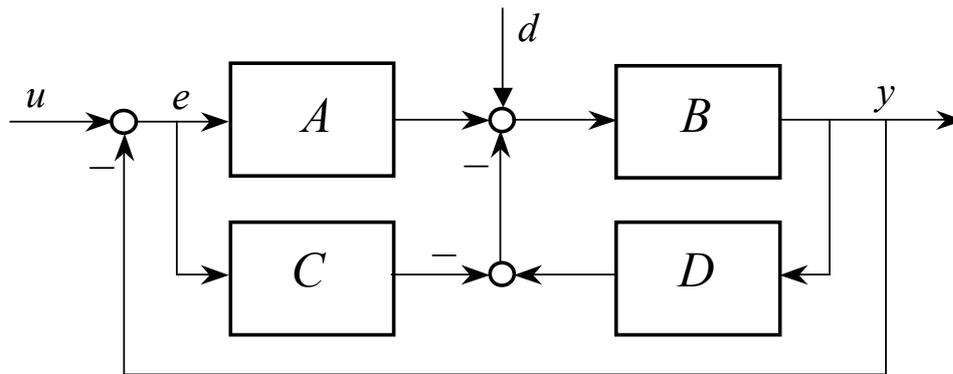


## Fondamenti di automatica

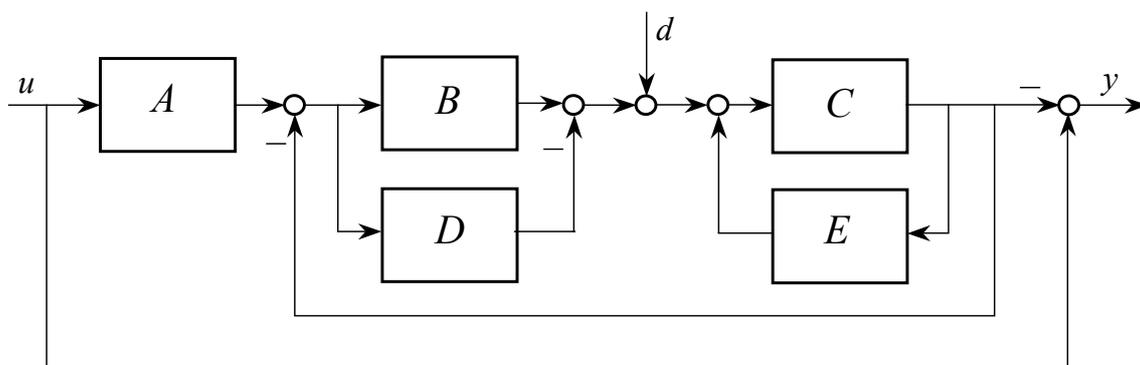
### Esercizio 21

Calcolare le funzioni di trasferimento da  $u$  a  $y$  e da  $d$  a  $e$  nel seguente schema a blocchi.



### Esercizio 22

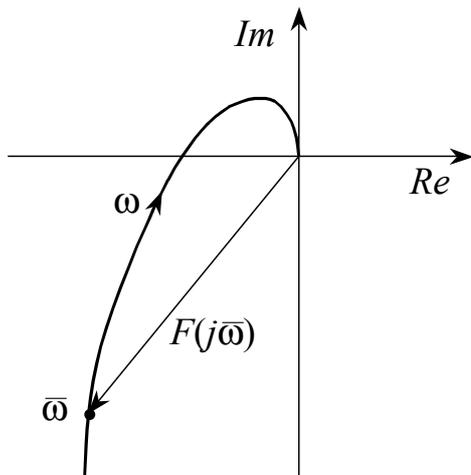
Calcolare le funzioni di trasferimento da  $u$  a  $y$  e da  $d$  a  $y$  nel seguente schema a blocchi.



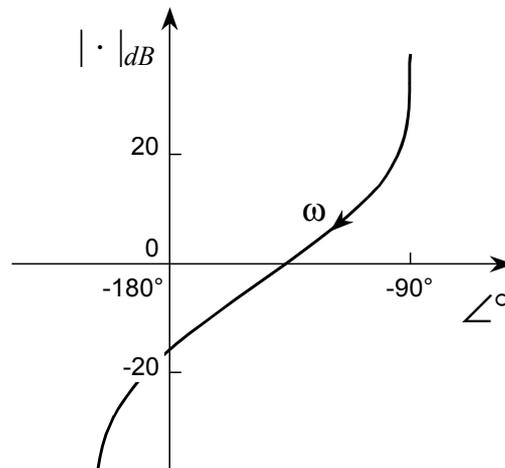
## CALCOLO E RAPPRESENTAZIONE DELLA RISPOSTA IN FREQUENZA

La risposta in frequenza associata ad una funzione di trasferimento  $F(s)$ , vale a dire l'immagine attraverso  $F(\cdot)$  del semiasse immaginario positivo ovvero  $\{F(j\omega), \omega \geq 0\}$ , può essere rappresentata in vari modi.

