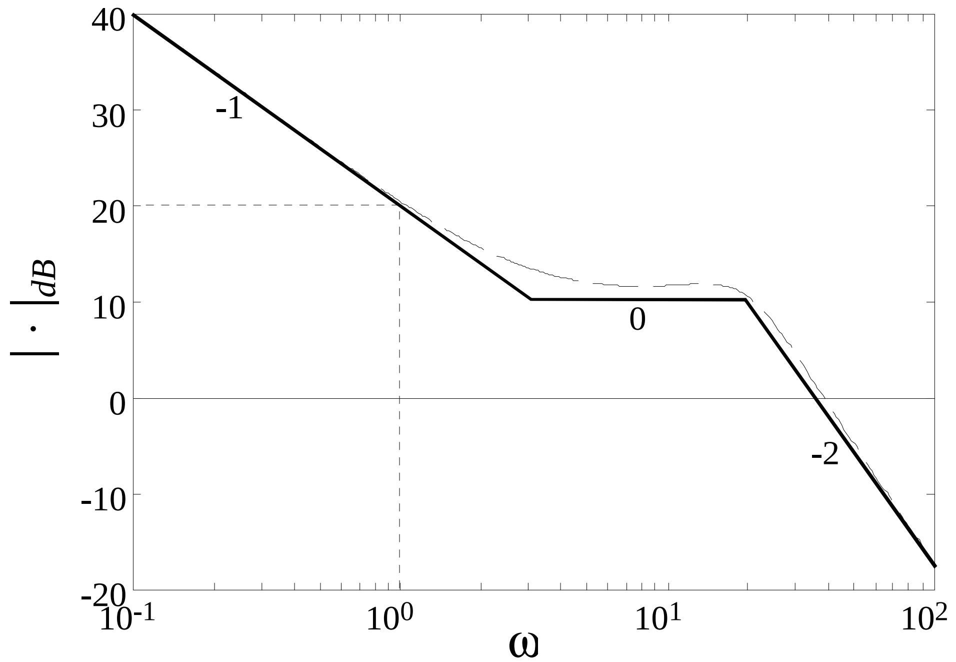
Se nella funzione di trasferimento di un sistema a dimensioni finite (a un ingresso e un'uscita) le costanti di tempo e i fattori di smorzamento sono positivi (come nel precedente caso (2)) il sistema si dice *a sfasamento minimo*; se invece le costanti di tempo e i fattori di smorzamento che compaiono al denominatore sono positivi, ma non tutte le costanti di tempo o i fattori di smorzamento del numeratore lo sono (come nel caso attuale), il sistema è detto *a sfasamento non minimo*. Anche le espressioni: sistema *a fase minima* o invece *a fase non minima* sono usate con il medesimo significato.

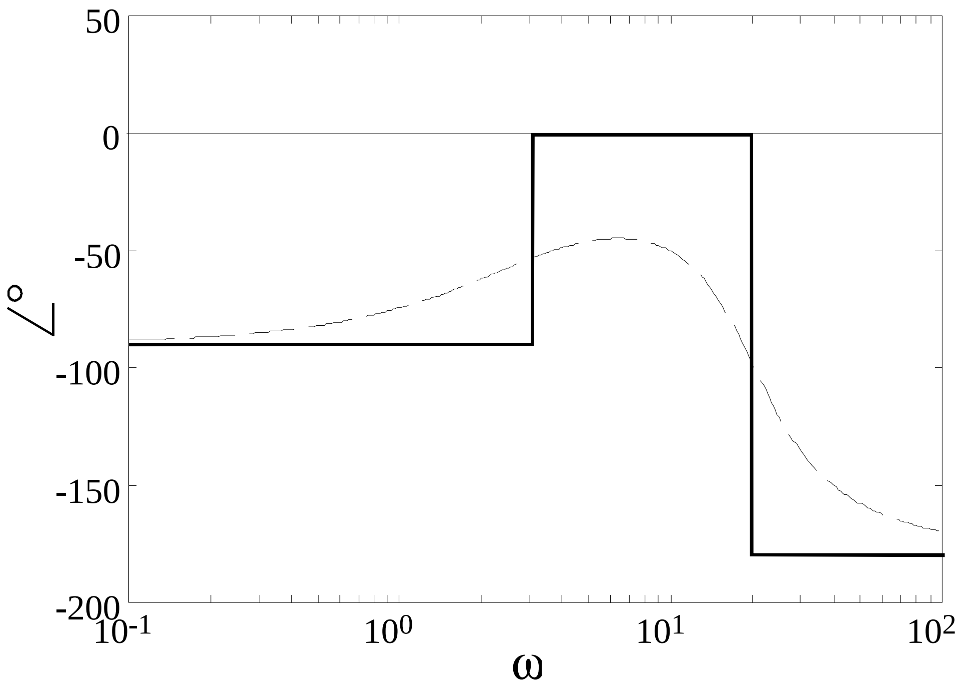
Si noti che l'aggettivo "minimo" è effettivamente appropriato solo se si pensa al valore assoluto dell'argomento. Altrimenti, sarebbe più corretto parlare di sfasamento massimo o di fase massima.

4) $F(s) = \dfrac{1333\,(s+3)}{s\,(s^2 + 20\,s + 400)} = \dfrac{10}{s}\;\dfrac{1 + 0.3333\,s}{1 + \dfrac{s}{20} + \dfrac{s^2}{400}}$

$\mu = 10$, $g = 1$, $T = 0.3333$, $\Omega = 3$,

$\omega_n^2 = 400 \;\Rightarrow\; \omega_n = 20$, $2\,\zeta\,\omega_n = 20$ o $\dfrac{2\,\zeta}{\omega_n} = \dfrac{1}{20} \;\Rightarrow\; \zeta = 0.5$.





***Esercizio* 24**

Tracciare (su carta semilogaritmica a quattro decadi) i diagrammi di Bode asintotici, del modulo e dell'argomento, relativi alle seguenti funzioni di trasferimento. Indicare, quindi, un andamento plausibile dei corrispondenti diagrammi effettivi (eventualmente calcolando con cura, per alcuni valori "strategici" della pulsazione ω, il valore dell'argomento di $G(j\omega)$). Avvalendosi dei diagrammi così ottenuti, si determini infine un plausibile andamento qualitativo del diagramma polare della risposta in frequenza associata a $G(\cdot)$.

24.1 $\quad G(s) = \dfrac{30}{(1 + 10\, s)^2\, (1 + 0.2\, s)\, (1 + 0.05\, s)^3}$

24.2 $\quad G(s) = \dfrac{8\,(1 + 5\, s)}{(1 + 50\, s)\, (1 - 2\, s)^2\, (1 + 0.4\, s)}$

24.3 $\quad G(s) = \dfrac{100\, s\,(1 + 0.003\, s)}{(1 + 10\, s)\, (1 + 0.001\, s)^2}$

24.4 $\quad G(s) = \dfrac{8\,(1 - 5\, s)}{(1 + 50\, s)\, (1 + 2\, s)^2\, (1 + 0.4\, s)}$

24.5 $\quad G(s) = \dfrac{20\,(1 - 0.1\, s)}{s\,(1 + 10\, s)\, (1 + 4\, s)^2\, (1 + 0.1\, s)}$

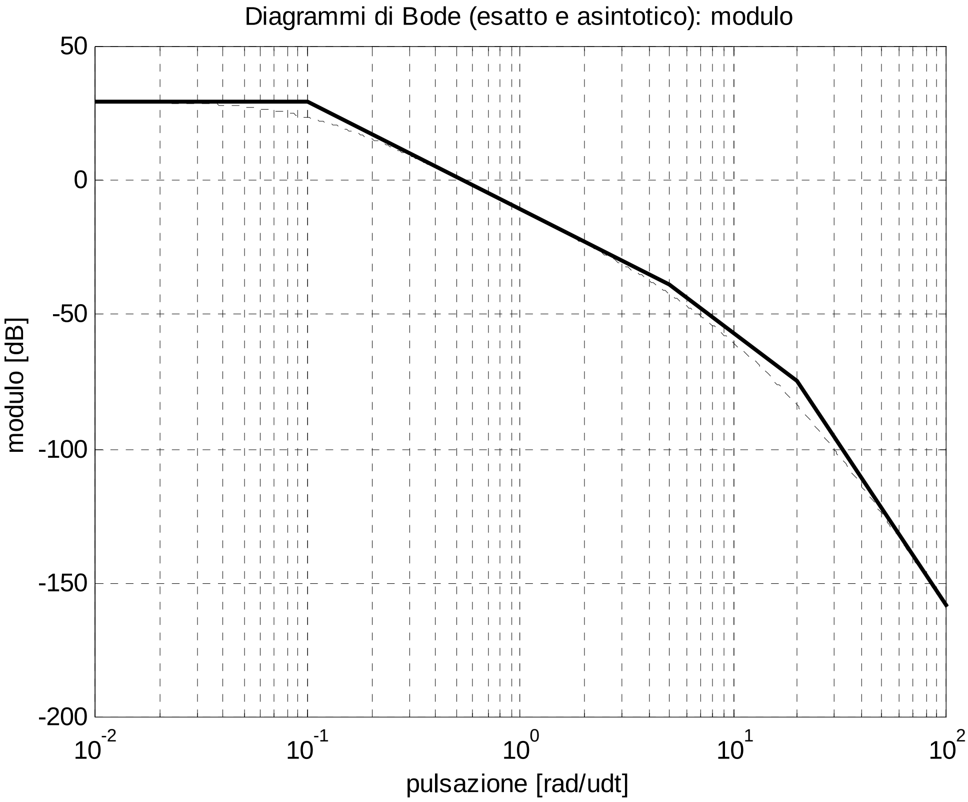
24.6 $\quad G(s) = \dfrac{200\,(1 + s)}{(1 + 100\, s)\, (1 - 10\, s + 100\, s^2)\, (1 + 0.3\, s)}$

