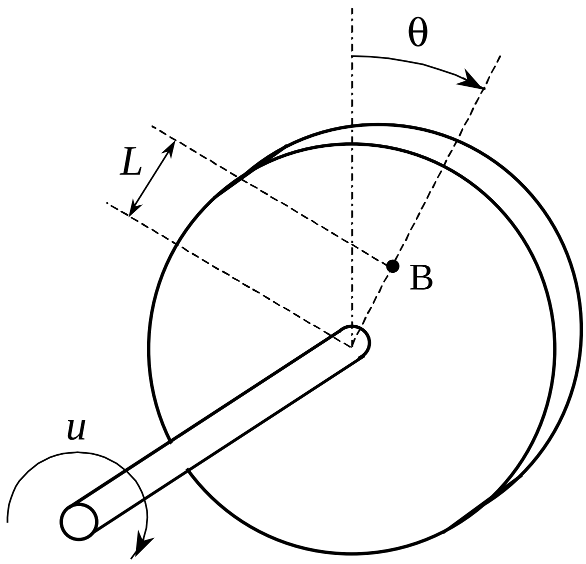
Capitolo 5
Linearizzazione

Introduzione

Che la retroazione potesse servire per "aumentare la linearità" di un sistema è cosa nota fin dalle origini della teoria del controllo.

Solo una trentina di anni fa, però, si è posto il cosiddetto problema della *linearizzazione esatta*, vale a dire il problema di dire sotto quali condizioni esiste un compensatore in retroazione che, applicato ad un assegnato sistema non lineare, rende lineare il sistema risultante. Se il sistema non lineare assegnato è esattamente linearizzabile, occorre un metodo di progetto del compensatore linearizzante. A volte, questo secondo problema è così impervio da rendere interessante la possibilità di trovarne *soluzioni approssimate*: vale a dire compensatori approssimativamente linearizzanti. Inutile dire che la ricerca di compensatori approssimativamente linearizzanti a maggior ragione può dimostrarsi interessante nei casi in cui un compensatore linearizzante non esista, o la sua esistenza non sia accertabile.

Un esempio



$$\boldsymbol{S}: \quad J\,\ddot{\theta} = u - \tau_a(\dot{\theta}) + M\,g\,L\,sin\,\theta$$

Ponendo: $\qquad v := [u - \tau_a(\dot{\theta}) + M\,g\,L\,sin\,\theta]/J$

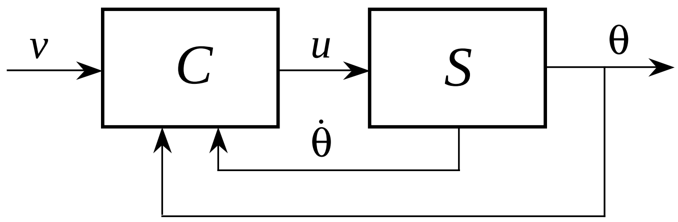
si ottiene un sistema descritto da: $\qquad \ddot{\theta} = v$

Ma porre:

$$v := (u - \tau_a(\dot{\theta}) + M\,g\,L\,sin\,\theta)/J$$

equivale a porre (retroazione *dallo stato*):

$$\boldsymbol{C}\,\mathbf{:} \quad u = J\,v + \tau_a(\dot{\theta}) - M\,g\,L\,sin\,\theta$$



$$\boxed{\ddot{\theta} = v}$$

A questo punto, è facile determinare un regolatore della posizione angolare tale da “assegnare i poli” del sistema ad anello chiuso.

