Fondamenti di automatica

Possibili soluzioni degli Esercizi 1-8

Esercizio 1

Si determini il modello lineare δS tangente al sistema non dinamico

$$\boldsymbol{S}: \begin{cases} \ln z(t) - u(t) = 0 \\ y(t) = z^2(t) + u^2(t) \end{cases}$$

in un punto di lavoro corrispondente all'ingresso costante $u(t) = 1$.

In corrispondenza di $u(t) = \bar{u} = 1$, si ha:

$$\ln z = 1 \quad \Rightarrow \quad \bar{z} = e \qquad ; \qquad \bar{y} = \bar{z}^2 + \bar{u}^2 = e^2 + 1 \ .$$

e, ponendo: $\ln z - u := \varphi(z, u)$, $z^2 + u^2 := \psi(z, u)$, il modello lineare δS, tangente a S nel punto di lavoro corrispondente a $u(t) = \bar{u} = 1$, è dato da:

$$\delta\boldsymbol{S}: \begin{cases} M\, \delta z(t) + N\, \delta u(t) = 0 \\ \delta y(t) = P\, \delta z(t) + Q\, \delta u(t) \end{cases}$$

dove:

$$M := \frac{\partial\varphi}{\partial z}(\bar{z}, \bar{u}) = e^{-1} \qquad , \qquad N := \frac{\partial\varphi}{\partial u}(\bar{z}, \bar{u}) = -1 \ ,$$

$$P := \frac{\partial\psi}{\partial z}(\bar{z}, \bar{u}) = 2\, e \qquad , \qquad Q := \frac{\partial\psi}{\partial u}(\bar{z}, \bar{u}) = 2 \ .$$

***Esercizio* 2**

Si descriva il sistema non dinamico:

$$
\boldsymbol{S}: \quad \begin{cases} 5\, z_1(t) - 3\, u_1(t) + 4\, u_2(t) = 0 \\ 2\, z_1(t) + z_2(t) + 10\, u_2(t) = 0 \\ 4\, z_2(t) - 5\, z_3(t) + u_1(t) - 7\, u_2(t) = 0 \\ y(t) = z_1(t) + 2\, z_2(t) \end{cases}
$$

in forma compatta usando la notazione vettoriale. Si determini, quindi, un punto di lavoro di S corrispondente all'ingresso costante $u_1(t) = 5$, $u_2(t) = 0$.

____

Sia: $z := [z_1 \;\; z_2 \;\; z_3]'$, $u := [u_1 \;\; u_2]'$ (l'apice denota il trasposto) e inoltre:

$$
M := \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -5 \end{bmatrix} \quad , \qquad N := \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 10 \\ 1 & -7 \end{bmatrix} \quad , \qquad P := [1 \;\; 2 \;\; 0] \,.
$$

Allora,

$$
S: \quad \begin{cases} M\, z(t) + N\, u(t) = 0 \\ y(t) = P\, z(t) \quad . \end{cases}
$$

Il valore di z corrispondente a $u(t) = \overline{u} = [5 \;\; 0]'$ si ottiene risolvendo (in uno dei vari modi possibili) l'equazione:

$M\, z = -N\, \overline{u} = [-15 \;\; 0 \;\; 5]'$.

Poiché M è non singolare ($det\, M = -25$) la soluzione è unica ed è data da:

$\overline{z} = [3 \;\; -6 \;\; -3.8]'$.

Corrispondentemente, $\overline{y} = P\, \overline{z} = -9$.

***Esercizio* 3**

Con riferimento al sistema

$$\boldsymbol{S}: \quad \begin{cases} 4\, z_1(t) + z_2(t) - 0.1\, u^3(t) = 0 \\ 0.2\, z_1^2(t) + z_2(t) = 0 \\ y_1(t) = z_1(t) + 2\, z_2(t) - \sqrt{u(t)} \\ y_2(t) = z_1^2(t)\, z_2(t) \end{cases}$$

***a*)** descrivere S in forma compatta usando la notazione vettoriale;

***b*)** determinare il modello lineare δS tangente a S in un punto di lavoro corrispondente all'ingresso costante $u(t) = 3$.