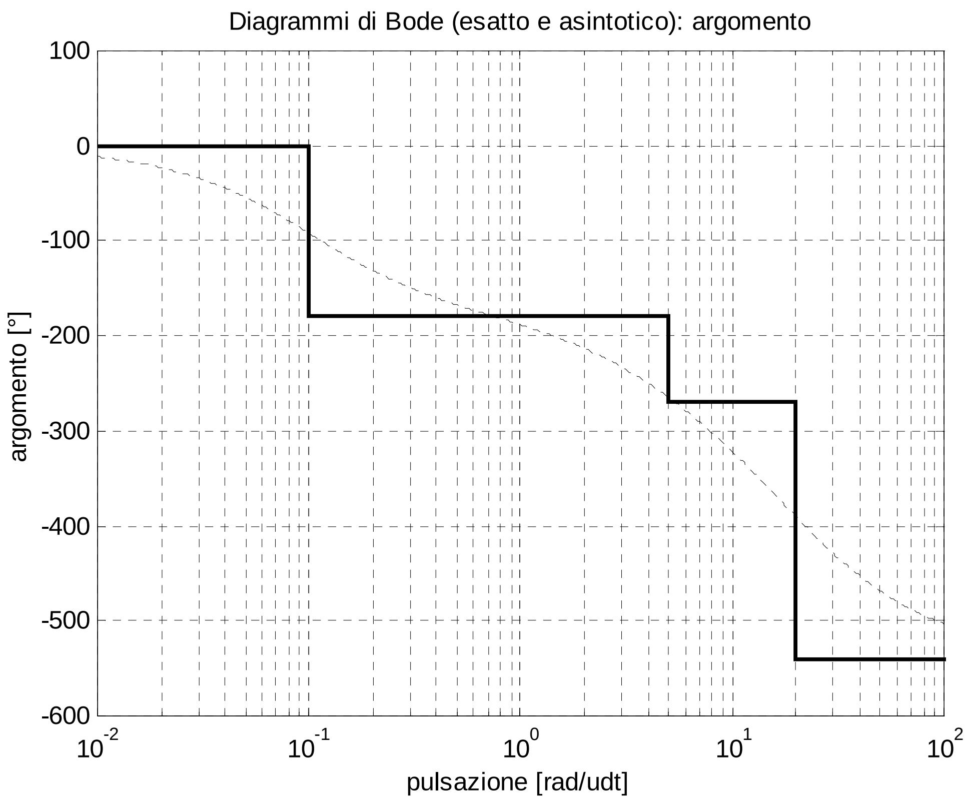
Per economia di spazio, verranno presentati prima i diagrammi di Bode (modulo e fase) di ognuna delle sei funzioni di trasferimento: da 24.1 a 24.6. Successivamente, verranno mostrati i diagrammi polari della risposta in frequenza associata ad ognuna delle sei funzioni di trasferimento.

24.1 $\quad G(s) = \dfrac{30}{(1 + 10\, s)^2\, (1 + 0.2\, s)\, (1 + 0.05\, s)^3}$

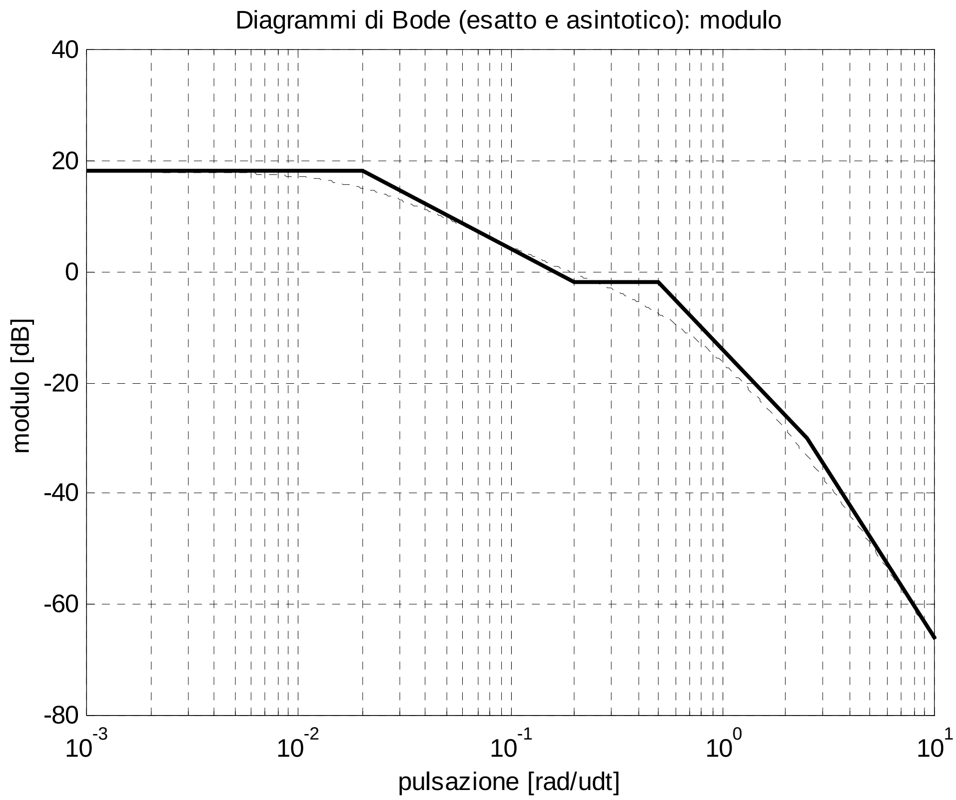
In questo caso si ha:

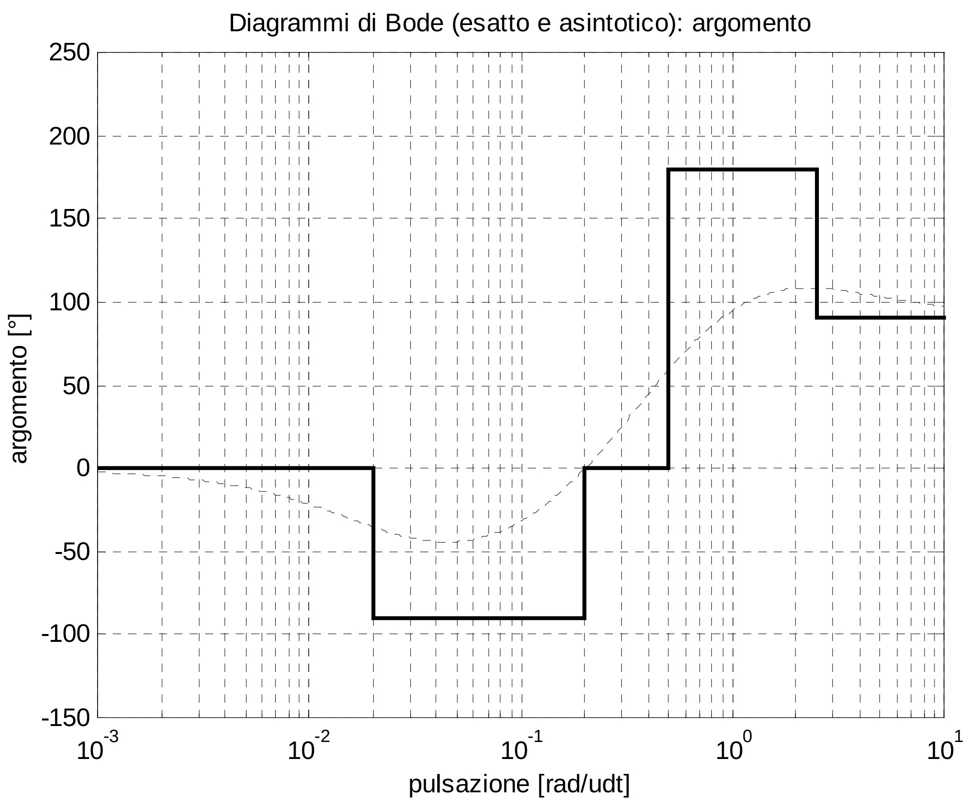
$\mu = 30 \quad , \quad g = 0 \quad , \quad \Omega_1 = 0.1 \quad , \quad \Omega_2 = 5 \quad , \quad \Omega_3 = 20$


Diagrammi di Bode (esatto e asintotico): modulo
50
0
-50
-100
-150
-200
modulo [dB]
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
pulsazione [rad/udt]

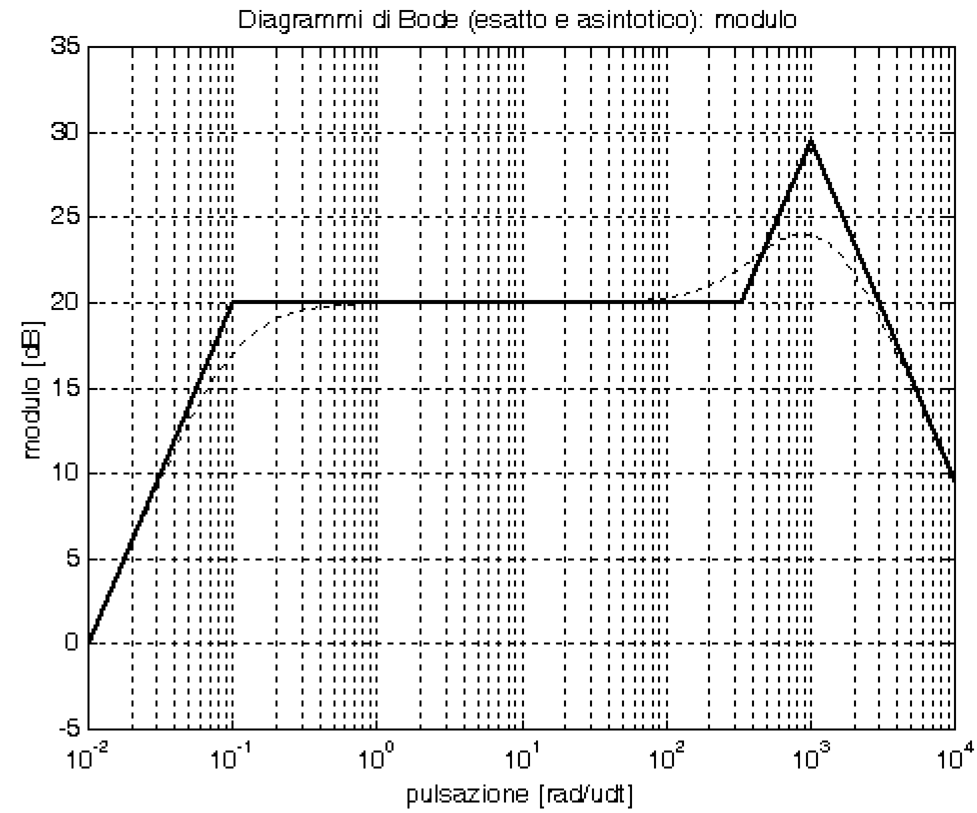

Diagrammi di Bode (esatto e asintotico): argomento
100
0
-100
-200
-300
-400
-500
-600
argomento [°]
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
pulsazione [rad/udt]