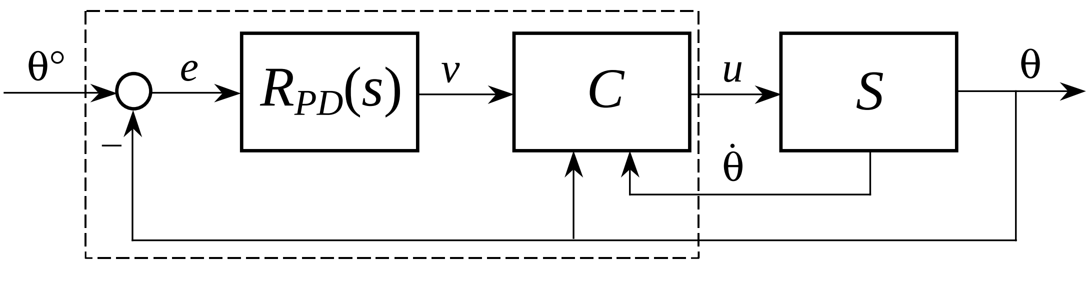
Sia infatti:

$$e := \theta° - \theta$$

$$\boldsymbol{R}_{PD}\,\mathbf{:} \qquad v = K_p\,e + K_d\,\dot{e} = $$

$$= K_p\,\theta° - K_p\,\theta - K_d\,\dot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} = v \qquad \Rightarrow \qquad \Theta(s) = \frac{1}{1 + s\,K_d/K_p + s^2/K_p}\;\Theta°(s) \qquad \begin{cases} K_p = \omega_n^{\,2} \\ K_d = 2\,\zeta\,\omega_n \end{cases}$$



Linearizzazione esatta mediante retroazione dallo stato

Benché non strettamente necessario, limiteremo il nostro studio ai sistemi non lineari affini, tempo-invarianti, a un ingresso e un'uscita:

$$\boldsymbol{S}: \quad \begin{cases} \dot{x} = a(x) + b(x)\, u \quad , \quad x(0) := x_0 \in \mathbf{R}^n \\ y = c(x) \end{cases}$$

sufficientemente regolari; dove, cioè, le funzioni $a(\cdot)$, $b(\cdot)$ e $c(\cdot)$ non solo siano tali da garantire esistenza e unicità del movimento corrispondente ad ogni ingresso u continuo a tratti, ma siano anche continuamente differenziabili un numero indefinito di volte.

Il primo obiettivo del nostro studio consiste nel dimostrare che se, in un punto dello spazio di stato, S ha un *grado relativo* ben definito, allora esiste una retroazione algebrica dallo stato tale da far sì che, almeno in un intorno di tale punto, il sistema reazionato risultante sia esternamente lineare. Sia cioè lineare la relazione ingresso-uscita ad esso associata.

La nozione di grado relativo per un sistema lineare tempo-invariante è stata introdotta come differenza fra il numero di poli e il numero di zeri della funzione di trasferimento. Poiché il concetto di funzione di trasferimento non ha un valido corrispettivo nel caso di sistemi non lineari, occorre innanzitutto rivedere il significato di grado relativo di un sistema lineare (tempo-invariante a un ingresso e un'uscita), cercandone una definizione alternativa, che sia possibile estendere con relativa naturalezza al caso non lineare.

Come vedremo, e com'è facile prevedere, questo comporterà l'abbandono di ogni riferimento alla trasformazione di Laplace e agli strumenti di analisi nel dominio della frequenza.

Grado relativo di un sistema lineare

Sia:

$$\boldsymbol{S}_L : \quad \begin{cases} \dot{x} = A\,x + B\,u & , \qquad x(0) := x_0 \in \mathbf{R}^n \\ y = C\,x \end{cases}$$

$$G(s) = C\,(s\,I - A)^{-1}\,B$$

La funzione di trasferimento $G(s)$ è (anche) la trasformata di Laplace della risposta impulsiva $g(\cdot)$ di S, dove (formula di Lagrange):

$$g(t) = C\,e^{At}\,B \quad , \quad t \geq 0$$

ma

$$e^{At} := I + A\,t + \frac{1}{2}A^2\,t^2 + \ldots + \frac{1}{k!}A^k\,t^k + \ldots$$

quindi, per $t \geq 0$:

$$g(t) = CB + CAB\,t + \frac{1}{2}CA^2B\,t^2 + \ldots + \frac{1}{k!}CA^kB\,t^k + \ldots$$

e pertanto, se r è il grado relativo di $G(s)$, si ha:

- per CB ($k = 0$)

  $$CB = \lim_{t\to 0} g(t) = \lim_{s\to\infty} s\,G(s) \begin{cases} = 0 & , \quad r > 1 \\ \neq 0 & , \quad r = 1 \end{cases}$$

- per CAB ($k = 1$)

  $$CAB = \lim_{t\to 0} \dot{g}(t) = \lim_{s\to\infty} s\,(s\,G(s) - g(0)) \begin{cases} = 0 & , \quad r > 2 \\ \neq 0 & , \quad r = 2 \end{cases}$$

  Se $r = 1$, CAB assumerà un valore finito, eventualmente nullo, che qui non interessa determinare.

Per un generico valore di k,

$$CA^kB = \lim_{t\to 0} \frac{d^k g}{dt^k}(t) \begin{cases} = 0 \quad , \quad r > k+1 \quad \Leftrightarrow \quad k < r-1 \ , \\ \\ \neq 0 \quad , \quad r = k+1 \quad \Leftrightarrow \quad k = r-1 \ . \end{cases}$$

Ora possiamo chiederci quale sia la derivata di ordine minimo dell'uscita di S_L che risulta direttamente influenzata dall'ingresso u.

Osserviamo innanzitutto che:

$$\dot{y} = C\,\dot{x} = C\,(A\,x + B\,u) = CA\,x + CB\,u$$

quindi, $\dot{y}$ dipende direttamente da u se e solo se $CB \neq 0$; cioè, se e solo se $r = 1$. Se $CB = 0$, cioè se $r > 1$, si ha:

$$\ddot{y} = CA\,\dot{x} = CA\,(A\,x + B\,u) = CA^2\,x + CAB\,u$$

quindi $\ddot{y}$ dipende direttamente da u se e solo se $CAB \neq 0$; cioè, se solo se $r = 2$.

In generale, se: $CB = CAB = \ldots = CA^{r-2}B = 0$ e $CA^{r-1}B \neq 0$, allora la derivata r-esima di y fatta rispetto a t r volte dipenderà direttamente da u, mentre tutte le derivate di ordine $k = 0, 1, \ldots, r-1$, saranno indipendenti da u.

Si può concludere che *il grado relativo di S_L coincide con l'ordine della derivata di ordine minimo dell'uscita y direttamente influenzata dall'ingresso u*.

Per estendere la nozione di grado relativo al sistema S non lineare, occorrerà dunque considerare le derivate dell'uscita di ordine k progressivamente crescente fino ad individuare il più piccolo valore di k tale che:

$$y^{(k)} := \frac{d^k y}{dt^k}$$

dipenda direttamente dall'ingresso u.

Ad esempio, abbiamo:

$$\dot{y} = c_x(x)\, \dot{x} = c_x(x)\, (a(x) + b(x)\, u)$$

dove:

$$c_x(x) := \begin{bmatrix} \dfrac{\partial c}{\partial x_1}(x) & \dfrac{\partial c}{\partial x_2}(x) & \dots & \dfrac{\partial c}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix} .$$

Se in un un punto x^{o} dello spazio di stato, nel quale vorremmo definire il grado relativo di S, risultasse:

$$c_x(x^\circ)\, b(x^\circ) \neq 0,$$

potremmo trarre la conclusione che il grado relativo r di S in x° è uguale a 1.

Se *in un intorno* di x^{o} risulta invece: $c_x(x)\, b(x) \equiv 0$, dovremmo essere indotti a verificare se la $\ddot{y}$ dipenda o meno direttamente da u. Ma prima di procedere in questa analisi, è conveniente fare una breve pausa per introdurre una notazione che è tipica della *geometria differenziale* e che si rivelerà estremamente utile per ordinare ed esprimere in forma compatta i calcoli necessari nel seguito.

