Fondamenti di automatica

Possibili soluzioni degli Esercizi 9-20

Esercizio 9

Si discuta la stabilità del sistema dinamico lineare tempo-invariante descritto dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -10 & 4 & 0 \\ 19 & -23 & 8 & 2 \\ 24 & -28 & 2 & 0 \\ 47 & -52 & 19 & -7 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} -1 & -23 & 2 & -7 \end{pmatrix} \quad , \quad D = 18 \quad .$$

Per l'analisi di stabilità, calcoliamo anzitutto il polinomio caratteristico della matrice dinamica A.

$$s\,I - A = \begin{pmatrix} s+1 & 10 & -4 & 0 \\ -19 & s+23 & -8 & -2 \\ -24 & 28 & s-2 & 0 \\ -47 & 52 & -19 & s+7 \end{pmatrix}$$

$$det(s\,I - A) = -2\,det \begin{pmatrix} s+1 & 10 & -4 \\ -24 & 28 & s-2 \\ -47 & 52 & -19 \end{pmatrix} + (s+7)\,det \begin{pmatrix} s+1 & 10 & -4 \\ -19 & s+23 & -8 \\ -24 & 28 & s-2 \end{pmatrix} =$$

$$= -2\,[-532\,(s+1) - 470\,(s-2) + 4992 - 5264 - 52\,(s+1)\,(s-2) - 4560] +$$

$$+ (s+7)\,[(s+1)\,(s+23)\,(s-2) + 1920 + 2128 - 96\,(s+23) + 224\,(s+1) +$$

$$+ 190\,(s-2)] = s^4 + 29\,s^3 + 551\,s^2 + 5589\,s + 20106$$

Possiamo ora costruire la Tabella di Routh relativa al polinomio caratteristico di *A*.

1	551	20106
29	5589	0
358	20106	0
3962	0	0
20106	0	0

Poiché gli elementi della prima colonna sono diversi da zero e di segno concorde, gli autovalori di *A* hanno parte reale negativa. Pertanto, il sistema dato è asintoticamente stabile.

***Esercizio* 10**

Si discuta la stabilità del sistema dinamico lineare tempo-invariante descritto dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -10 & 4 & 0 \\ 19 & -23 & 8 & 2 \\ 24 & -28 & 2 & 0 \\ 47 & -52 & 19 & -7 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 0 \\ -1 & -9 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & -2 & 12 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad D = 0 \, .$$

(si noti che *D* è una matrice 2×2 i cui elementi sono tutti nulli).

Poiché la matrice *A* è identica a quella dell'Esercizio 9, identiche sono le conclusioni.

***Esercizio* 11**

Si discuta la stabilità di un sistema dinamico in senso proprio, lineare e tempo-invariante descritto dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0.2 & 0.05 & 0.8 & 0.3 & 0.01 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad C = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \, .$$

Il sistema è in forma canonica di controllo. Quindi, il polinomio caratteristico della matrice A è dato da:

$$\chi_A(s) = s^6 - 0.01\, s^5 - 0.3\, s^4 - 0.8\, s^3 - 0.05\, s^2 - 0.2\, s - 1\ .$$

Poiché i coefficienti del polinomio caratteristico sono di segno discorde, si può affermare che almeno un autovalore di A ha parte reale positiva. Quindi, il sistema è instabile.

***Esercizio* 12**

Si dica quali dei seguenti polinomi hanno tutte le radici con parte reale negativa.

$P_1(s) = -2\, s^2 - 4\, s - 6$
$P_2(s) = 2\, s^5 + 5\, s^4 + s^3 + 4\, s^2 + 6\, s + 3$
$P_3(s) = s^5 + 3.10\, s^4 + 3.58\, s^3 + 1.90\, s^2 + 0.46\, s + 0.04$
$P_4(s) = 2.41\, s^5 + 0.53\, s^4 - 0.06\, s^3 + 4.40\, s^2 + 0.02\, s + 3.14$
$P_5(s) = 3\, s^4 + 2\, s^3 + 8\, s^2 + 5\, s + 1$
$P_6(s) = 4\, s^6 + 3\, s^4 + 7\, s^3 + 5\, s^2 + 2\, s + 6$
$P_7(s) = s^5 + 13\, s^4 + 61\, s^3 + 127\, s^2 + 118\, s + 40$
$P_8(s) = s^4 + 3\, s^3 + 6\, s^2 + 3\, s + 1$
$P_9(s) = 3\, s^4 + 2\, s^3 + 9\, s^2 + 6\, s + 5$

Si dica inoltre quali di essi hanno almeno una radice con parte reale positiva.