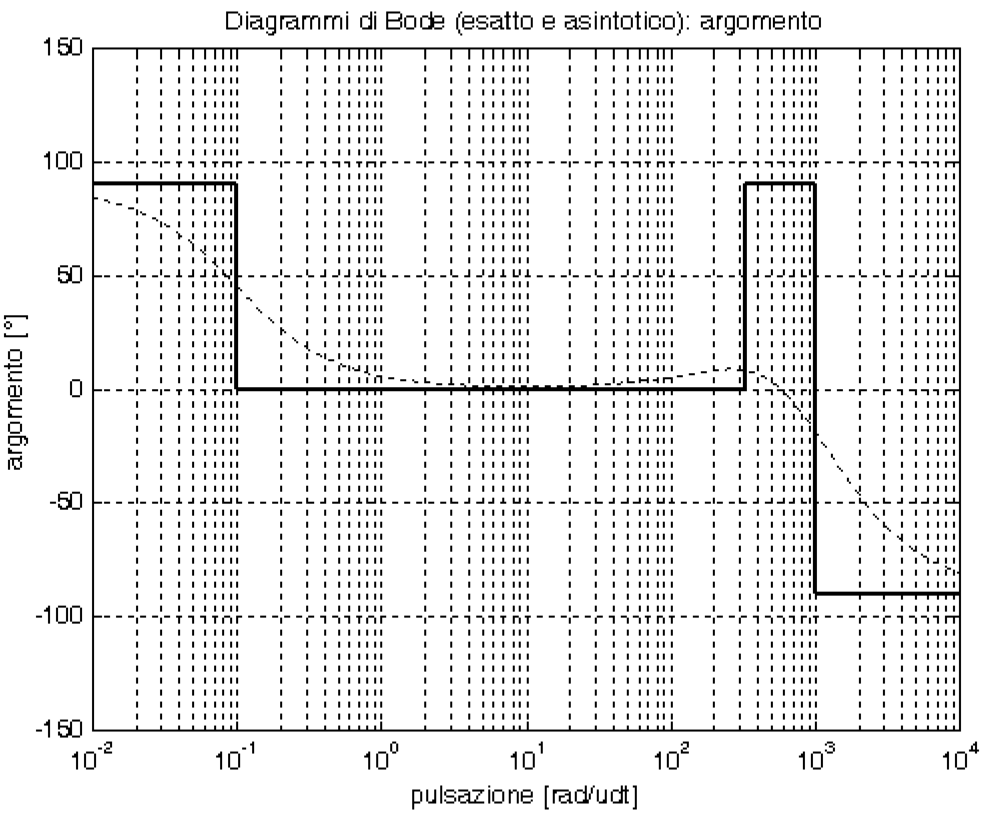
$$24.2 \quad G(s) = \frac{8\,(1+5\,s)}{(1+50\,s)\,(1-2\,s)^2\,(1+0.4\,s)}$$



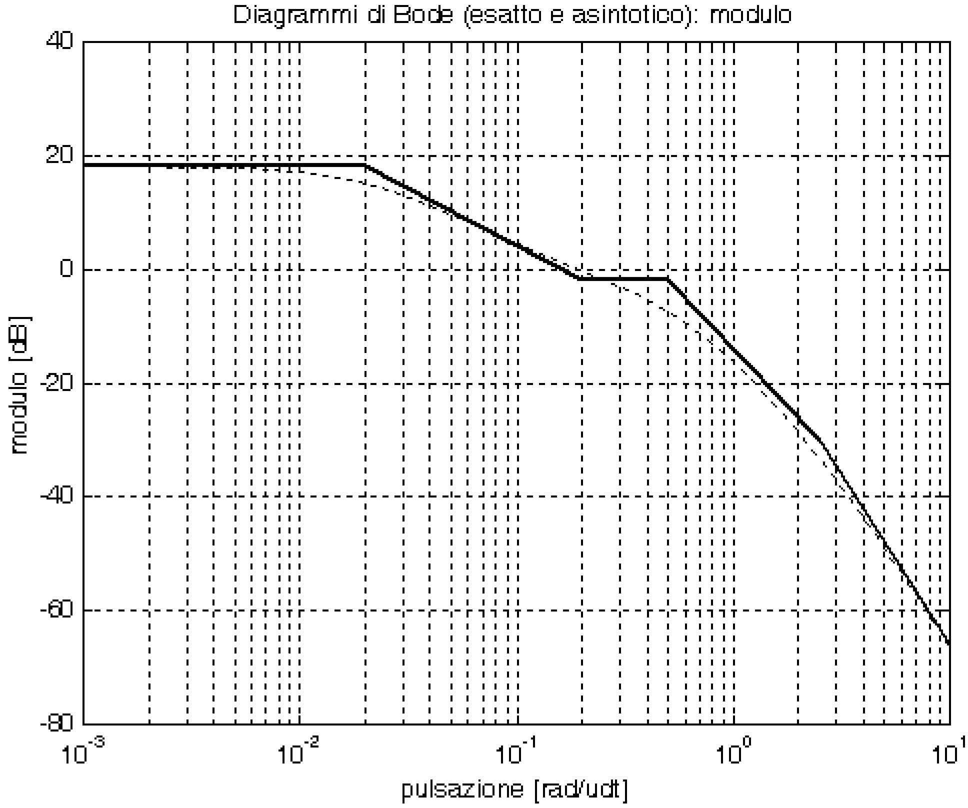


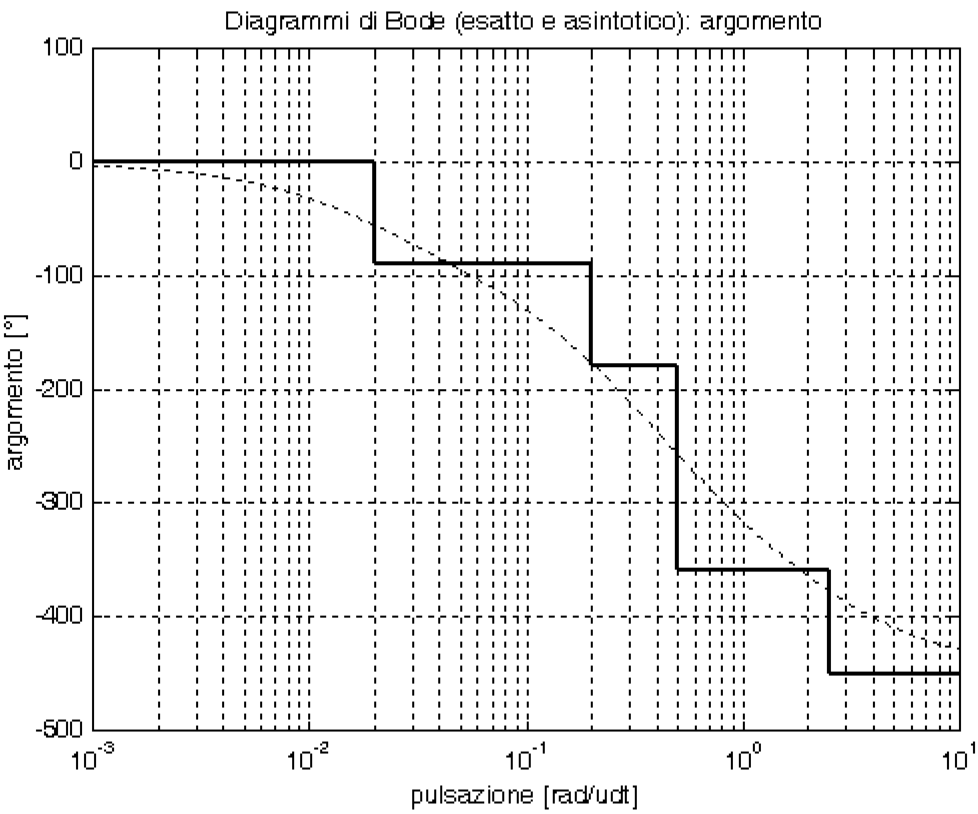
24.3 $G(s) = \dfrac{100\, s\,(1 + 0.003\, s)}{(1 + 10\, s)\,(1 + 0.001\, s)^2}$