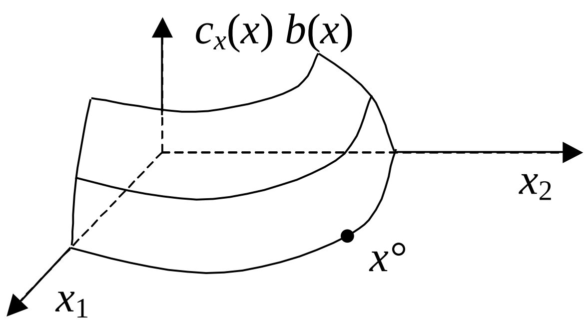
Naturalmente, sarebbe anche potuto accadere che si avesse

$$c_x(x^\circ)\, b(x^\circ) = 0$$

e tuttavia in *ogni* intorno di x° ci fosse almeno un punto x in cui

$$c_x(x)\, b(x) \neq 0 .$$

In tal caso, il grado relativo di S in x° ***non è definito***.



Breve divagazione

Sia A un sottoinsieme aperto di $\mathbf{R}^n$ e f una funzione reale definita in A

$$f \,:\, A \,\rightarrow\, \mathbf{R}\,.$$

Per ogni $x \in A$, $f(x)$ è il valore di f in x. La funzione f è detta *regolare* in x se in x è continuamente differenziabile infinite volte; se, cioè, è continua assieme alle sue derivate di ogni ordine: $f \in C^\infty$. La funzione f è regolare in A se è regolare in ogni punto di A.

Un insieme di m funzioni reali: $f_1, f_2, \dots, f_m$ definite in A può dar luogo a una funzione (vettoriale) $f : A \rightarrow \mathbf{R}^m$. La funzione f è regolare se sono regolari tutte le funzioni che la compongono.

Una funzione regolare $f : A \rightarrow \mathbf{R}^m$ associa a ogni punto $x \in A$ un vettore $f(x) \in \mathbf{R}^m$; quindi, è spesso detta *campo vettoriale regolare* definito su A.

Lo *jacobiano* di $f = [\, f_1 \;\; f_2 \;\; \dots \;\; f_m]'$ è la matrice di funzioni:

$$f_x := \frac{\partial f}{\partial x} := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad ;$$

il suo valore in un punto x^{o} è indicato (salvo contrario avviso) con

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x^{\mathrm{o}}) \quad \text{o anche con} \quad [f_x]_{x^\circ}$$

- Se A e B sono sottoinsiemi aperti di $\mathbf{R}^n$, una funzione $f : A \to B$ è un *diffeomorfismo* se è bijettiva (invertibile) e tanto f quanto f^{-1} sono funzioni regolari.

- Se A è un sottoinsieme aperto di $\mathbf{R}^n$ e $f : A \to \mathbf{R}^n$ è un campo vettoriale regolare definito su A, si chiama *derivazione di Lie lungo* f l'operatore L_f definito nel modo seguente:

$$L_f := \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \quad .$$

In altre parole, per ogni altro campo vettoriale regolare h definito su A, $h : A \to \mathbf{R}^m$, si ha:

$$\boxed{L_f h = h_x \ f}$$

Naturalmente, la derivazione di Lie lungo f può essere reiterata:

$$L_f (L_f h) := L_f L_f h = L_f^2 h \ ;$$

in generale:

$$\boxed{L_f^k h := L_f (L_f^{k-1} h) \ , \quad L_f^0 h := h \ .}$$

- Si noti che, se $g : A \to \mathbf{R}^n$ è, come f, un campo vettoriale regolare definito su A, allora:

$$\frac{\partial (L_f h)}{\partial x} g = L_g L_f h \qquad , \qquad \frac{\partial (L_f^k h)}{\partial x} f = L_f^{k+1} h \ .$$

Grado relativo di un sistema non lineare

Con la notazione appena introdotta, possiamo tornare al calcolo del grado relativo r del sistema non lineare affine:

$$S: \quad \begin{cases} \dot{x} = a(x) + b(x)\, u \qquad , \qquad x(0) := x_0 \in \mathbf{R}^n \\ y = c(x) \end{cases}$$

in un punto $x°$ dello spazio di stato (spesso, ma non necessariamente, coincidente con uno stato di equilibrio posto nell'origine) e intendendo per grado relativo di S l'ordine della derivata di ordine minimo di y direttamente influenzata dall'ingresso u.

