Fondamenti di automatica

***Esercizio* 9**

Si discuta la stabilità del sistema dinamico lineare tempo-invariante descritto dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -10 & 4 & 0 \\ 19 & -23 & 8 & 2 \\ 24 & -28 & 2 & 0 \\ 47 & -52 & 19 & -7 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix} \quad , \quad C = \begin{bmatrix} -1 & -23 & 2 & -7 \end{bmatrix} \quad , \quad D = 18 \quad .$$

***Esercizio* 10**

Si discuta la stabilità del sistema dinamico lineare tempo-invariante descritto dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -10 & 4 & 0 \\ 19 & -23 & 8 & 2 \\ 24 & -28 & 2 & 0 \\ 47 & -52 & 19 & -7 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 0 \\ -1 & -9 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & -2 & 12 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad D = 0 \, .$$

(si noti che D è una matrice 2×2 i cui elementi sono tutti nulli).

***Esercizio* 11**

Si discuta la stabilità di un sistema dinamico in senso proprio, lineare e tempo-invariante descritto dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0.2 & 0.05 & 0.8 & 0.3 & 0.01 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad C = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \, .$$

***Esercizio* 12**

Si dica quali dei seguenti polinomi hanno tutte le radici con parte reale negativa.

$P_1(s) = -2\,s^2 - 4\,s - 6$
$P_2(s) = 2\,s^5 + 5\,s^4 + s^3 + 4\,s^2 + 6\,s + 3$
$P_3(s) = s^5 + 3.10\,s^4 + 3.58\,s^3 + 1.90\,s^2 + 0.46\,s + 0.04$
$P_4(s) = 2.41\,s^5 + 0.53\,s^4 - 0.06\,s^3 + 4.40\,s^2 + 0.02\,s + 3.14$
$P_5(s) = 3\,s^4 + 2\,s^3 + 8\,s^2 + 5\,s + 1$
$P_6(s) = 4\,s^6 + 3\,s^4 + 7\,s^3 + 5\,s^2 + 2\,s + 6$
$P_7(s) = s^5 + 13\,s^4 + 61\,s^3 + 127\,s^2 + 118\,s + 40$
$P_8(s) = s^4 + 3\,s^3 + 6\,s^2 + 3\,s + 1$
$P_9(s) = 3\,s^4 + 2\,s^3 + 9\,s^2 + 6\,s + 5$

Si dica inoltre quali di essi hanno almeno una radice con parte reale positiva.

***Esercizio* 13**

Per ognuno dei polinomi che seguono, si determini la regione di asintotica stabilità nel piano (a, b); si dica cioè per quali valori di a e di b le radici del polinomio hanno parte reale negativa.

$p_1(s; a, b) = (10 - a)\,s^2 + (0.1\,a^2 - b)\,s + 8 - a$
$p_2(s; a, b) = a\,s^4 + 3\,s^3 + 6\,s^2 + 3\,s + b$
$p_3(s; a, b) = s^5 + (a + b)\,s^4 + 6\,s^3 + 12\,s^2 - (a + b)\,s + 4$

***Esercizio* 14**

Sapendo che la trasformata di Laplace di $v(t) = cos(\omega\,t)$, per $t \geq 0$ e nullo altrove, è:

$$V(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad ,$$

si calcolino le trasformate di Laplace dei seguenti segnali (nulli per $t < 0$):

$v_1(t) = sin(10\,t)$
$v_2(t) = 3\,sin(10\,t - 1)$
$v_3(t) = 3\,sin(8\,t) - 2\,cos(16\,t + 2)$

Cenno. *Si noti che* $\dot{v}(t) = -\,\omega\,sin(\omega\,t)$; *quindi*, $sin(\omega\,t) = -\,\dot{v}(t)/\omega$. *Inoltre* $v_2(t) = 3\,v_1(t - 0.1)$.

***Esercizio* 15**

Si calcolino, ove sia possibile, il valore iniziale e il valore finale di segnali le cui trasformate di Laplace siano date da:

$$V_1(s) = 10\,\frac{1}{s+1} \quad , \quad V_2(s) = -\,2\,\frac{s}{s^2-1} \quad , \quad V_3(s) = 5\,\frac{1+3\,s}{s\,(1+s)^3} \quad ,$$

$$V_4(s) = \frac{1+s}{1 - 0.10\,s + 0.25\,s^2} \quad , \quad V_5(s) = \frac{1 - 0.10\,s + 0.25\,s^2}{(1+s)^4} \quad .$$

Si calcolino, quindi, le trasformate delle derivate dei segnali stessi e, infine, i valori inziali di tali derivate.

***Esercizio* 16**

Si calcoli la funzione di trasferimento di un sistema dinamico lineare tempo-invariante descritto da:

$$A = \begin{bmatrix} -7 & -3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad C = \begin{bmatrix} 3 & -2 \end{bmatrix} \quad , \quad D = 6\,.$$

***Esercizio* 17**

Si calcoli la funzione di trasferimento di un sistema dinamico lineare tempo-invariante descritto da:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & -5 & 9 & -7 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 & -7 \end{bmatrix} \quad , \quad D = 1 \quad .$$

***Esercizio* 18**

Si calcoli la funzione di trasferimento di un sistema dinamico lineare tempo-invariante descritto da:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -10 & 4 & 0 \\ 19 & -23 & 8 & 2 \\ 24 & -28 & 2 & 0 \\ 47 & -52 & 19 & -7 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad D = 0 \quad .$$

Esercizio 19

La funzione di trasferimento $G(s)$ di un sistema dinamico in senso proprio, lineare, tempo-invariante, a un ingresso e un'uscita descritto dalle matrici (A, B, C), è data da:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad , \quad D(s) := det(sI - A) \quad , \quad N(s) := C\,(sI - A)^*\,B \quad .$$

Si dica quali dei seguenti sistemi è stabilizzabile.

$N_1(s) = 5\,s - 15$, $D_1(s) = s^2 - 2\,s + 3$;
$N_2(s) = 10\,s\,(s + 5)$, $D_2(s) = s^5 + 3\,s^4 + 6\,s^3 + 3\,s^2 + s$;
$N_3(s) = 3\,s + 3$, $D_3(s) = s^2 + 4\,s + 3$;
$N_4(s) = 4\,s^2 - 20\,s + 16$, $D_4(s) = s^4 + 7\,s^3 + 15\,s^2 + 13\,s + 4$;
$N_5(s) = -3\,s + 12$, $D_5(s) = s^4 + 3\,s^3 - s^2 + 5\,s + 6$.

Esercizio 20

Si realizzino, sia in forma normale che in forma ingresso-uscita, le seguenti funzioni di trasferimento.

$$G_1(s) = 4\,\frac{s + 1}{s^3 - 5\,s^2 + 8\,s + 2}$$

$$G_2(s) = 10\,\frac{1 + s}{(1 - 5\,s)(1 + 3\,s)(1 + 6\,s)}$$

$$G_3(s) = -43\,\frac{s}{s^4 + 3\,s^3 - s^2 + 5\,s + 6}$$

$$G_4(s) = 20\,\frac{s^4 + 12\,s^3 - 4\,s^2 + 3\,s + 20}{s^5 + 3\,s^4 + 6\,s^3 + 3\,s^2 + s + 7}$$

$$G_5(s) = 6\,\frac{s^4 - 5\,s^3 + 9\,s^2 - s + 3}{s^4 + 15\,s^3 - 4\,s^2 + 2\,s + 5} \quad .$$