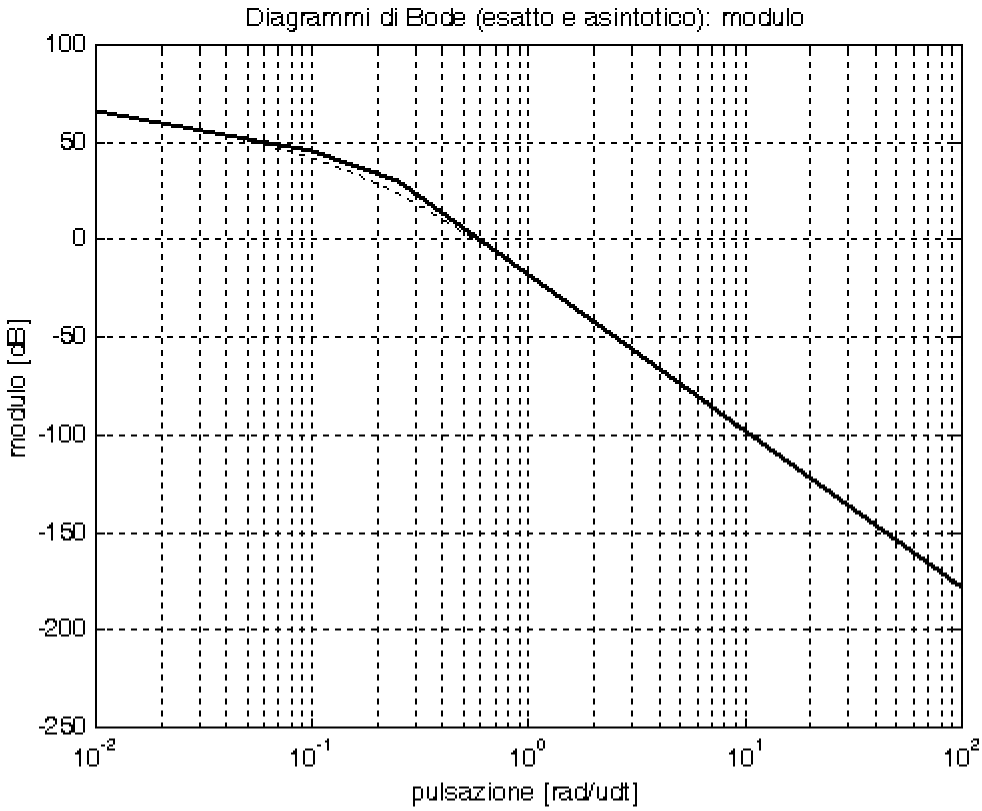


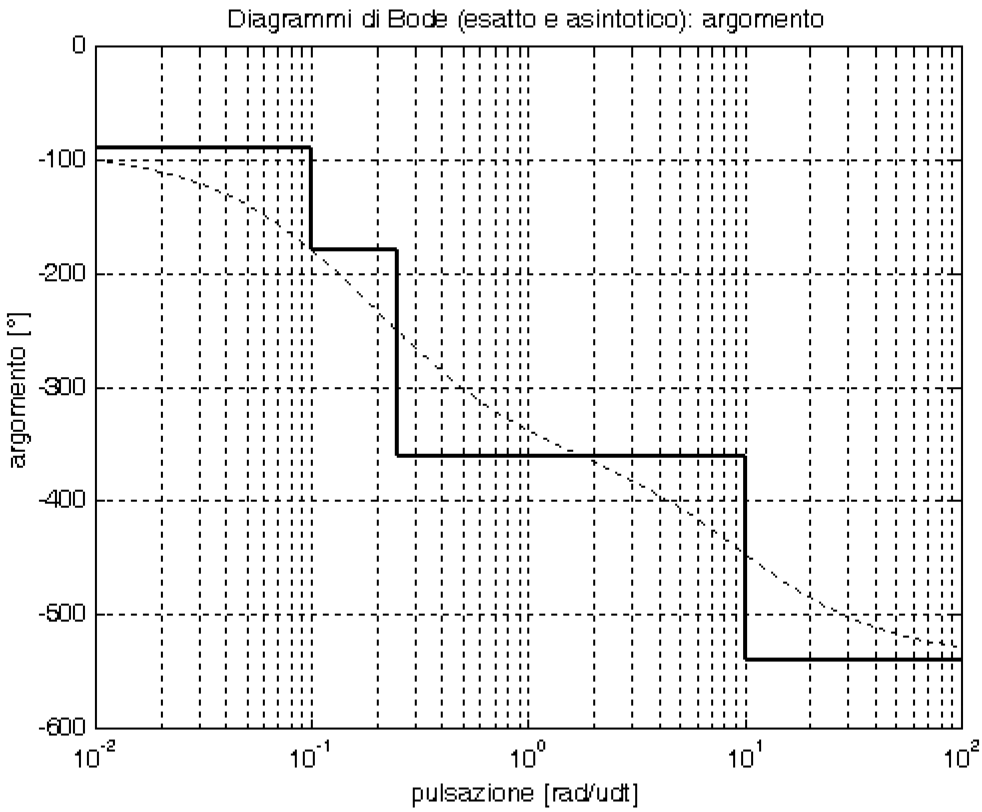
24.4 $\quad G(s) = \dfrac{8\,(1 - 5\,s)}{(1 + 50\,s)\,(1 + 2\,s)^2\,(1 + 0.4\,s)}$



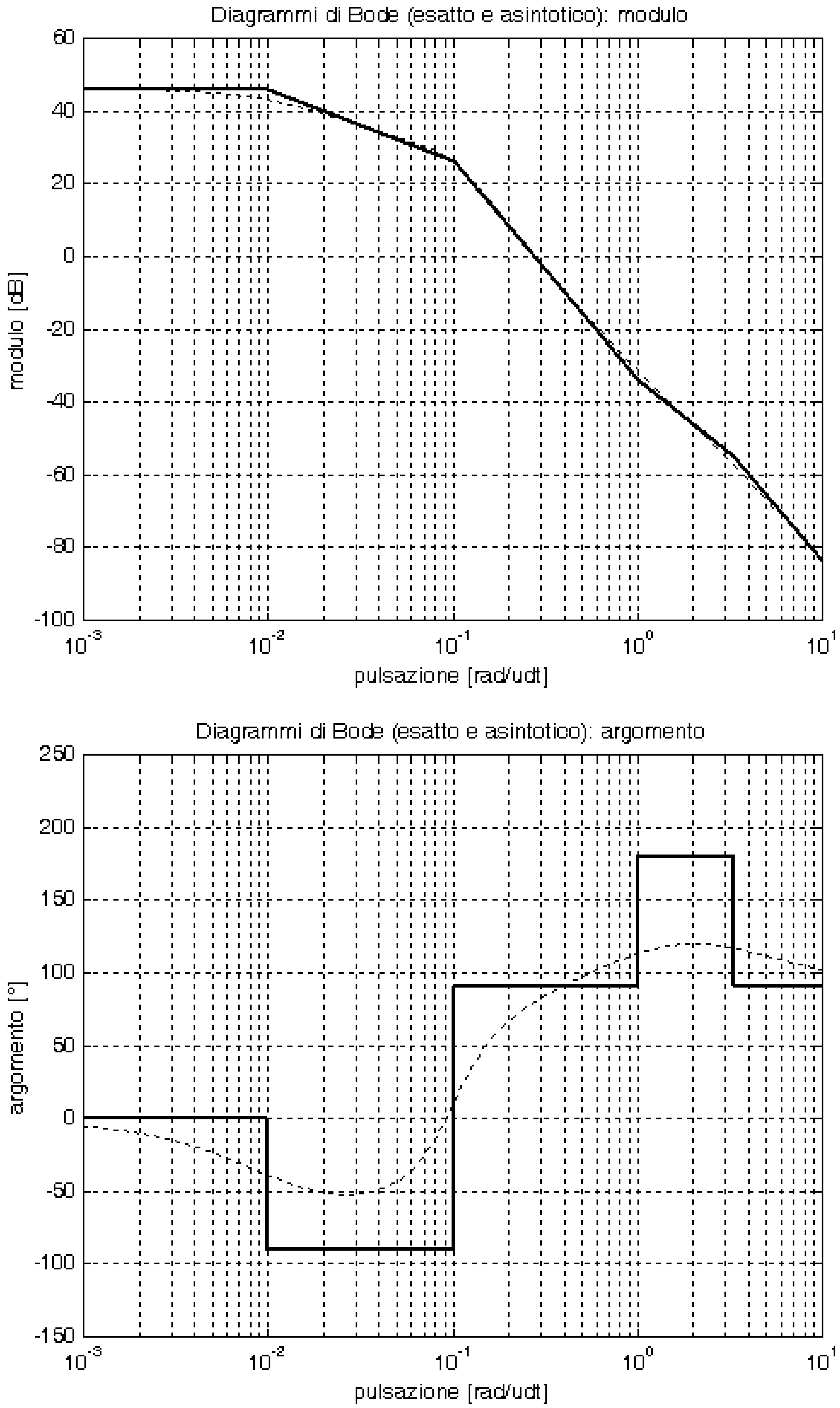


24.5 $\quad G(s) = \dfrac{20\,(1 - 0.1\,s)}{s\,(1 + 10\,s)\,(1 + 4\,s)^2\,(1 + 0.1\,s)}$