$P_1(s)$ è un polinomio di secondo grado a coefficienti non nulli e di segno concorde, quindi entrambe le sue radici hanno parte reale negativa.

Per $P_2(s)$ costruiamo la Tabella di Routh.

2.0000	1.0000	6.0000
5.0000	4.0000	3.0000
-0.6000	4.8000	
44.0000	3.0000	
4.8409		
3.0000		

Poiché gli elementi della prima colonna sono di segno discorde, almeno una radice di $P_2(s)$ ha parte reale positiva.

Anche per $P_3(s)$ costruiamo la Tabella di Routh.

1.0000	3.5800	0.4600
3.1000	1.9000	0.0400
2.9671	0.4471	
1.4329	0.0400	
0.3643		
0.0400		

Poiché gli elementi della prima colonna sono diversi da zero e di segno concorde, le radici di $P_3(s)$ hanno parte reale negativa.

Poiché i coefficienti di $P_4(s)$ sono di segno discorde, almeno una delle sue radici ha parte reale positiva.

Per $P_5(s)$ costruiamo la Tabella di Routh.

3.0	8.0	1.0
2.0	5.0	
0.5	1.0	
1.0		
1.0		

Poiché gli elementi della prima colonna sono diversi da zero e di segno concorde, le radici di $P_5(s)$ hanno parte reale negativa.

Poiché un coefficiente di $P_6(s)$ è nullo, almeno una delle sue radici non ha parte reale negativa. Applicando a $P_6(s)$ il Criterio di Routh non è possibile stabilire se almeno una radice abbia parte reale positiva (la costruzione della Tabella si arresta prima che sulla prima colonna si manifestino alternanze di segno). Una breve riflessione consente tuttavia di riconoscere che le radici di $P_6(s)$ si possono ottenere invertendo gli zeri di $P_6(1/\lambda)$; cioè, le radici di $\overleftarrow{P}_6(\lambda) := 6\,\lambda^6 + 2\,\lambda^5 + 5\,\lambda^4 + 7\,\lambda^3 + 3\,\lambda^2 + 4$. Le prime tre righe della Tabella di Routh relativa a $\overleftarrow{P}_6(\lambda)$ sono le seguenti:

6	5	3	4
2	7	0	
-16	3	4	

Poiché gli elementi della prima colonna sono di segno discorde, almeno una radice di $\overleftarrow{P}_6(\lambda)$, e quindi anche di $P_6(s)$ ($Re[\lambda]>0$ e $s = 1/\lambda \Rightarrow Re[s]>0$), ha parte reale positiva. Si noti che non sempre, in presenza di zeri nella prima colonna della Tabella Routh, l’accorgimento di “invertire l’ordine dei coefficienti” è conclusivo.

Per $P_7(s)$ costruiamo la Tabella di Routh.

1.0000	61.0000	118.0000
13.0000	127.0000	40.0000
51.2308	114.9231	
97.8378	40.0000	
93.9779		
40.0000		

Poiché gli elementi della prima colonna sono diversi da zero e di segno concorde, le radici di $P_7(s)$ hanno parte reale negativa.

Per $P_8(s)$ costruiamo la Tabella di Routh.

1.0	6.0	1.0
3.0	3.0	
5.0	1.0	
2.4		
1.0		

Poiché gli elementi della prima colonna sono diversi da zero e di segno concorde, le radici di $P_8(s)$ hanno parte reale negativa.

Per $P_9(s)$ costruiamo la Tabella di Routh.

3	9	5
2	6	
0	5	

La comparsa di un elemento nullo nella prima colonna impedisce di completare la costruzione della Tabella. L'unica conclusione che se ne può immediatamente trarre è che almeno una radice di $P_9(s)$ non ha parte reale negativa. La Tabella di Routh relativa a $\overleftarrow{P}_9(\lambda)$ (si veda la discussione relativa a $P_6(s)$), vale a dire:

5	9	3
6	2	
7.3333	3	
-0.4545		
3		

consente di concludere che almeno una radice di $\overleftarrow{P}_9(\lambda)$, e quindi anche di $P_9(s)$, ha parte reale positiva.