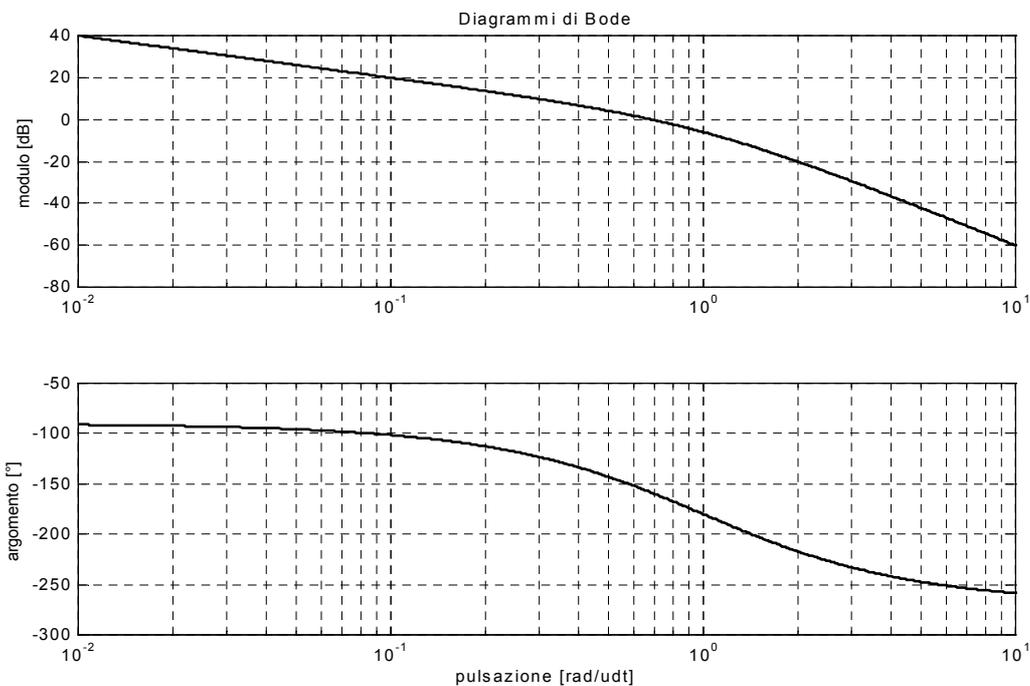
A seconda del problema da trattare, può essere più conveniente il ricorso ad una piuttosto che all'altra rappresentazione. Nel seguito, l'attenzione si concentrerà prevalentemente sulla rappresentazione di Bode, particolarmente efficace ed espressiva in sede di progetto, soprattutto in una sua versione approssimata valida per funzioni di trasferimento razionali note in *forma fattorizzata*.



*Rappresentazione polare*



*Rappresentazione di Nichols*



*Rappresentazione di Bode*

## Polinomi e funzioni razionali in forma fattorizzata

$$p(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n = (s + r_1)(s + r_2) \dots (s + r_n)$$

Le radici  $(-r_i, i = 1, 2, \dots, n)$  sono reali o, a coppie, complesse coniugate.

- Se  $-r$  è una radice reale,  $\tau := \frac{1}{r}$  è detta *costante di tempo* (di  $-r$ ):

$$(s + r) = r (s \tau + 1) .$$

- Per le radici complesse coniugate, si preferisce di solito una rappresentazione diversa, basata sull'impiego di parametri reali.

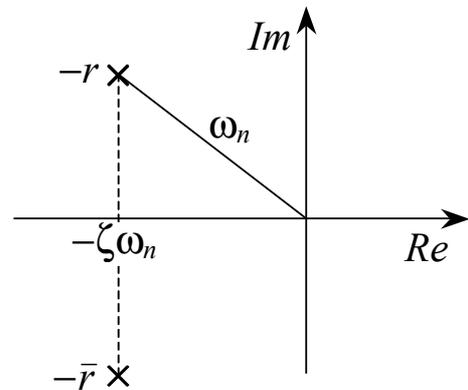
Se  $-r$  e  $-\bar{r}$  sono radici complesse coniugate;  
allora:

$$\begin{aligned} (s + r)(s + \bar{r}) &= s^2 + (r + \bar{r}) s + r \bar{r} = \\ &:= s^2 + 2 \zeta \omega_n s + \omega_n^2 = \\ &= \omega_n^2 \left( \frac{s^2}{\omega_n^2} + 2 \zeta \frac{s}{\omega_n} + 1 \right) \end{aligned}$$

$\omega_n$  : *pulsazione naturale*

$\zeta$  : *fattore di smorzamento*

del *modo* associato alla coppia  $(-r, -\bar{r})$ .