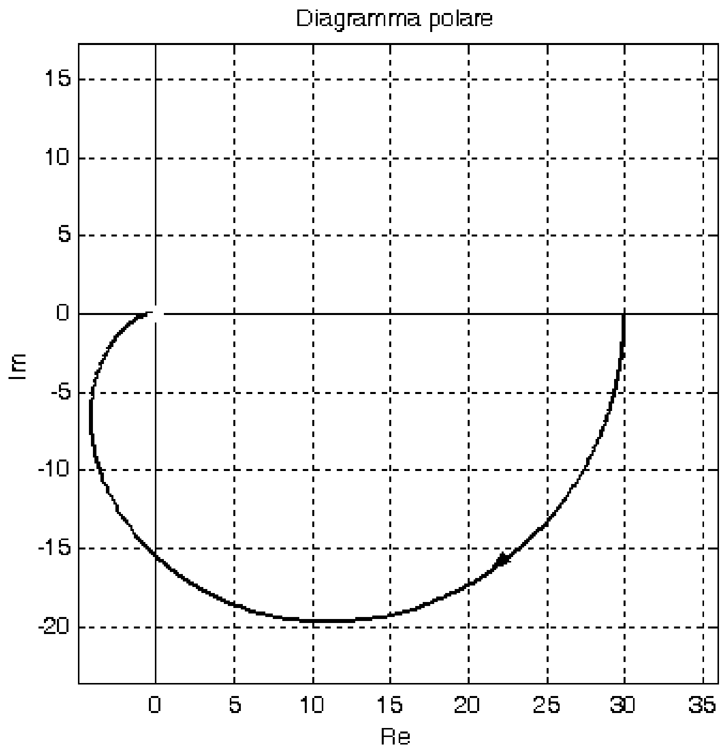




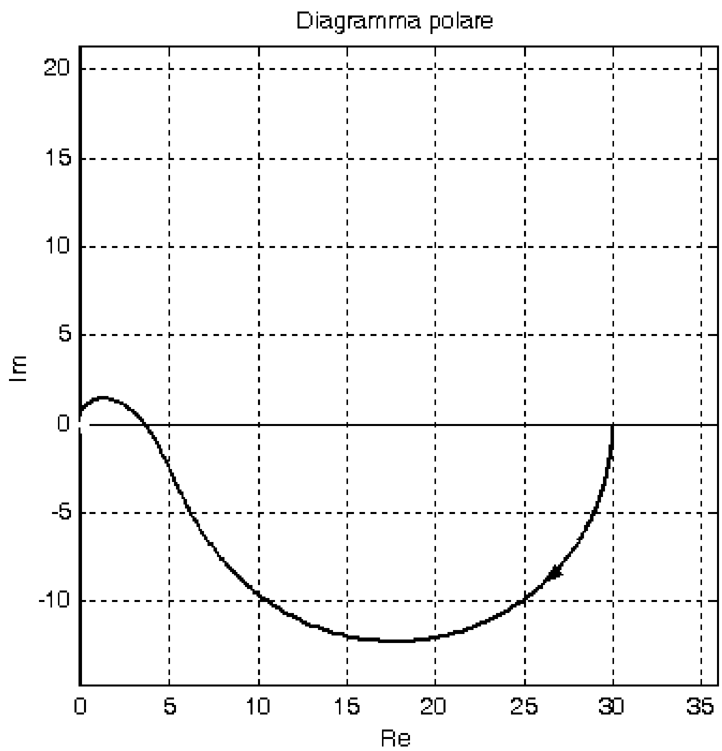
24.6 $G(s) = \dfrac{200\,(1 + s)}{(1 + 100\,s)\,(1 - 10\,s + 100\,s^2)\,(1 + 0.3\,s)}$



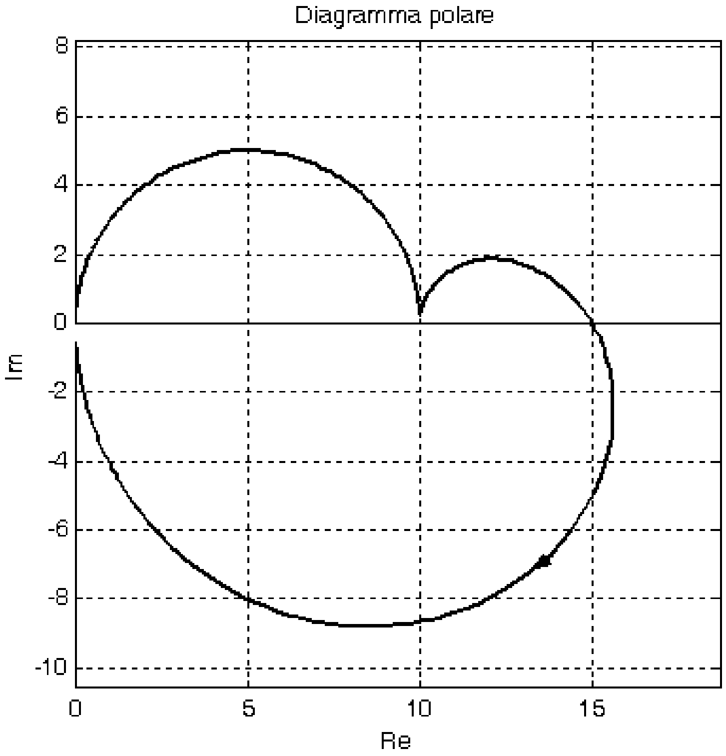
24.1 $G(s) = \dfrac{30}{(1+10\,s)^2\,(1+0.2\,s)\,(1+0.05\,s)^3}$



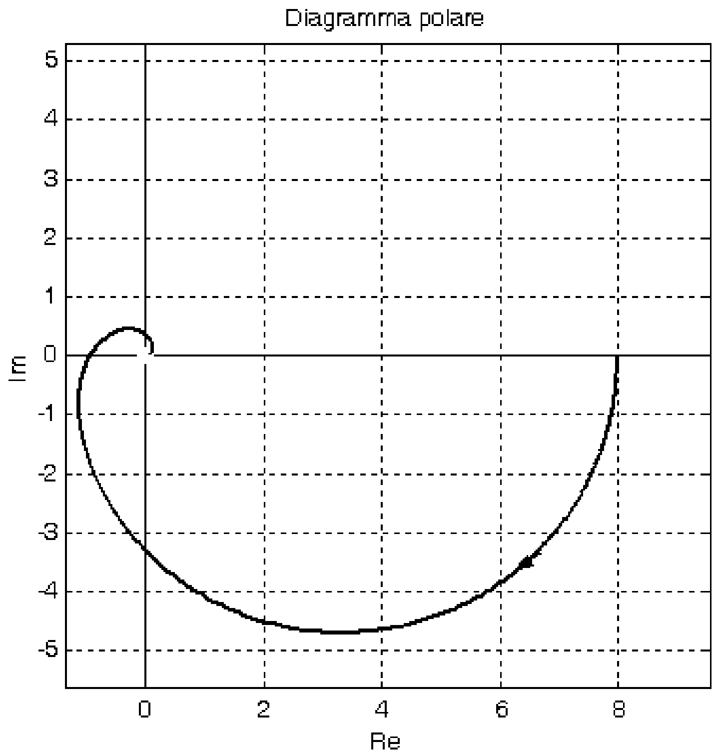
24.2 $G(s) = \dfrac{8\,(1+5\,s)}{(1+50\,s)\,(1-2\,s)^2\,(1+0.4\,s)}$



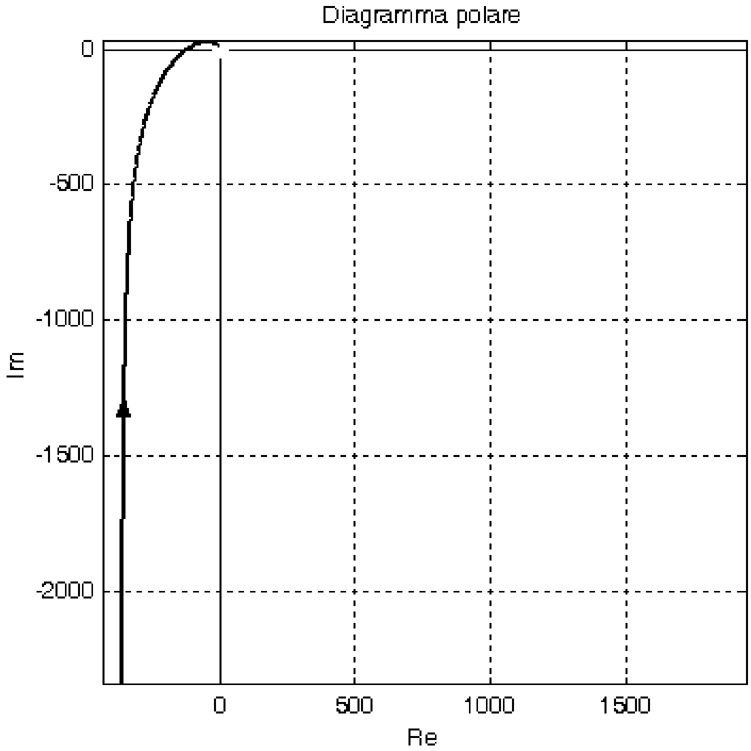
24.3 $G(s) = \dfrac{100\, s\, (1 + 0.003\, s)}{(1 + 10\, s)\, (1 + 0.001\, s)^2}$



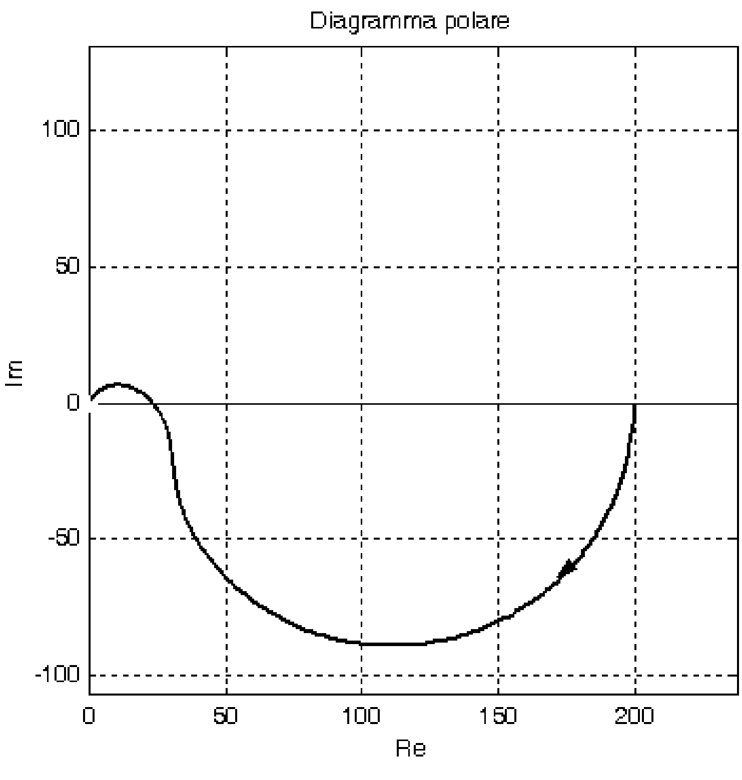
24.4 $G(s) = \dfrac{8\, (1 - 5\, s)}{(1 + 50\, s)\, (1 + 2\, s)^2\, (1 + 0.4\, s)}$



24.5 $G(s) = \dfrac{20\,(1 - 0.1\,s)}{s\,(1 + 10\,s)\,(1 + 4\,s)^2\,(1 + 0.1\,s)}$

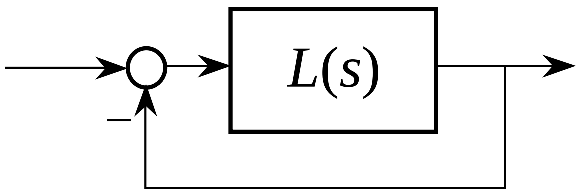


24.6 $G(s) = \dfrac{200\,(1 + s)}{(1 + 100\,s)\,(1 - 10\,s + 100\,s^2)\,(1 + 0.3\,s)}$



***Esercizio* 25**

Con riferimento a quelle, fra le seguenti funzioni di trasferimento d'anello, che rispettano le ipotesi di Bode, si calcoli il corrispondente margine di fase; e, qualora questo risulti positivo, anche il margine di guadagno.