***a*)** Ponendo: $z := [z_1 \quad z_2]'$, $y := [y_1 \quad y_2]'$ e inoltre:

$\varphi_1(z, u) := 4\, z_1 + z_2 - 0.1\, u^3$
$\varphi_2(z, u) := 0.2\, z_1^2 + z_2$

$\psi_1(z, u) := z_1 + 2\, z_2 - \sqrt{u}$
$\psi_2(z, u) := z_1^2\, z_2$

$\varphi(z, u) := [\varphi_1(z, u) \quad \varphi_2(z, u)]'$, $\psi(z, u) := [\psi_1(z, u) \quad \psi_2(z, u)]'$, si ha:

$$\boldsymbol{S}: \quad \begin{cases} \varphi(z(t), u(t)) = 0 \\ y(t) = \psi(z(t), u(t)) \end{cases} \quad .$$

***b*)** Un punto di lavoro di S corrispondente a $u(t) = \overline{u} = 3$ (se esiste) si ottiene risolvendo anzitutto l'equazione $\varphi(z, \overline{u}) = 0$; cioè:

$4\, z_1 + z_2 - 2.7 = 0$
$0.2\, z_1^2 + z_2 = 0 \quad .$

Dalla seconda equazione, si ha: $z_2 = -\, 0.2\, z_1^2$. Sostituendo nella prima:

$0.2\, z_1^2 - 4\, z_1 + 2.7 = 0$.

Le soluzioni di questa equazione sono due: $\overline{z}_{1a} = 19.3005$, $\overline{z}_{1b} = 0.6995$. Corrispondentemente, $\overline{z}_{2a} = -74.5019$, $\overline{z}_{2b} = -0.0979$. Fissiamo l'attenzione sul punto di lavoro $\overline{z} = \overline{z}_a = [19.3005 \quad -74.5019]'$.

Il modello lineare δS, tangente a S nel punto di lavoro considerato, è dato da:

$$\boldsymbol{\delta S :} \quad \begin{cases} M\, \delta z(t) + N\, \delta u(t) = 0 \\ \delta y(t) = P\, \delta z(t) + Q\, \delta u(t) \end{cases}$$

dove:

$$M := \frac{\partial \varphi}{\partial z}(\overline{z}, \overline{u}) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0.4\, \overline{z}_1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7.7202 & 1 \end{bmatrix} ,$$

$$N := \frac{\partial \varphi}{\partial u}(\overline{z}, \overline{u}) = \begin{bmatrix} -0.3\, \overline{u}^2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.7 \\ 0 \end{bmatrix} ,$$

$$P := \frac{\partial \psi}{\partial z}(\overline{z}, \overline{u}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2\, \overline{z}_1\, \overline{z}_2 & \overline{z}_1^{\,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2875.8 & 372.5093 \end{bmatrix} ,$$

$$Q := \frac{\partial \psi}{\partial u}(\overline{z}, \overline{u}) = \begin{bmatrix} \dfrac{-1}{2\sqrt{\overline{u}}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2887 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

***Esercizio* 4**

Si dica se il sistema

$$\boldsymbol{S}: \begin{cases} \dot{x}(t) = -\,t^2\,x(t) + 5\,u(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases}$$

è lineare o non lineare, variante o invariante nel tempo, dinamico in senso proprio o no.

____

Il sistema S è lineare, perchè da una parte $\dot{x}$ dipende linearmente da x e da u, dall'altra y dipende linearmente da x (e da u!); è tempo-variante, perchè i valori assunti da x e u all'istante t non sono sufficienti, da soli, a determinare $\dot{x}$ (infatti, è necessario conoscere anche t); è dinamico in senso proprio, perchè y non dipende direttamente da u.

***Esercizio* 5**

Si descriva il sistema

$$\boldsymbol{S}: \begin{cases} \dot{x}_1(t) = 2\,x_1(t) - 4\,u_1(t) + u_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = 5\,x_1(t) + 3\,x_2(t) + 10\,u_2(t) \\ \dot{x}_3(t) = 4\,x_2(t) - 6\,x_3(t) + u_1(t) - 8\,u_2(t) \\ y(t) = x_1(t) + 2\,x_2(t) \end{cases}$$

in forma compatta usando la notazione vettoriale e si determini (se esiste) una condizione di equilibrio di S corrispondente a: $u_1(t) = 1$, $u_2(t) = -1$.