Conseguentemente, le *funzioni di trasferimento in forma fattorizzata* possono assumere due forme distinte, a seconda che, nei fattori di primo o di secondo grado, sia unitario il coefficiente della potenza più elevata di  $s$  piuttosto che il termine noto.

$$\begin{aligned} F(s) &= \rho \frac{\prod_h (s + z_h)}{\prod_k (s + p_k)} \frac{\prod_i (s^2 + 2 \hat{\zeta}_i \hat{\omega}_{ni} s + \hat{\omega}_{ni}^2)}{\prod_r (s^2 + 2 \zeta_r \omega_{nr} s + \omega_{nr}^2)} = \\ &= \frac{\mu}{s^g} \frac{\prod_h (1 + s T_h)}{\prod_k (1 + s T_k)} \frac{\prod_i (1 + 2 \hat{\zeta}_i \frac{s}{\hat{\omega}_{ni}} + \frac{s^2}{\hat{\omega}_{ni}^2})}{\prod_r (1 + 2 \zeta_r \frac{s}{\omega_{nr}} + \frac{s^2}{\omega_{nr}^2})} \end{aligned}$$

Il parametro  $\rho$  che compare nella prima forma si chiama *costante di trasferimento*, mentre i parametri  $\mu$  e  $g$  che compaiono nella seconda si chiamano *guadagno* e *tipo*, rispettivamente (della funzione di trasferimento). Una breve riflessione consente di riconoscere che  $g$  può essere interpretato come il numero di “integratori” (se positivo) o di “derivatori” (se negativo) in cascata presenti nella funzione di trasferimento. Si noti inoltre che il termine guadagno viene a volte disinvoltamente usato come sinonimo di “modulo della risposta in frequenza”, oppure di “risposta in frequenza”, o anche di “funzione di trasferimento”. Questa pratica non verrà seguita nella trattazione che segue.

### ***Risposta in frequenza di funzioni razionali in forma fattorizzata***

Con riferimento alla forma che mette in evidenza le costanti di tempo, si ha:

$$F(j\omega) = \frac{\mu}{(j\omega)^g} \frac{\prod_h (1 + j\omega T_h)}{\prod_k (1 + j\omega T_k)} \frac{\prod_i \left(1 + 2j\zeta_i \frac{\omega}{\hat{\omega}_{ni}} - \frac{\omega^2}{\hat{\omega}_{ni}^2}\right)}{\prod_r \left(1 + 2j\zeta_r \frac{\omega}{\omega_{nr}} - \frac{\omega^2}{\omega_{nr}^2}\right)} ;$$

quindi:

$$|F(j\omega)| = \frac{|\mu|}{\omega^g} \frac{\prod_h |1 + j\omega T_h|}{\prod_k |1 + j\omega T_k|} \frac{\prod_i \left|1 + 2j\zeta_i \frac{\omega}{\hat{\omega}_{ni}} - \frac{\omega^2}{\hat{\omega}_{ni}^2}\right|}{\prod_r \left|1 + 2j\zeta_r \frac{\omega}{\omega_{nr}} - \frac{\omega^2}{\omega_{nr}^2}\right|} ;$$

ponendo, per ogni  $M > 0$ ,  $M_{dB} := 20 \log M$ , si ha:

$$|F(j\omega)|_{dB} = |\mu|_{dB} - g 20 \log(\omega) + \sum_h |1 + j\omega T_h|_{dB} - \sum_k |1 + j\omega T_k|_{dB} + \\ + \sum_i \left|1 + 2j\zeta_i \frac{\omega}{\hat{\omega}_{ni}} - \frac{\omega^2}{\hat{\omega}_{ni}^2}\right|_{dB} - \sum_r \left|1 + 2j\zeta_r \frac{\omega}{\omega_{nr}} - \frac{\omega^2}{\omega_{nr}^2}\right|_{dB}$$

$$\angle^\circ F(j\omega) = \angle^\circ \mu - g 90 + \sum_h \angle^\circ(1 + j\omega T_h) - \sum_k \angle^\circ(1 + j\omega T_k) + \\ + \sum_i \angle^\circ\left(1 + 2j\zeta_i \frac{\omega}{\hat{\omega}_{ni}} - \frac{\omega^2}{\hat{\omega}_{ni}^2}\right) - \sum_r \angle^\circ\left(1 + 2j\zeta_r \frac{\omega}{\omega_{nr}} - \frac{\omega^2}{\omega_{nr}^2}\right) .$$

Si tratta quindi, in via preliminare, di esaminare in dettaglio l'andamento del modulo (in  $dB$ ) e dell'argomento (in gradi) della risposta in frequenza relativa a tre sole *funzioni (o fattori) elementari*:

$$\begin{aligned}
 1) \quad F(s) &= \frac{\mu}{s^g}, & F(j\omega) &= \frac{\mu}{(j\omega)^g} \\
 2) \quad F(s) &= 1 + s T, & F(j\omega) &= 1 + j \omega T \\
 3) \quad F(s) &= 1 + 2 \zeta \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}, & F(j\omega) &= 1 + 2 \zeta \frac{j\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}
 \end{aligned}$$