25.1 $\quad L(s) = \dfrac{30}{(1 + 10\,s)^2\,(1 + 0.2\,s)\,(1 + 0.05\,s)^3}$

25.2 $\quad L(s) = \dfrac{30\,(1 + s)}{s^2\,(1 + 0.01\,s)\,(1 + 0.003\,s)^2}$

25.3 $\quad L(s) = \dfrac{100\,s\,(1 + 0.003\,s)}{(1 + 10\,s)\,(1 + 0.001\,s)^2}$

25.4 $\quad L(s) = \dfrac{20\,(1 - 0.04\,s)}{s\,(1 + 0.04\,s)\,(1 + 0.01\,s)^2}$

25.5 $\quad L(s) = \dfrac{0.02\,exp(-\,2\,s)}{s\,(1 + 12\,s)}$

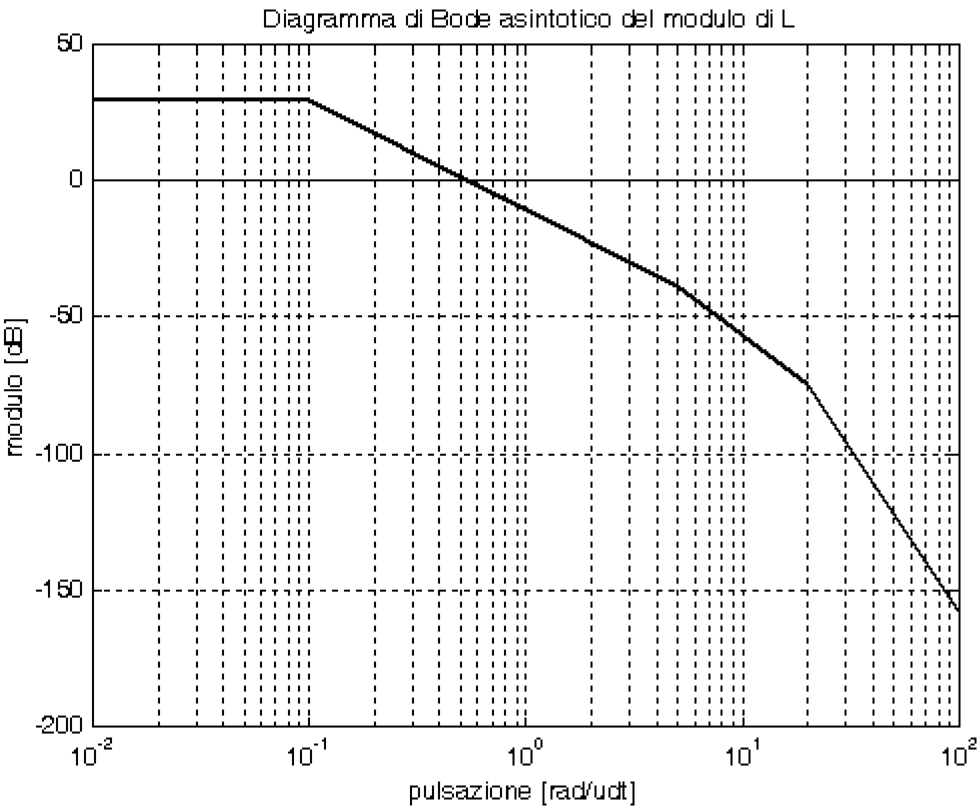
25.6 $\quad L(s) = \dfrac{200\,(1 + s)}{(1 + 100\,s)(1 - 10\,s + 100\,s^2)(1 + 0.3\,s)}$

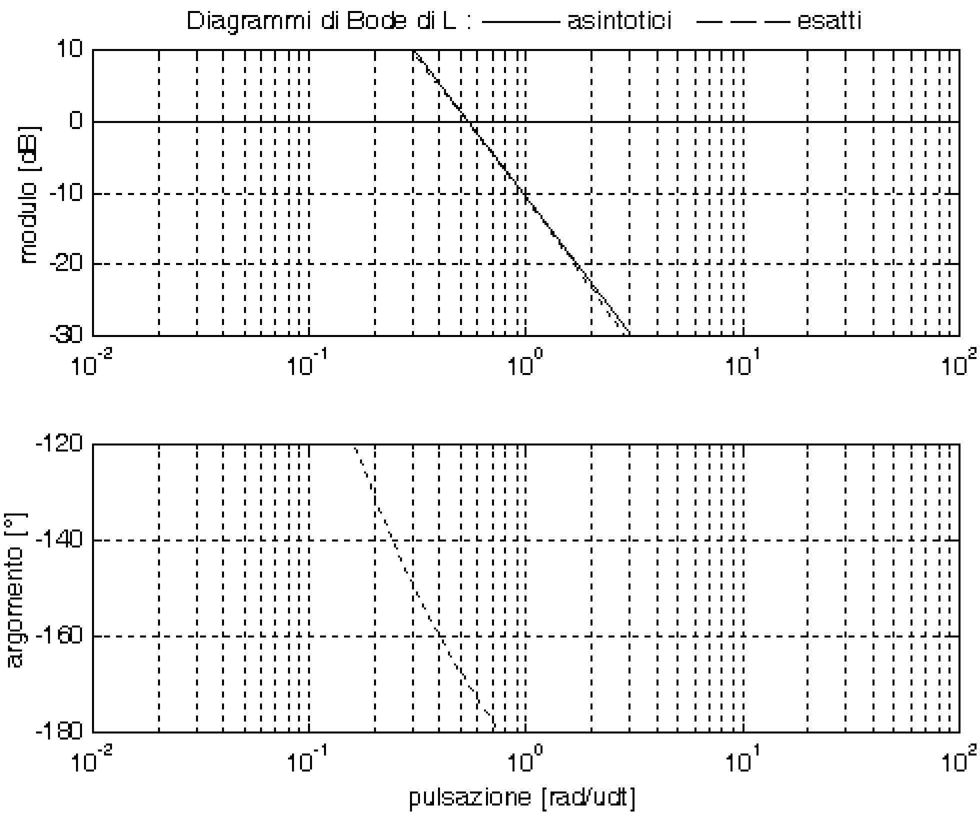
25.7 $\quad L(s) = \dfrac{-\,120}{s\,(1 + 5\,s)}$

25.8 $\quad L(s) = \dfrac{0.01}{s\,(1 + 30\,s)\,(1 + 10\,s + 100\,s^2)}\;.$

25.1 $\quad L(s) = \dfrac{30}{(1 + 10\,s)^2\,(1 + 0.2\,s)\,(1 + 0.05\,s)^3}$

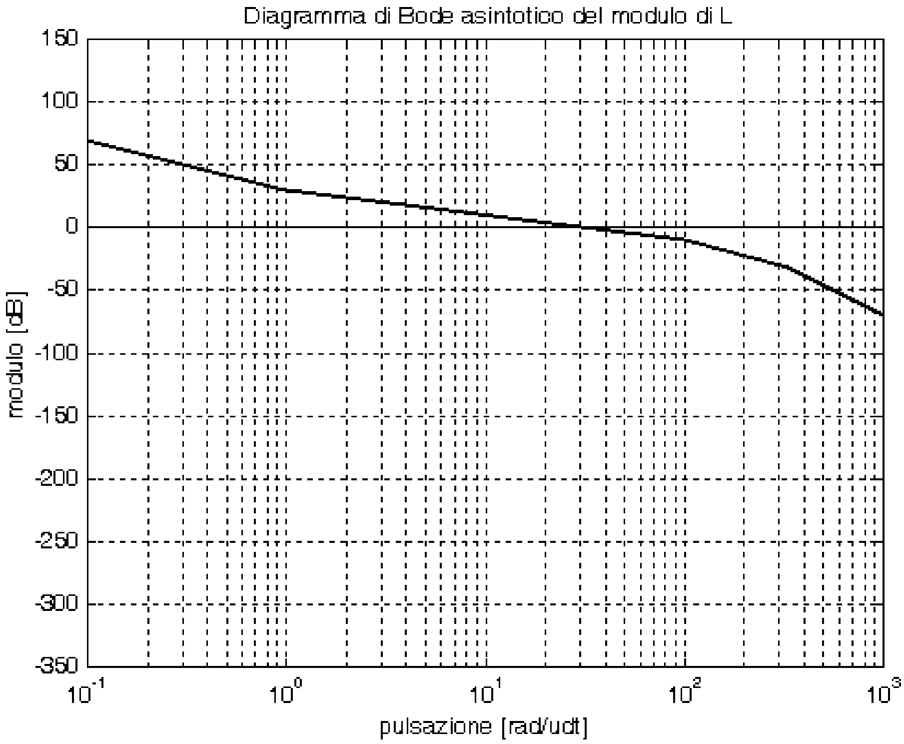
$L(s)$ non ha poli con parte reale positiva (P=0); per altro, il diagramma di Bode (asintotico) del modulo di L, riportato nella prima figura della pagina seguente, dimostra che questa funzione di trasferimento d'anello rispetta l'ulteriore ipotesi di Bode. La seconda figura consente un'analisi più dettagliata (ω_c, φ_m, ω_π, μ_m), da confrontarsi con i valori esatti riportati in calce.