____

Sia: $x := [x_1 \quad x_2 \quad x_3]'$, $u := [u_1 \quad u_2]$ e inoltre:

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -6 \end{bmatrix} \quad , \quad B := \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 10 \\ 1 & -8 \end{bmatrix} \quad , \quad C := [1 \quad 2 \quad 0] \;.$$

Allora,

$$\boldsymbol{S}: \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) \\[2ex] y(t) = C\,x(t) \quad . \end{cases}$$

Gli stati di equilibrio di S corrispondenti a $u(t) = \bar{u} = [1 \quad -1]'$ sono le soluzioni dell'equazione:

$A\,x = -\,B\,\bar{u} = [5 \quad 10 \quad -9]'$.

Poiché A è non singolare (A è triangolare e non ci sono elementi nulli sulla diagonale principale), esiste un'unica soluzione:

$\bar{x} = [2.5000 \quad -0.8333 \quad 0.9444]'$.

Corrispondentemente, $\bar{y} = C\,\bar{x} = 0.833$.

Esercizio 6

Si determini il modello lineare δS tangente al sistema

$$\boldsymbol{S}: \begin{cases} \dot{x}(t) = -\,x(t)\,(1 - 4\,u(t)) + 2\,u(t) \\[2ex] y(t) = x^3(t) - u(t) \end{cases}$$

in una condizione di equilibrio corrispondente all'ingresso costante $u(t) = 0.5$.

Determiniamo anzitutto (se esiste) una condizione di equilibrio corrispondente a

$u(t) = \bar{u} = 0.5$.

Ogni eventuale stato di equilibrio di S (corrispondente a $\bar{u}$) è soluzione di:

$-\,x\,(1 - 4\,\bar{u}) + 2\,\bar{u} = 0$;

quindi, si ha (come unica soluzione): $\bar{x} = -1$ e $\bar{y} = \bar{x}^3 - \bar{u} = -1.5$.

Il sistema lineare δS, tangente a S nella condizione di equilibrio considerata, è dato da:

$$\delta \boldsymbol{S} : \quad \begin{cases} \delta\dot{x}(t) = A\,\delta x(t) + B\,\delta u(t) \\ \delta y(t) = C\,\delta x(t) + D\,\delta u(t) \end{cases}$$

dove, avendo posto: $f(x, u) := -x\,(1 - 4\,u) + 2\,u$ e $g(x, u) := x^3 - u$, si ha:

$$A := \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{u}) = -(1 - 4\,\bar{u}) = 1 \quad , \qquad B := \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x}, \bar{u}) = 4\,\bar{x} + 2 = -2 \quad ,$$

$$C := \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x}, \bar{u}) = 3\,\bar{x}^2 = 3 \quad , \qquad D := \frac{\partial g}{\partial u}(\bar{x}, \bar{u}) = -1 \quad .$$

***Esercizio* 7**

Con riferimento al sistema

$$\boldsymbol{S} : \begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t)\,u(t) - x_2(t) + 3 \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) - x_2^2(t) \\ y(t) = x_2(t) \end{cases}$$

***a*)** si descriva S in forma compatta usando la notazione vettoriale;

***b*)** si determini il modello lineare δS tangente a S in una condizione di equilibrio corrispondente all'ingresso costante $u(t) = 0$.

***a*)** Se si pone: $x := [x_1 \quad x_2]'$, ed inoltre:

$$f(x, u) := \begin{bmatrix} f_1(x, u) \\ f_2(x, u) \end{bmatrix} \quad , \quad f_1(x, u) := -x_1\,u - x_2 + 3 \quad , \quad f_2(x, u) := x_1 - x_2^2 \quad ,$$

$$g(x) := x_2 \quad ,$$

si può scrivere:

$$S: \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t)) \end{cases} .$$

b) Determiniamo anzitutto (se esiste) una condizione di equilibrio di S corrispondente all'ingresso costante $u(t) = \bar{u} = 0$. Ogni eventuale stato di equilibrio di S (corrispondente a $\bar{u}$) è soluzione di:

$$\begin{cases} -x_1 \bar{u} - x_2 + 3 = 0 \\ x_1 - x_2^2 = 0 \end{cases}$$

E' facile riconoscere che esiste qui un'unica soluzione $\bar{x} := [9 \quad 3]'$. Ad essa corrisponde il valore costante dell'uscita $\bar{y} = \bar{x}_2 = 3$.