***Esercizio* 13**

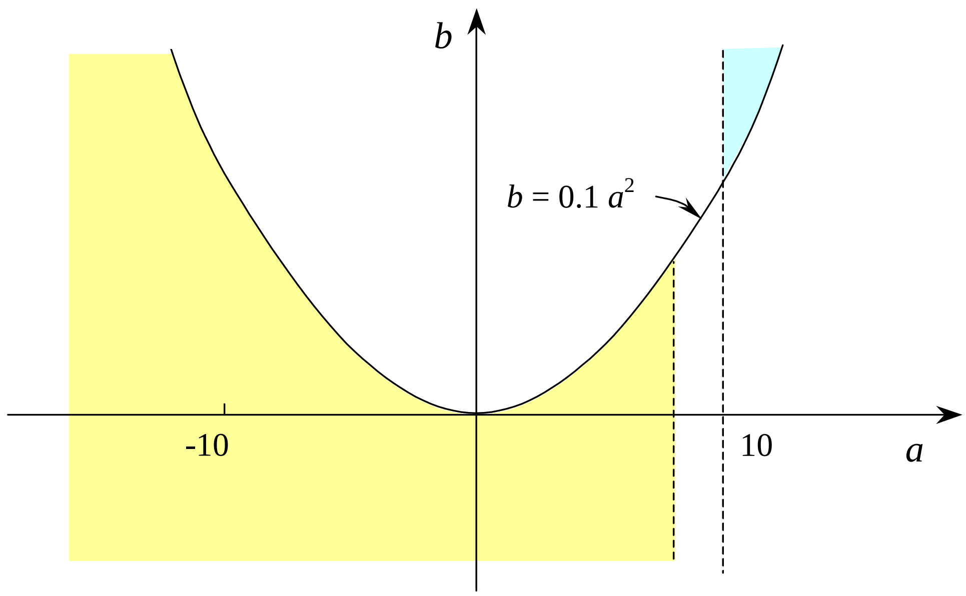
Si dica per quali valori di a e di b i polinomi che seguono, presi individualmente, hanno tutte le radici con parte reale negativa.

$p_1(s; a, b) = (10 - a)\, s^2 + (0.1\, a^2 - b)\, s + 8 - a$
$p_2(s; a, b) = a\, s^4 + 3\, s^3 + 6\, s^2 + 3\, s + b$
$p_3(s; a, b) = s^5 + (a + b)\, s^4 + 6\, s^3 + 12\, s^2 - (a + b)\, s + 4$

Il polinomio $p_1(s; a, b)$ è di secondo grado; quindi, condizione necessaria e sufficiente perchè le sue radici abbiano parte reale negativa è che i coefficienti siano non nulli e di segno concorde; sia cioè:

$$\begin{cases} 10 - a > 0 \\ 0.1\, a^2 - b > 0 \\ 8 - a > 0 \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} 10 - a < 0 \\ 0.1\, a^2 - b < 0 \\ 8 - a < 0 \end{cases}$$

Ogni insieme di diseguaglianze definisce una regione nel piano (a, b) dei parametri. La regione cercata è la riunione delle due, mostrate nella figura che segue.

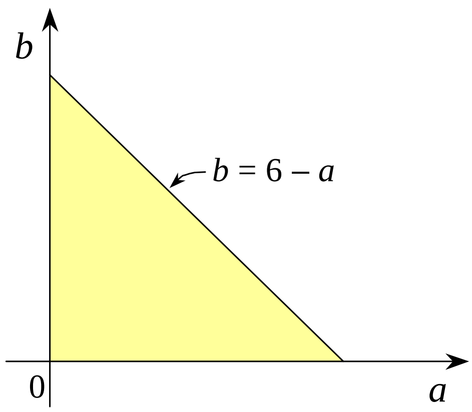


Per $p_2(s;\, a,\, b)$, costruiamo la Tabella di Routh.

a	6	b
3	3	
$\dfrac{18 - 3\,a}{3}$	b	
$\dfrac{3\,(18 - 3\,a - 3\,b)}{18 - 3\,a}$		
b		

Poiché il secondo elemento della prima colonna è positivo, condizione necessaria e sufficiente affinché le radici di $p_2(s;\, a,\, b)$ abbiano parte reale negativa è che sia:

$$\begin{cases} a > 0 \\ 18 - 3\,a > 0 \\ 18 - 3\,a - 3\,b > 0 \\ b > 0 \end{cases}$$



Quanto a $p_3(s;\, a,\, b)$, notiamo che entrambi i coefficienti $a + b$ e $-(a + b)$ devono essere positivi, affinché la condizione necessaria sia soddisfatta. Ciò è palesemente impossibile; quindi, l'insieme dei valori di a e b tali che le radici di $p_3(s;\, a,\, b)$ abbiano parte reale negativa è vuoto.