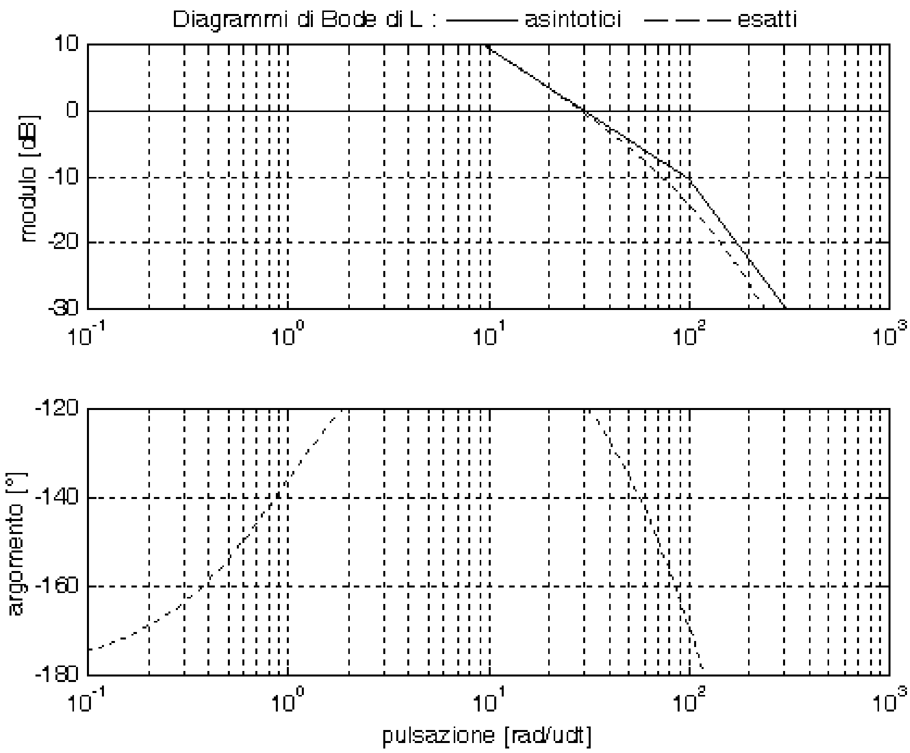




$\omega_c = 0.5367$, $\varphi_m = 10°$, $\omega_\pi = 0.7555$, $\mu_m = 2$ ($6\ dB$)

25.2 $L(s) = \dfrac{30\,(1+s)}{s^2\,(1+0.01\,s)\,(1+0.003\,s)^2}$, $P = 0$



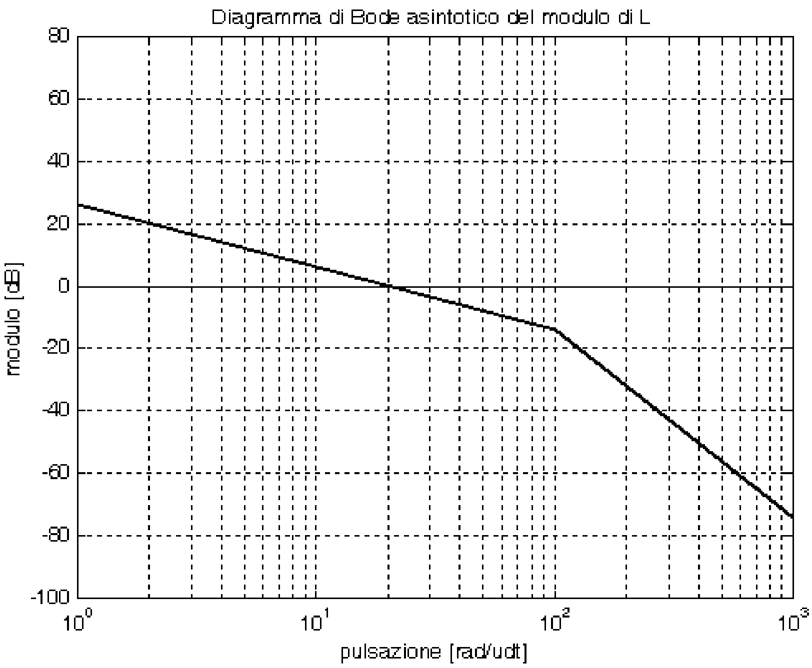


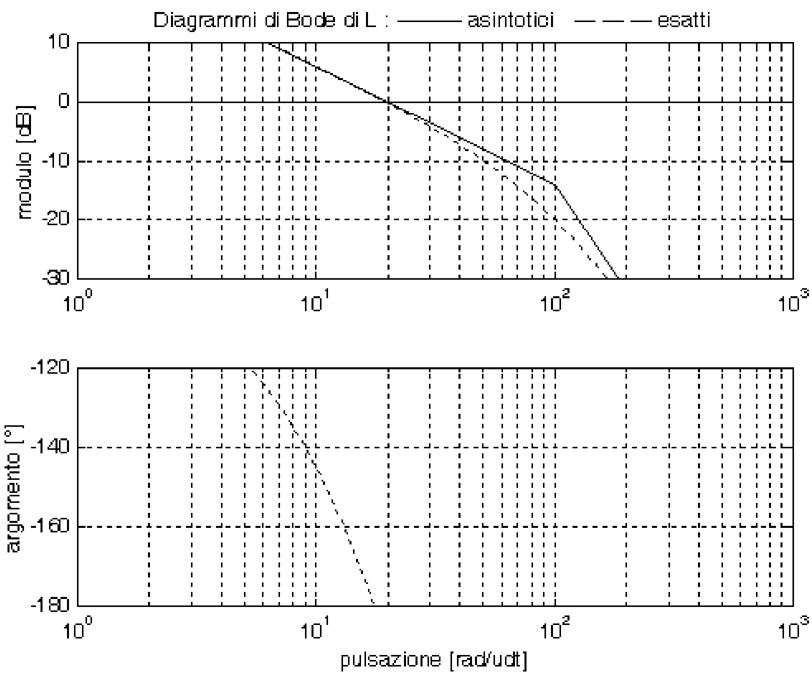
$\omega_c = 28.65$, $\varphi_m = 62°$, $\omega_\pi = 119.5$, $\mu_m = 7$ ($16.9\,dB$)

25.3 $L(s) = \dfrac{100\, s\, (1 + 0.003\, s)}{(1 + 10\, s)\, (1 + 0.001\, s)^2}$ $P = 0$

Il diagramma di Bode del modulo taglia due volte l'asse delle ω (Esercizio 24.3), quindi è violata una delle ipotesi di Bode.

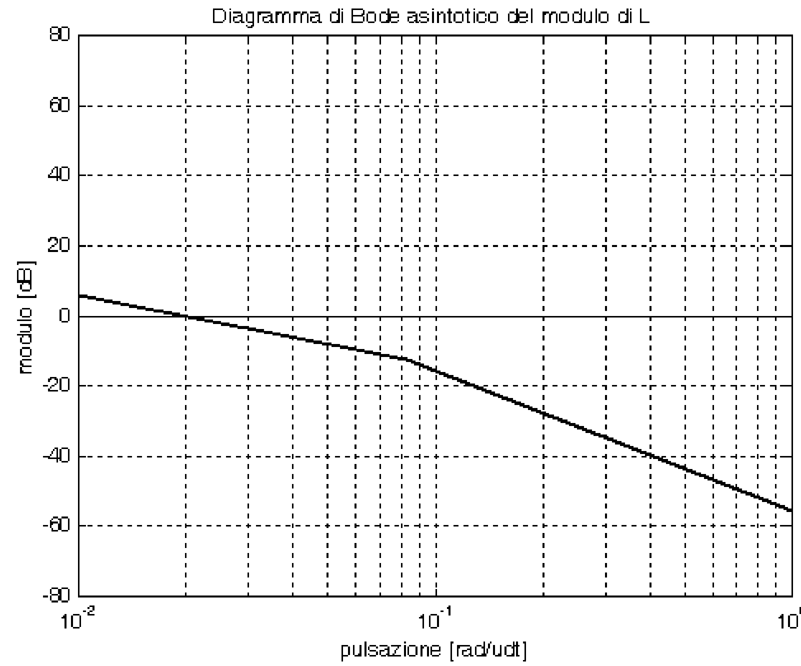
25.4 $L(s) = \dfrac{20\, (1 - 0.04\, s)}{s\, (1 + 0.04\, s)\, (1 + 0.01\, s)^2}$ $P = 0$

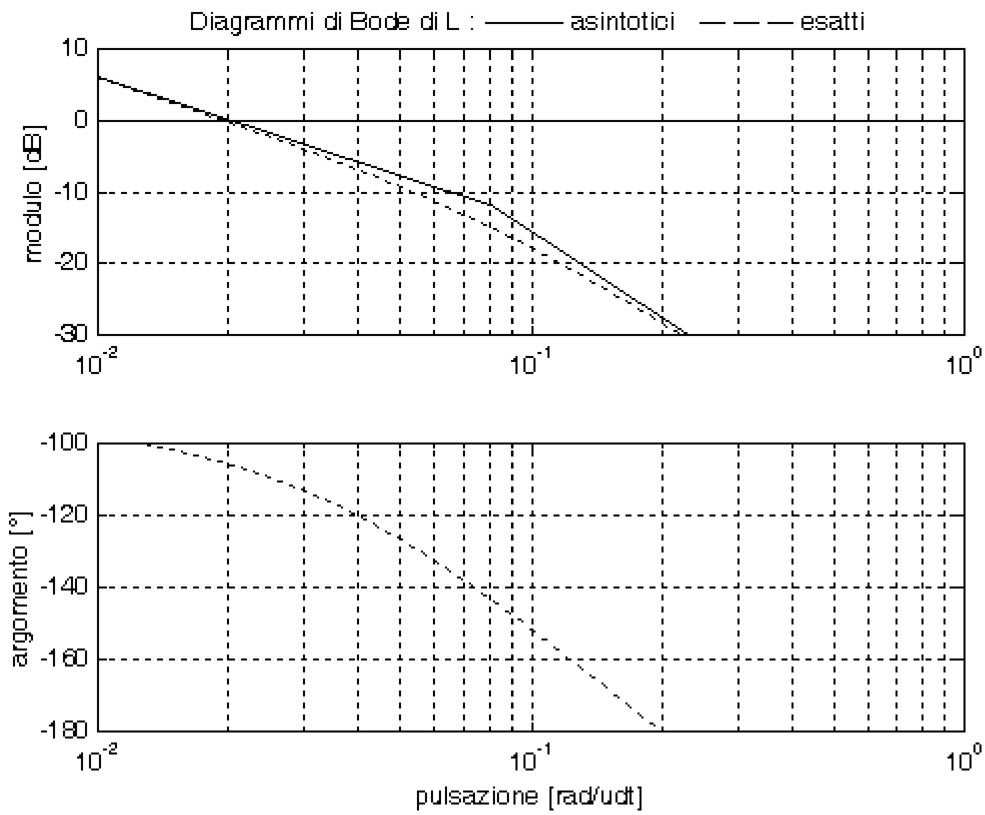




$\omega_c = 19.28, \quad \varphi_m = -\, 7°$

25.5 $\quad L(s) = \dfrac{0.02\, exp(-2\, s)}{s\,(1 + 12\, s)}$ $\qquad\qquad P = 0$