Il modello lineare δS tangente a S nella condizione di equilibrio considerata è dato da:

$$\delta S: \begin{cases} \delta\dot{x}(t) = A\, \delta x(t) + B\, \delta u(t) \\ \delta y(t) = C\, \delta x(t) \end{cases}$$

dove:

$$A := \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{u}) = \begin{bmatrix} -\bar{u} & -1 \\ 1 & -2\,\bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}, \quad B := \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x}, \bar{u}) = \begin{bmatrix} -\bar{x}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C := \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x}, \bar{u}) = [0 \quad 1] \quad .$$

Esercizio 8

Con riferimento al sistema

$$S: \begin{cases} \dot{x}_1(t) = \ln x_2(t) + 3\, u(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\, x_1(t)\, x_2(t) + u(t)\, x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = x_1(t) + x_2(t) - x_3(t) \\ y(t) = \sin(x_1(t) + x_3(t)) \end{cases}$$

***a*)** si descriva S in forma compatta usando la notazione vettoriale;

***b*)** si determini il modello lineare δS tangente a S in una condizione di equilibrio corrispondente all'ingresso costante $u(t) = -1$.

***a*)** Se si pone $x := [x_1 \quad x_2 \quad x_3]'$, ed inoltre $f := [\, f_1 \quad f_2 \quad f_3]'$, con:

$$f_1(x, u) := ln\, x_2 + 3\, u$$
$$f_2(x, u) := -x_1\, x_2 + u\, x_3$$
$$f_3(x, u) := x_1 + x_2 - x_3 \qquad ,$$

e infine:

$$g(x) := \; sin(x_1 + x_3) \qquad ,$$

allora

$$\boldsymbol{S} : \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ \\ y(t) = g(x(t)) \end{cases} \qquad .$$

***b*)** Determiniamo anzitutto (se esiste) una condizione di equilibrio di S corrispondente all'ingresso costante $u(t) = \bar{u} = -1$. Ogni eventuale stato di equilibrio di S (corrispondente a $\bar{u}$) è soluzione di:

$$\begin{cases} ln\, x_2 + 3\, \bar{u} = 0 \\ -x_1\, x_2 + \bar{u}\, x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \qquad .$$

E' relativamente facile riconoscere che l'unica soluzione è data da

$$\bar{x} := \begin{bmatrix} \dfrac{-e^3}{1+e^3} \\ e^3 \\ \dfrac{e^6}{1+e^3} \end{bmatrix} \qquad .$$

Ad essa corrisponde il valore costante dell'uscita $\bar{y} = sin(\bar{x}_1 + \bar{x}_3) = sin\, \dfrac{e^6 - e^3}{1 + e^3}$.

Il modello lineare δS tangente a S nella condizione di equilibrio considerata è dato da:

$$\boldsymbol{\delta S} : \quad \begin{cases} \delta\dot{x}(t) = A\, \delta x(t) + B\, \delta u(t) \\ \\ \delta y(t) = C\, \delta x(t) \end{cases}$$

dove:

$$A := \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{u}) = \begin{bmatrix} 0 & \bar{x}_2^{-1} & 0 \\ -\bar{x}_2 & -\bar{x}_1 & \bar{u} \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & e^{-3} & 0 \\ -e^3 & \dfrac{e^3}{1+e^3} & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad ,$$

$$B := \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x}, \bar{u}) = \begin{bmatrix} 3 \\ \\ \bar{x}_3 \\ \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ \dfrac{e^6}{1+e^3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C := \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x}, \bar{u}) = [cos(\bar{x}_1 + \bar{x}_3) \quad 0 \quad cos(\bar{x}_1 + \bar{x}_3)] =$$
$$= \left[cos\, \frac{e^6 - e^3}{1+e^3} \quad 0 \quad cos\, \frac{e^6 - e^3}{1+e^3} \right].$$

$$e^3 = 20.0855, \quad e^{-3} = 0.0498, \quad \frac{e^3}{1+e^3} = 0.9526, \quad \frac{e^6}{1+e^3} = 19.1330$$

$$sin\, \frac{e^6 - e^3}{1+e^3} = -\,0.6203 \quad , \quad cos\, \frac{e^6 - e^3}{1+e^3} = 0.7843 \ .$$