***Esercizio* 14**

Sapendo che la trasformata di Laplace di $v(t) = cos(\omega\, t)$, per $t \geq 0$ e nullo altrove, è:

$$V(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad ,$$

si calcolino le trasformate di Laplace dei seguenti segnali (nulli per $t < 0$):

$v_1(t) = sin(10\, t)$
$v_2(t) = 3\, sin(10\, t - 1)$
$v_3(t) = 3\, sin(8\, t) - 2\, cos(16\, t + 2)$

Cenno. *Si noti che, per* $t > 0$, $\dot{v}(t) = -\,\omega\, sin(\omega\, t)$; *quindi,* $sin(\omega\, t) = -\,\dot{v}(t)/\omega$. *Inoltre* $v_2(t) = 3\, v_1(t - 0.1)$.

Poiché, per $t > 0$, $w(t) := sin(\omega\, t) = -\,\dot{v}(t)/\omega$,

$$W(s) = -\,(s\, V(s) - v(0))/\omega = \frac{-1}{\omega}\left[\frac{s^2}{s^2+\omega^2} - 1\right] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \quad .$$

Quindi, $V_1(s) = 10/(s^2 + 100)$. Poiché $v_2(t) = 3\, v_1(t - 0.1)$,

$$V_2(s) = 3\, exp(-\,0.1\, s)\, V_1(s) = 30\, \frac{exp(-\,0.1\, s)}{s^2 + 100} \quad .$$

Infine,

$$V_3(s) = \frac{24}{s^2 + 64} - 2\, \frac{s\, exp(s/8)}{s^2 + 256} \quad .$$

***Esercizio* 15**

Si calcolino, ove sia possibile, il valore iniziale e il valore finale di segnali le cui trasformate di Laplace siano date da:

$$V_1(s) = 10\, \frac{1}{s+1} \quad , \quad V_2(s) = -\,2\, \frac{s}{s^2 - 1} \quad , \quad V_3(s) = 5\, \frac{1 + 3\, s}{s\,(1+s)^3} \quad ,$$
$$V_4(s) = \frac{1 + s}{1 - 0.10\, s + 0.25\, s^2} \quad , \quad V_5(s) = \frac{1 - 0.10\, s + 0.25\, s^2}{(1+s)^4} \quad .$$

Si calcolino, quindi, le trasformate delle derivate dei segnali stessi e, infine, i valori inziali di tali derivate.

Per ogni segnale v, adottiamo la notazione seguente:

$$v_0 := \lim_{t \to 0} v(t) \quad , \quad v_\infty := \lim_{t \to \infty} v(t) \quad , \quad w(t) := \dot{v}(t) \quad ;$$

e ricordiamo che il teorema del valore finale richiede che i poli non nulli della trasformata di Laplace abbiano parte reale negativa. Allora,

$$v_{10} := \lim_{s\to\infty} s\, V_1(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{10\, s}{s+1} = 10$$

$$v_{1\infty} := \lim_{s\to 0} s\, V_1(s) = \lim_{s\to 0} \frac{10\, s}{s+1} = 0$$

$$W_1(s) = s\, V_1(s) - v_{10} = \frac{10\, s}{s+1} - 10 = -\frac{10}{s+1}$$

$$w_{10} := \lim_{s\to\infty} s\, W_1(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{-10\, s}{s+1} = -10$$

$$w_{1\infty} := \lim_{s\to 0} s\, W_1(s) = \lim_{s\to 0} \frac{-10\, s}{s+1} = 0 \quad .$$