### Diagrammi di Bode (modulo e argomento) dei fattori elementari

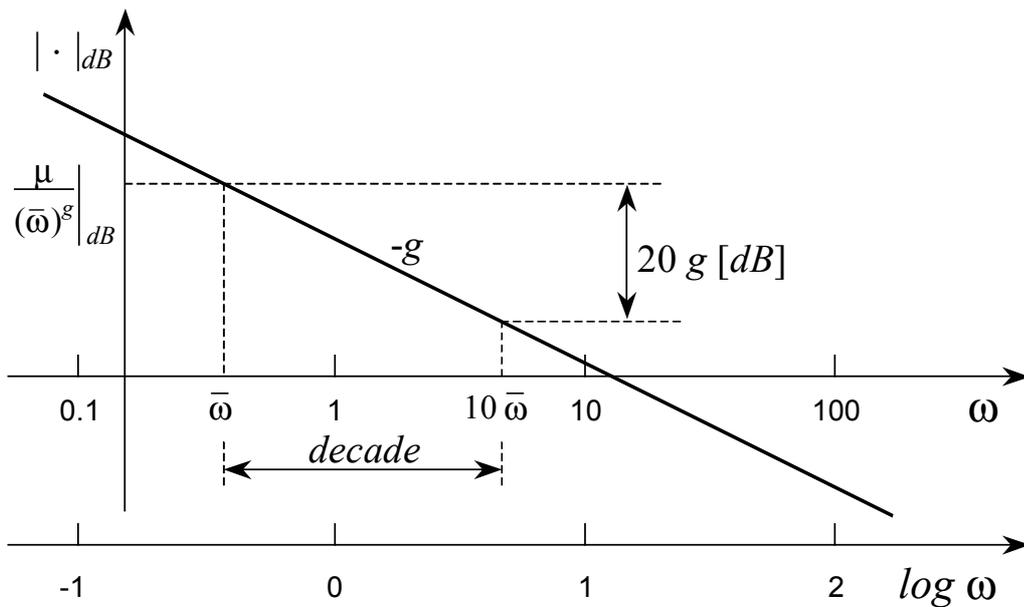
#### A) Modulo

$$1) \quad F(s) = \frac{\mu}{s^g}, \quad |F(j\omega)| = \frac{|\mu|}{\omega^g}; \quad \boxed{|F(j\omega)|_{dB} = |\mu|_{dB} - g \cdot 20 \log \omega}$$

Se sull'asse  $\omega$  si adotta una scala logaritmica,  $|F(\cdot)|_{dB}$  è palesemente una retta. Sull'asse  $\log(\omega)$ , si chiama *decade* la distanza di  $\bar{\omega}$  da  $10 \bar{\omega}$  (qualunque sia  $\bar{\omega}$ ). La retta

$$|F(j\omega)|_{dB} = |\mu|_{dB} - g \cdot 20 \log(\omega)$$

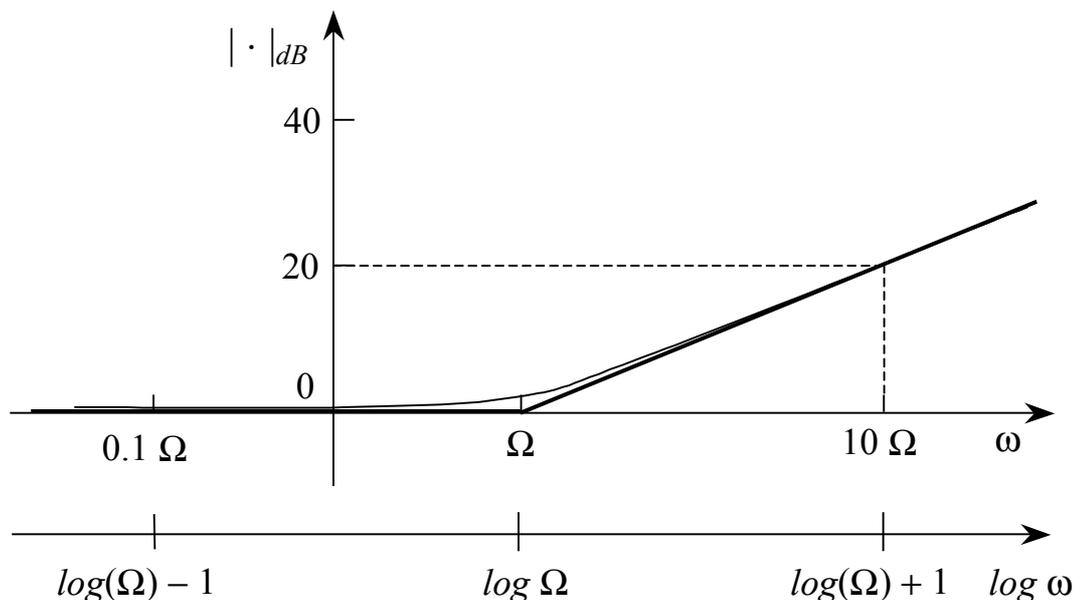
ha una pendenza pari a  $-20 g$  [dB/decade]. Adottando  $20$  dB/decade come *pendenza unitaria*, diremo che la retta in questione ha pendenza  $-g$ . Per tracciarla, basta determinarne un punto; ad esempio, per  $\omega=1$ ,  $|F(j)|_{dB} = |\mu|_{dB}$ .