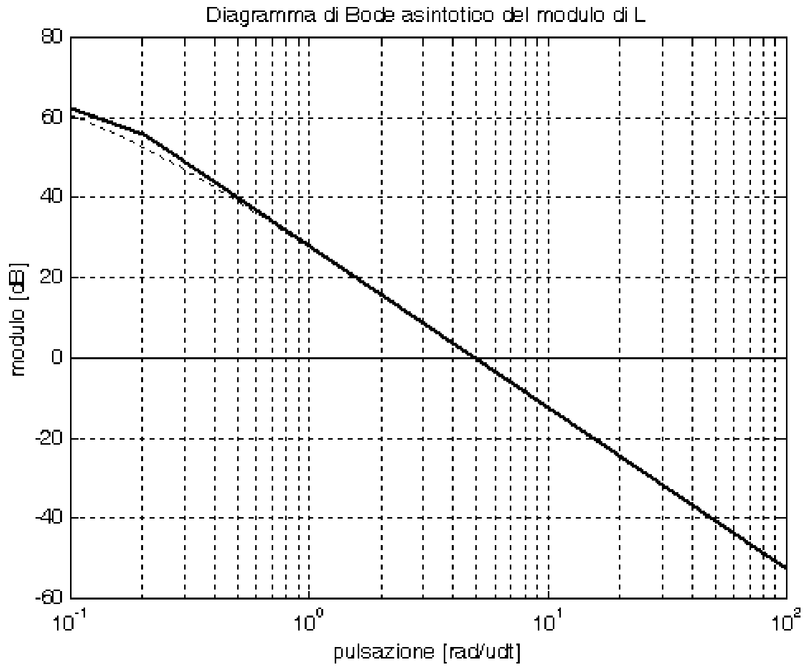


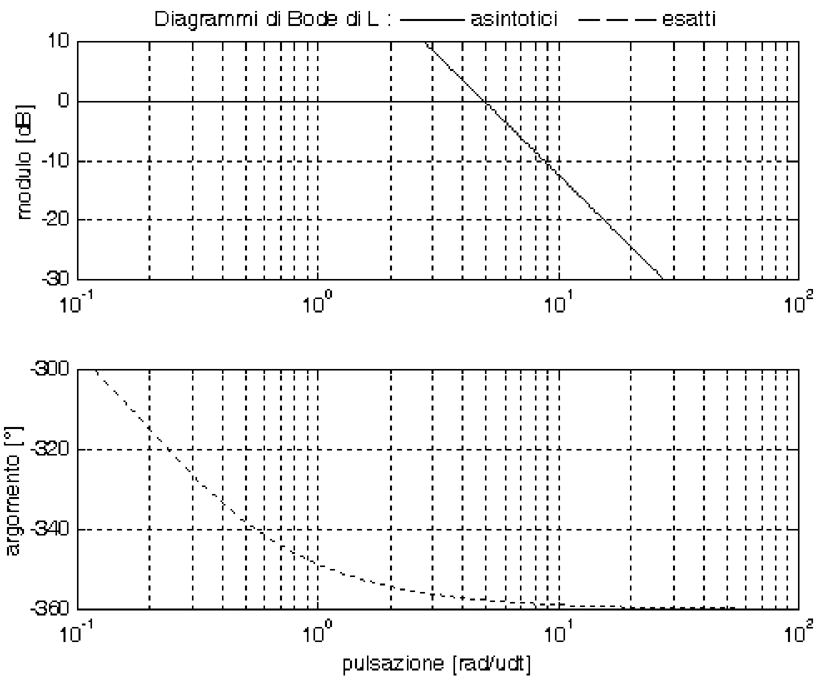
$\omega_c = 0.0195, \quad \varphi_m = 75°, \quad \omega_\pi = 0.1986, \quad \mu_m = 25.66\ \ (28.19\ dB)$

25.6 $L(s) = \dfrac{200\,(1+s)}{(1+100\,s)(1-10\,s+100\,s^2)(1+0.3\,s)}$ $\qquad P = 2$

I due poli complessi coniugati con fattore di smorzamento negativo hanno parte reale positiva; quindi, è violata una delle ipotesi di Bode.

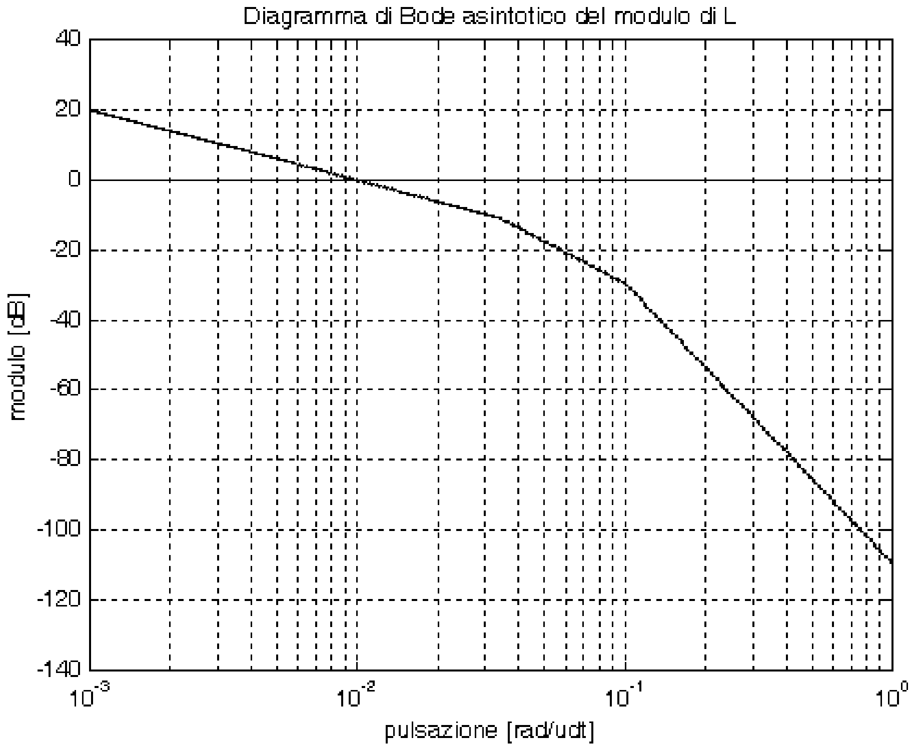
25.7 $L(s) = \dfrac{-120}{s\,(1+5\,s)}$ $\qquad P = 0$

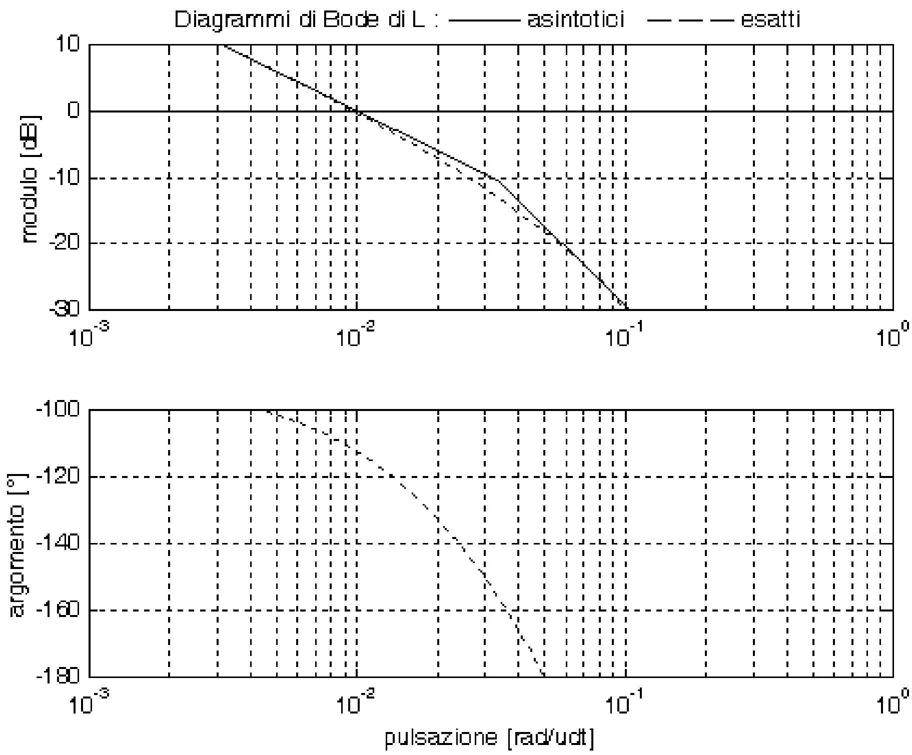




$\omega_c = 4.897, \quad \varphi_m = -178°$

25.8 $\quad L(s) = \dfrac{0.01}{s\,(1 + 30\,s)\,(1 + 10\,s + 100\,s^2)} \qquad\qquad P = 0$





$\omega_c = 0.00965, \quad \varphi_m = 68°, \quad \omega_\pi = 0.05, \quad \mu_m = 8.1 \;\; (18.17\; dB)$