Analogamente, si trova:

$$v_{20} = -2 \quad , \quad v_{2\infty} = ? \quad , \quad W_2(s) = -2\, \frac{s^2}{s^2-1} + 2 = -\frac{2}{s^2-1} \quad , \quad w_{20} = 0 \quad ; \quad w_{2\infty} = ? \, .$$

$$v_{30} = 0 \quad , \quad v_{3\infty} = 5 \quad , \quad W_3(s) = 5\, \frac{1+3\, s}{(1+s)^3} \quad , \quad w_{30} = 0 \quad ; \quad w_{3\infty} = 0 \, .$$

$$v_{40} = 4 \quad , \quad v_{4\infty} = ? \quad , \quad W_4(s) = \frac{1.4\, s - 4}{1 - 0.10\, s + 0.25\, s^2} \quad , \quad w_{40} = 5.6 \quad ; \quad w_{4\infty} = ? \, .$$

$$v_{50} = 0 \quad , \quad v_{5\infty} = 0 \quad , \quad W_5(s) = \frac{s\,(1 - 0.10\, s + 0.25\, s^2)}{(1+s)^4} \quad , \quad w_{50} = 0.25 \quad ; \quad w_{5\infty} = 0 \, .$$

I valori finali di v_2 e di w_2 potrebbero essere calcolati ricorrendo al metodo di Heaviside. Infatti,

$$V_2(s) = -2\, \frac{s}{s^2-1} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-1} = \frac{A\,(s-1) + B\,(s+1)}{s^2-1} \quad \Rightarrow \quad A = B = -1 \, ;$$

$$v_2(t) = [-e^{-t} - e^{t}]\; sca\; t \quad \Rightarrow \quad v_{2\infty} = -\infty \neq \lim_{s\to 0} s\, V_2(s) = 0$$

$$w_2(t) = [e^{-t} - e^{t}]\; sca\; t \quad \Rightarrow \quad w_{2\infty} = -\infty$$

Analogamente potrebbero essere calcolati $v_{4\infty}$ e $w_{4\infty}$, pur di ricordare che se $V(s) = \dfrac{1}{s^2 + 2\,\zeta\,\omega_n\,s + \omega_n^{\,2}}$ allora $v(t) = \dfrac{1}{\omega_r}\,e^{-\zeta\,\omega n\,t}\,sin(\omega_o\,t)$, $\omega_r := \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$;

se $V(s) = \dfrac{s}{s^2 + 2\,\zeta\,\omega_n\,s + \omega_n^{\,2}}$ allora $v(t) = \dfrac{e^{-\zeta\,\omega n\,t}\,sin(\omega_r\,t + \varphi)}{\sqrt{1-\zeta^2}}$, $tg\,\varphi := \dfrac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$.

Esercizio 16

Si calcoli la funzione di trasferimento di un sistema dinamico lineare tempo-invariante descritto da:

$$A = \begin{bmatrix} -7 & -3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \quad , \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & -2 \end{bmatrix} \quad , \qquad D = 6\ .$$

$$G(s) := C\,(sI - A)^{-1}\,B + D \;:= \frac{1}{det(sI - A)}\; C\,(sI - A)^{*}\,B + D \qquad ;$$

$det(sI - A) = (s + 7)(\,s + 4) + 6 = s^2 + 11\,s + 34$,

$$(sI - A)' = \begin{bmatrix} s+7 & -2 \\ 3 & s+4 \end{bmatrix} \qquad ; \qquad (sI - A)^* = \begin{bmatrix} s+4 & -3 \\ 2 & s+7 \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^*\,B = \begin{bmatrix} -3 \\ s+7 \end{bmatrix} \quad ; \quad C\,(sI - A)^*\,B = -\,9 - 2\,(s + 7)$$

$$G(s) = 6 - \frac{9 + 2\,(s + 7)}{s^2 + 11\,s + 34} = \frac{6\,s^2 + 64\,s + 181}{s^2 + 11\,s + 34}\ .$$

Esercizio 17

Si calcoli la funzione di trasferimento di un sistema dinamico lineare tempo-invariante descritto da:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & -5 & 9 & -7 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 & -7 \end{bmatrix} \quad , \quad D = 1 \quad .$$

Il sistema è in forma canonica di controllo, quindi

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)} + 1$$

con: $a(s) = s^4 + 7\, s^3 – 9\, s^2 + 5\, s – 4$; $b(s) = – 7\, s^3 + 2\, s^2 + 3\, s – 1$. Pertanto,

$$G(s) = \frac{s^4 – 7\, s^2 + 8\, s – 5}{s^4 + 7\, s^3 – 9\, s^2 + 5\, s – 4} \quad .$$

***Esercizio* 18**

Si calcoli la funzione di trasferimento di un sistema dinamico lineare tempo-invariante descritto da:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -10 & 4 & 0 \\ 19 & -23 & 8 & 2 \\ 24 & -28 & 2 & 0 \\ 47 & -52 & 19 & -7 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad D = 0 \quad .$$