$$2) \quad F(s) = 1 + s T \quad ; \quad |F(j\omega)| = |1 \pm j \frac{\omega}{\Omega}| \quad , \quad \Omega := \frac{1}{|T|}$$

$$|F(j\omega)| \approx \begin{cases} 1 & , \quad \omega \ll \Omega \\ \frac{\omega}{\Omega} & , \quad \omega \gg \Omega \end{cases} \quad |F(j\omega)|_{dB} \approx \begin{cases} 0 & , \quad \omega \ll \Omega \\ 20 \log \frac{\omega}{\Omega} & , \quad \omega \gg \Omega \end{cases}$$

$$20 \log \frac{\omega}{\Omega} = 20 [\log \omega - \log \Omega] \rightarrow \text{retta con pendenza unitaria}$$



Per avere un'idea della differenza fra diagramma asintotico e diagramma esatto, si noti che:

$$|F(j\omega)| = \begin{cases} 1.0050 & , \quad \omega = 0.1 \Omega \\ \sqrt{2} & , \quad \omega = \Omega \\ 10.0499 & , \quad \omega = 10 \Omega \end{cases} \quad |F(j\omega)|_{dB} = \begin{cases} 0.0432 & , \quad \omega = 0.1 \Omega \\ 3 & , \quad \omega = \Omega \\ 20.0432 & , \quad \omega = 10 \Omega \end{cases}$$

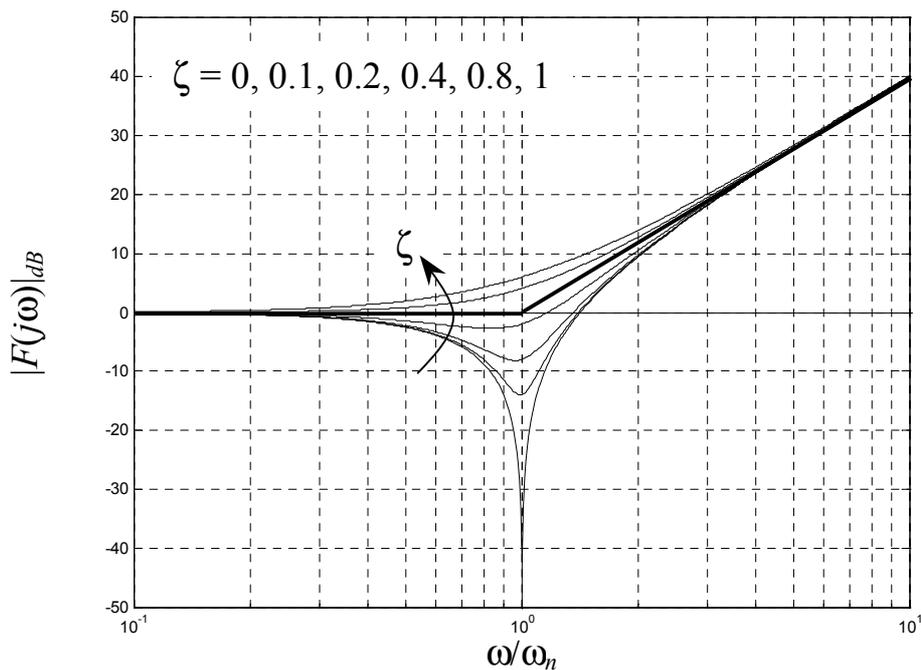
$$3) \quad F(s) = 1 + 2 \zeta \left( \frac{s}{\omega_n} \right) + \left( \frac{s}{\omega_n} \right)^2 \quad , \quad |F(j\omega)| = \sqrt{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + 4 \zeta^2 (\omega/\omega_n)^2}$$

Il modulo di  $F(j\omega)$  non risente del segno di  $\zeta$ ; quindi, possiamo limitarci a considerare valori positivi di  $\zeta$  non superiori a 1 (per  $|\zeta| > 1$ , le radici sono reali e distinte; nel qual caso, è preferibile la forma che mette in evidenza le due costanti di tempo:  $F(s) = (1 + s T_1)(1 + s T_2)$ ).