Sappiamo che:

$$G(s) := C\,(sI - A)^{-1}\, B + D \;:= \frac{1}{det(sI - A)}\; C\,(sI - A)^{*}\, B \;.$$

Una breve riflessione consente di riconoscere che, in questo caso (grazie alla forma di B e di C), l'unico elemento "utile" della matrice $(sI - A)^*$ è il terzo della seconda riga. Inoltre, la matrice A è la stessa dell'Esercizio 9, quindi

$$det(sI - A) = s^4 + 29\, s^3 + 551\, s^2 + 5589\, s + 20106 \quad .$$

Per altro,

$$(s\,I - A)' \;=\; \begin{bmatrix} s+1 & -19 & -24 & -47 \\ 10 & s+23 & 28 & 52 \\ -4 & -8 & s-2 & -19 \\ 0 & -2 & 0 & s+7 \end{bmatrix}$$

$$(s\,I - A)^{*}_{23} \;=\; -\,det \begin{bmatrix} s+1 & -19 & -47 \\ -4 & -8 & -19 \\ 0 & -2 & s+7 \end{bmatrix} =$$

$$= -\,[-\,8\,(s+1)(\,s+7) - 376 - 38\,(s+1) - 76\,(s+7)]\;\;;$$

$$C\,(sI - A)^{*}\,B = 3\,[-\,8\,(s+1)(\,s+7) - 376 - 38\,(s+1) - 76\,(s+7)] =$$

$$= -\,24\,s^{2} - 534\,s - 3006$$

$$G(s) = -\,\frac{24\,s^{2} + 534\,s + 3006}{s^{4} + 29\,s^{3} + 551\,s^{2} + 5589\,s + 20106}\;\;.$$

***Esercizio* 19**

La funzione di trasferimento $G(s)$ di un sistema dinamico in senso proprio, lineare, tempo-invariante, a un ingresso e un'uscita descritto dalle matrici (A, B, C), è data da:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \qquad , \qquad D(s) := det(sI - A) \qquad , \qquad N(s) := C\,(sI - A)^{*}\,B\;\;.$$

Si dica quali dei seguenti sistemi è stabilizzabile.

$N_1(s) = 5\,s - 15$, $D_1(s) = s^2 - 2\,s + 3$;
$N_2(s) = 10\,s\,(s + 5)$, $D_2(s) = s^5 + 3\,s^4 + 6\,s^3 + 3\,s^2 + s$;
$N_3(s) = 3\,s + 3$, $D_3(s) = s^2 + 4\,s + 3$;
$N_4(s) = 4\,s^2 - 20\,s + 16$, $D_4(s) = s^4 + 7\,s^3 + 15\,s^2 + 13\,s + 4$;
$N_5(s) = -\,3\,s + 12$, $D_5(s) = s^4 + 3\,s^3 - s^2 + 5\,s + 6$.

Indichiamo con S_i il sistema corrispondente ai polinomi N_i e D_i, $i = 1, 2, \ldots, 5$.

Il sistema S_1 è stabilizzabile perchè la radice $\bar{s} = 3$ di N_1 non annulla D_1; infatti, $D_1(3) = 6 \neq 0$.

Il sistema S_2 non è stabilizzabile perchè N_2 e D_2 hanno in comune la radice $\bar{s} = 0$; infatti, $D_2(s) = s\,(s^4 + 3\,s^3 + 6\,s^2 + 3\,s + 1)$.

Il sistema S_3 è stabilizzabile perchè è asintoticamente stabile; infatti, i coefficienti del polinomio caratteristico di secondo grado $D_3(s)$ sono diversi da zero e di segno concorde.

Il sistema S_4 è stabilizzabile perchè è asintoticamente stabile. Infatti, la prima colonna della Tabella di Routh relativa al polinomio caratteristico $D_4(s)$, data da:

1.0000	15.0000	4.0000
7.0000	13.0000	
13.1429	4.0000	
10.8696		
4.0000		

ha elementi non nulli e di segno concorde. Alternativamente, avremmo potuto notare che le radici di $N_4(s)$ sono: $\bar{s}_1 = 1$ e $\bar{s}_2 = 4$; né l'una né l'altra annulla $D_4(s)$.