Se  $\zeta = 1$ ,  $F(s)$  ha radici reali coincidenti, con pulsazione d'angolo pari a  $\omega_n$ :

$$F(s) = \left[1 + \left(\frac{s}{\omega_n}\right)\right]^2 := (1 + s \tau_n)^2 \quad , \quad \tau_n := \frac{1}{\omega_n} ;$$

quindi, il diagramma asintotico (in grassetto) e quello esatto (per  $\zeta = 1$ ) hanno l'andamento mostrato nella figura che segue.



- Al diminuire di  $\zeta$ , il diagramma esatto tende ad affossarsi in prossimità di  $\omega_n$ .
- Se  $\zeta > 0.26 \cong 1/4$ , il valore assoluto della differenza fra il diagramma vero e quello asintotico relativo a due costanti di tempo reali pari a  $\tau_n$  non supera 6 dB. Confondere il diagramma vero con quello asintotico comporta quindi un errore non superiore a quello che si commette nel caso di radici reali.
- Se  $\zeta$  assume valori (positivi) minori di 0.26, lo scostamento del diagramma vero da quello asintotico può diventare molto grande (in prossimità di  $\omega_n$ ).

## B) Argomento (o fase)

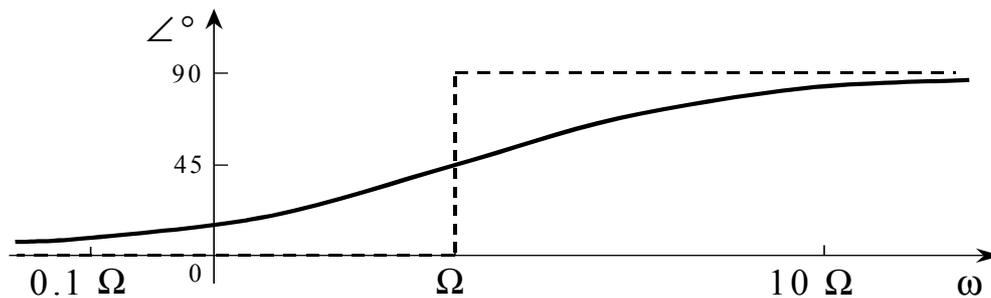
$$1) \quad F(s) = \frac{\mu}{s^g} \quad , \quad F(j\omega) = \frac{\mu}{(j\omega)^g} \quad ;$$

$$\angle^\circ F(j\omega) = \angle^\circ \mu - 90 g \quad , \quad \angle^\circ \mu := \begin{cases} 0 & , \mu > 0 \\ -180 & , \mu < 0 \end{cases}$$

$$2) \quad F(s) = 1 + s T \quad ; \quad F(j\omega) = 1 + j\omega T \quad , \quad \Omega := \frac{1}{|T|}$$

$$\angle^\circ F(j\omega) = \frac{180}{\pi} \operatorname{atan}(\omega T) \approx \begin{cases} 0 & , \omega \ll \Omega \\ 90 \operatorname{sign}(T) & , \omega \gg \Omega \end{cases}$$

Se  $T$  è negativa, anche  $\angle^\circ F(j\omega)$  è negativo. Se  $T > 0$ , si ha:



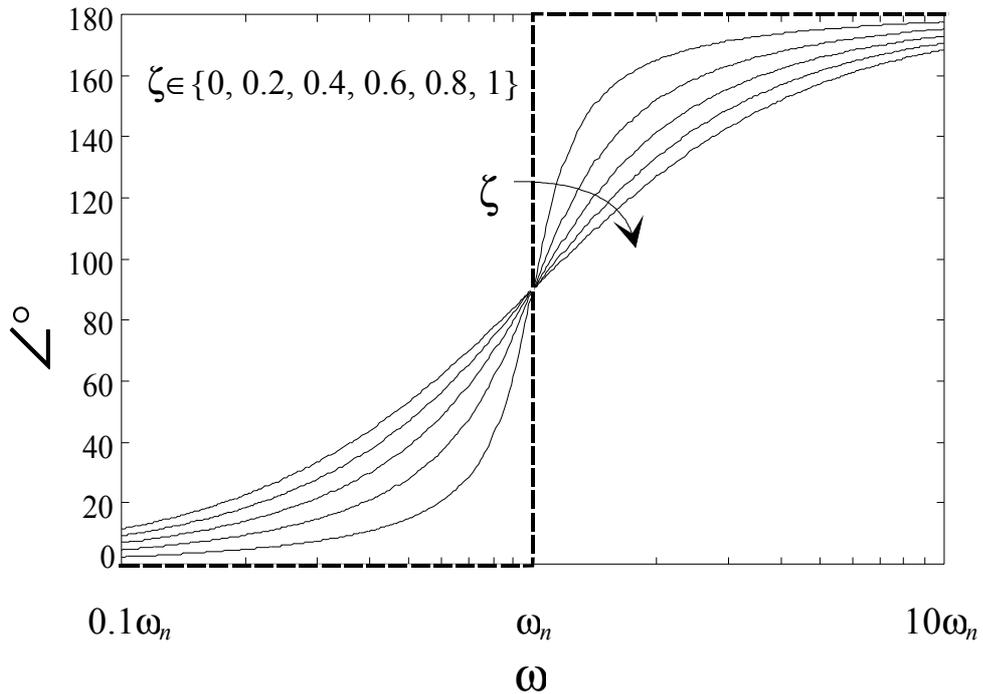
$$3) \quad F(s) = 1 + 2 \zeta \frac{s}{\omega_n} + \left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 \quad , \quad |\zeta| \leq 1 \quad .$$