Il sistema S_5 è stabilizzabile perchè la radice $\bar{s} = 4$ di N_5 non annulla D_5; $D_5(4) = 458$.

Esercizio 20

Si realizzino, sia in forma normale che in forma ingresso-uscita, le seguenti funzioni di trasferimento.

$$G_1(s) = 4\,\frac{s + 1}{s^3 - 5\,s^2 + 8\,s + 2}$$

$$G_2(s) = 10\,\frac{1 + s}{(1 - 5\,s)(1 + 3\,s)(1 + 6\,s)}$$

$$G_3(s) = -\,43\,\frac{s}{s^4 + 3\,s^3 - s^2 + 5\,s + 6}$$

$$G_4(s) = 20\,\frac{s^4 + 12\,s^3 - 4\,s^2 + 3\,s + 20}{s^5 + 3\,s^4 + 6\,s^3 + 3\,s^2 + s + 7}$$

$$G_5(s) = 6\,\frac{s^4 - 5\,s^3 + 9\,s^2 - s + 3}{s^4 + 15\,s^3 - 4\,s^2 + 2\,s + 5}$$

Diamo per prime le realizzazioni in forma normale (più precisamente, in forma canonica di controllo), notando anzitutto che:

$$G_2(s) = 10\,\frac{1 + s}{(1 - 5\,s)(1 + 3\,s)(1 + 6\,s)} = \frac{-1}{9}\,\frac{s + 1}{s^3 + 3/10\,s^2 - 2/45\,s - 1/90}$$

$$G_5(s) = 6\,\frac{s^4 - 5\,s^3 + 9\,s^2 - s + 3}{s^4 + 15\,s^3 - 4\,s^2 + 2\,s + 5} = 6 - 6\,\frac{20\,s^3 - 13\,s^2 + 3\,s + 2}{s^4 + 15\,s^3 - 4\,s^2 + 2\,s + 5}\ .$$

Allora (quando non è indicato, $D_i = 0$),

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -8 & 5 \end{bmatrix}\ ,\quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\ ,\quad C_1 = [4 \quad 4 \quad 0]\ ;$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/90 & 2/45 & -3/10 \end{bmatrix}\ ,\quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\ ,\quad C_2 = -\,[1/9 \quad 1/9 \quad 0]\ ;$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -6 & -5 & 1 & -3 \end{bmatrix}\ ,\quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\ ,\quad C_3 = [0 \quad -43 \quad 0 \quad 0]\ ;$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -7 & -1 & -3 & -6 & -3 \end{bmatrix}\ ,\quad B_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\ ,\quad C_4 = 20\,[20 \quad 3 \quad -4 \quad 12 \quad 1]\ ;$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -5 & -2 & 4 & -15 \end{bmatrix}\ ,\quad B_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\ ,\quad C_5 = -\,6\,[2 \quad 3 \quad -13 \quad 20]\ ,\quad D_5 = 6\ .$$

Possibili realizzazioni in forma ingresso-uscita sono invece le seguenti.

1) $\quad y^{(3)}(t) - 5\,y^{(2)}(t) + 8\,y^{(1)}(t) + 2\,y(t) = 4\,[u^{(1)}(t) + u(t)]$

2) $y^{(3)}(t) + \frac{9}{20}\, y^{(2)}(t) - \frac{1}{15}\, y^{(1)}(t) - \frac{1}{60}\, y(t) = \frac{-1}{6}\ [u^{(1)}(t) + u(t)]$

3) $y^{(4)}(t) + 3\, y^{(3)}(t) - y^{(2)}(t) + 5\, y^{(1)}(t) + 6\, y(t) = -\, 43\, u^{(1)}(t)$

4) $y^{(5)}(t) + 3\, y^{(4)}(t) + 6\, y^{(3)}(t) + 3\, y^{(2)}(t) + y^{(1)}(t) + 7\, y(t) =$
$= 20\, [u^{(4)}(t) + 12\, u^{(3)}(t) - 4\, u^{(2)}(t) + 3\, u^{(1)}(t) + 20\, u(t)]$

5) $y^{(4)}(t) + 15\, y^{(3)}(t) - 4\, y^{(2)}(t) + 2\, y^{(1)}(t) + 5\, y(t) =$
$= 6\, [u^{(4)}(t) - 5\, u^{(3)}(t) + 9\, u^{(2)}(t) - u^{(1)}(t) + 3\, u(t)]$.