$$\angle^\circ F(j\omega) = \frac{180}{\pi} \operatorname{atan}\left(\frac{2 \zeta \omega_n \omega}{|\omega_n^2 - \omega^2|}\right)$$

Se  $\zeta = 1$ ,  $F(s) = \left(1 + \frac{s}{\omega_n}\right)^2 := (1 + s \tau_n)^2$ ; quindi:

$$\angle^\circ F(j\omega) = \frac{180}{\pi} \operatorname{atan}\left(\frac{2 \omega_n \omega}{|\omega_n^2 - \omega^2|}\right) = 2 \frac{180}{\pi} \operatorname{atan}(\omega \tau_n)$$

Se  $\zeta < 0$ , anche  $\angle^\circ F(j\omega)$  è negativo. Per altro, se  $\zeta \geq 0$ , si ha:



### Esercizio 23

Tracciare i diagrammi di Bode asintotici (e “stimare” quelli esatti) della risposta in frequenza associata alle seguenti funzioni di trasferimento.

$$1) \quad F(s) = \frac{10 s}{(1 + 0.5 s)^2}$$

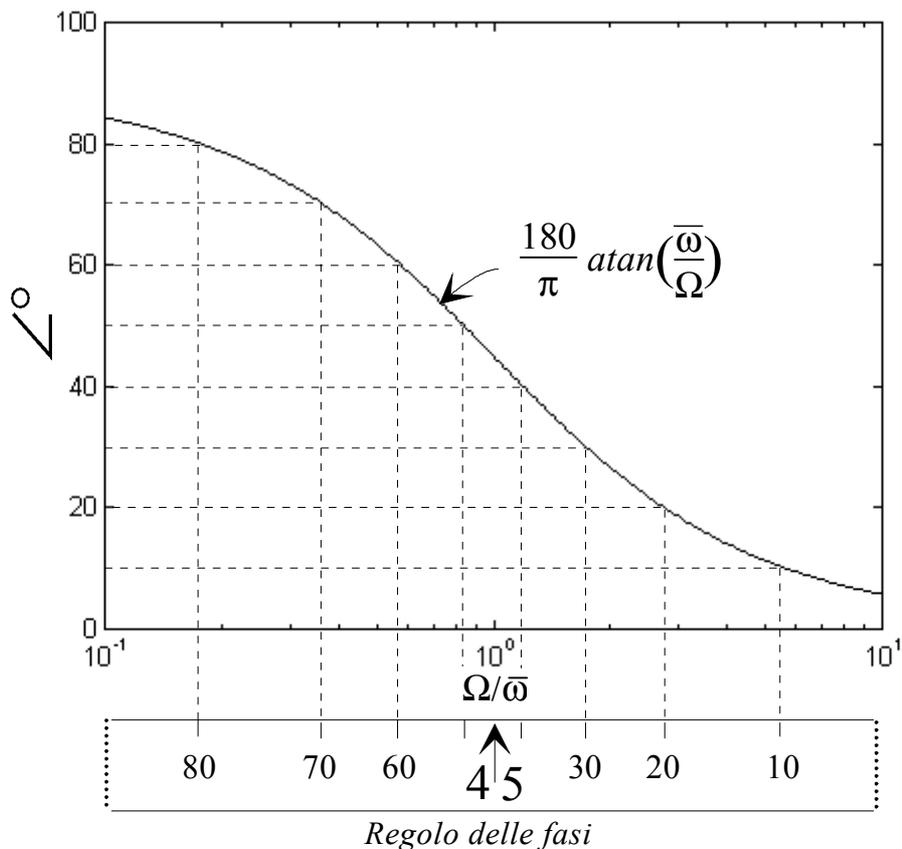
$$2) \quad F(s) = \frac{100 (1 + 0.5 s)^2}{(1 + 0.04 s) (1 + 0.2 s)^2 (1 + 2 s)^2}$$

$$3) \quad F(s) = \frac{100 (1 - 0.5 s)^2}{(1 + 0.04 s) (1 + 0.2 s)^2 (1 + 2 s)^2}$$

$$4) \quad F(s) = \frac{1333 (s + 3)}{s (s^2 + 20 s + 400)} = \frac{10}{s} \frac{1 + 0.3333 s}{1 + \frac{s}{20} + \frac{s^2}{400}}$$

### Calcolo “esatto” dell’argomento in $\bar{\omega}$ : il regolo delle fasi

Il calcolo “a mano” di  $\angle G(j\omega)$ , per  $\omega = \bar{\omega}$ , è sensibilmente facilitato da uno strumento apparentemente “arcaico”, detto “regolo delle fasi”, che consente di valutare rapidamente  $\frac{180}{\pi} \text{atan}(\bar{\omega}/\Omega)$ , per ogni  $\Omega := |T|^{-1}$ ; vale a dire il contributo a  $\angle G(j\bar{\omega})$  dovuto (a meno del segno) ad ogni costante di tempo  $T$ . Il regolo delle fasi esprime pertanto la funzione  $\frac{180}{\pi} \text{atan}(\bar{\omega}/\Omega)$ , al variare di  $T$ , o più precisamente al variare della pulsazione d’angolo  $\Omega$ .



Il contributo a  $\angle G(j\bar{\omega})$  dovuto (a meno del segno) ad una costante di tempo  $T$  si ottiene “puntando” in  $\bar{\omega}$  la freccia centrale del regolo e leggendo, sul regolo stesso, nel punto corrispondente alla pulsazione d’angolo  $\Omega := |T|^{-1}$ , il valore assoluto del contributo cercato. Naturalmente, la scala riportata sul regolo dipende dall’ampiezza della decade sull’asse delle  $\omega$ . I regoli più usati sono “tarati” sulla scala dei fogli di carta semilogaritmica standard a 4 decadi.

### Esercizio 24

Tracciare (su carta semilogaritmica a quattro decadi) i diagrammi di Bode asintotici, del modulo e dell'argomento, relativi alle seguenti funzioni di trasferimento. Indicare, quindi, un andamento plausibile dei corrispondenti diagrammi effettivi (eventualmente calcolando con cura, per alcuni valori "strategici" della pulsazione  $\omega$ , il valore dell'argomento di  $G(j\omega)$ ). Avvalendosi dei diagrammi così ottenuti, si determini infine un plausibile andamento qualitativo del diagramma polare della risposta in frequenza associata a  $G(\cdot)$ .

$$24.1 \quad G(s) = \frac{30}{(1 + 10s)^2 (1 + 0.2s) (1 + 0.05s)^3}$$

$$24.2 \quad G(s) = \frac{8(1 + 5s)}{(1 + 50s) (1 - 2s)^2 (1 + 0.4s)}$$

$$24.3 \quad G(s) = \frac{100s(1 + 0.003s)}{(1 + 10s) (1 + 0.001s)^2}$$

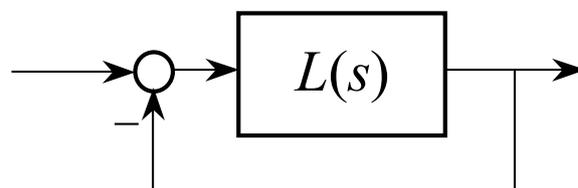
$$24.4 \quad G(s) = \frac{8(1 - 5s)}{(1 + 50s) (1 + 2s)^2 (1 + 0.4s)}$$

$$24.5 \quad G(s) = \frac{20(1 - 0.1s)}{s(1 + 10s) (1 + 4s)^2 (1 + 0.1s)}$$

$$24.6 \quad G(s) = \frac{200(1 + s)}{(1 + 100s) (1 - 10s + 100s^2) (1 + 0.3s)}$$

### Esercizio 25

Con riferimento a quelle, fra le seguenti funzioni di trasferimento d'anello, che rispettano le ipotesi di Bode, si calcoli il corrispondente margine di fase; e, qualora questo risulti positivo, anche il margine di guadagno.



$$25.1 \quad L(s) = \frac{30}{(1 + 10s)^2 (1 + 0.2s) (1 + 0.05s)^3}$$

$$25.2 \quad L(s) = \frac{30(1 + s)}{s^2 (1 + 0.01s) (1 + 0.003s)^2}$$

$$25.3 \quad L(s) = \frac{100 s (1 + 0.003 s)}{(1 + 10 s) (1 + 0.001 s)^2}$$

$$25.4 \quad L(s) = \frac{20 (1 - 0.04 s)}{s (1 + 0.04 s) (1 + 0.01 s)^2}$$

$$25.5 \quad L(s) = \frac{0.02 \exp(-2 s)}{s (1 + 12 s)}$$

$$25.6 \quad L(s) = \frac{200 (1 + s)}{(1 + 100 s)(1 - 10 s + 100 s^2)(1 + 0.3 s)}$$

$$25.7 \quad L(s) = \frac{-120}{s (1 + 5 s)}$$

$$25.8 \quad L(s) = \frac{0.01}{s (1 + 30 s) (1 + 10 s + 100 s^2)} \cdot$$