- Cominciando con la *derivata prima* di y fatta rispetto a t e tralasciando d'indicare esplicitamente gli argomenti delle funzioni in gioco, abbiamo già visto che:

  $$\dot{y} = c_x\, \dot{x} = c_x\, (a + b\, u) = L_a\, c + u\, L_b\, c\ .$$

  Se $[L_b\, c]_{x°} \neq 0$, si avrà $[L_b\, c]_x \neq 0$ per ogni x in un intorno di $x°$ e si potrà concludere che il grado relativo di S in $x°$ è $r = 1$.

  Se, invece, $[L_b\, c]_x = 0$ per ogni x in un intorno di $x°$, o (più sinteticamente) se $L_b\, c \equiv 0$ in un intorno di $x°$, allora il grado relativo di S in $x°$ è maggiore di 1; altrimenti, non esiste.

- Supponiamo dunque che sia $L_b\, c \equiv 0$ in un intorno di $x°$, vale a dire:

  $$\dot{y} = L_a\, c\ ,$$

  ed esaminiamo la *derivata seconda* di y rispetto a t:

  $$\ddot{y} = \frac{\partial (L_a\, c)}{\partial x}\, (a + b\, u) = L_a^2\, c + u\, L_b\, L_a\, c$$

  Se $[L_b\, L_a\, c]_{x°} \neq 0$, allora: $r = 2$.

  Se $L_b\, L_a\, c \equiv 0$ in un intorno di $x°$, allora r è maggiore di 2 (altrimenti, r in $x°$ esiste); occorre passare all'esame di $y^{(3)}$.

- Procedendo in modo analogo, per la generica derivata di ordine k si trova:

$$y^{(k)} = L_a^k c + u\, L_b L_a^{k-1} c$$

naturalmente dopo aver accertato che, <u>in un intorno di $x°$</u>, si ha:

$$L_b L_a^i c \equiv 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, k\text{-}2.$$

Se $[L_b L_a^{k-1} c]_{x°} \neq 0$, allora: $r = k$. Se ciò non accade, per alcun valore di k, il grado relativo di S in $x°$ resta indefinito.

Possiamo ora riassumere formulando la seguente

Definizione (*Grado relativo di S in $x°$*)

Il sistema S ha grado relativo r in $x°$ se, in un intorno di $x°$:

$$L_b L_a^k c \equiv 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, r\text{-}2,$$

e inoltre: $[L_b L_a^{r-1} c]_{x°} \neq 0$.

***Teorema* 1** (*Linearizzazione esterna mediante retroazione dallo stato*)

Se il sistema S ha (un ben definito) grado relativo r in $x°$, è possibile rendere (localmente) lineare la relazione ingresso-uscita mediante retroazione dallo stato.

Prova. Se S ha grado relativo r in $x°$, allora:

$$y^{(r)} = L_a^r c + u\, L_b L_a^{r-1} c$$

e $[L_b L_a^{r-1} c]_{x°} \neq 0$; quindi, in un intorno di $x°$, $L_b L_a^{r-1} c$ è diversa da zero. Introduciamo, dunque, una nuova variabile d'ingresso v ponendo:

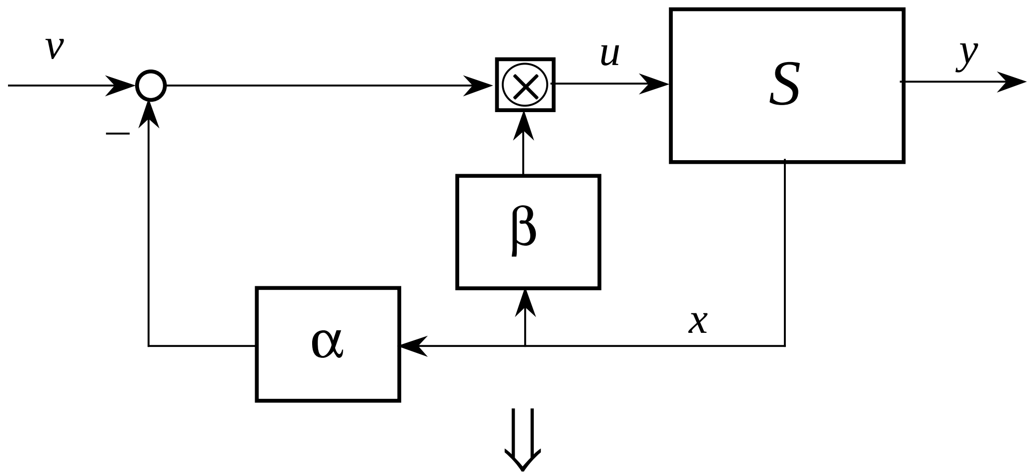
$$v := L_a^r c + u\, L_b L_a^{r-1} c$$

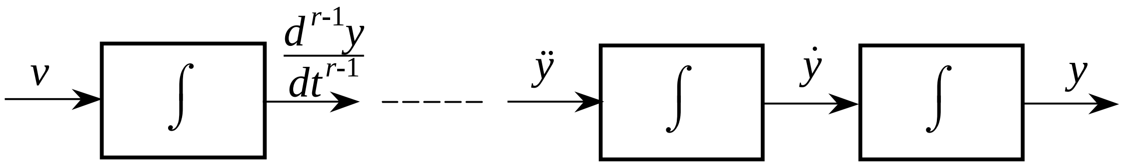
cioè:

$$u = \frac{1}{L_b L_a^{r-1} c}\,(v - L_a^r c) := \beta\,(v - \alpha)$$

dove:

$$\alpha := L_a^r c \qquad , \qquad \beta := \frac{1}{L_b L_a^{r-1} c}$$





***Commento*:** Se $r < n$, c’è una dinamica nascosta (una parte cieca)!

- Per accertarsi che l’intero procedimento non sia bacato dalle fondamenta, occorre *isolare* ed *analizzare* la *dinamica nascosta*. Ciò richiede l’introduzione di una particolare *forma canonica*.

- Come sempre, la determinazione di una forma canonica richiede l’individuazione di un opportuno cambiamento di coordinate nello spazio di stato: $\tilde{x} = \varphi(x)$. Coerentemente con le ipotesi di regolarità fin qui fatte, la funzione φ dovrà essere invertibile e regolare assieme alla sua inversa (in un intorno di $x°$); dovrà, cioè, essere un *diffeomorfismo* (*locale*).

- Una trasformazione regolare φ definisce un diffeomorfismo locale in un intorno di $x°$ se lo jacobiano φ_x è non singolare in $x°$.

Cambiamento di coordinate nello spazio di stato: $\tilde{x} = \varphi(x)$

$$\boldsymbol{S}: \qquad \begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \tilde{a}(\tilde{x}) + \tilde{b}(\tilde{x})\, u \qquad , \qquad \tilde{x}(0) := \tilde{x}_0 \in \mathbf{R}^n \\ y = \tilde{c}(\tilde{x}) \end{cases}$$

dove infatti: $\tilde{x}_0 = \varphi(x_0)$,

$$\dot{\tilde{x}} = \varphi_x(x)\, \dot{x} = \varphi_x(x)\, (a(x) + b(x)\, u) =$$

$$= [\varphi_x(x)\, a(x)]_{\varphi^{-1}(\tilde{x})} + [\varphi_x(x)\, b(x)]_{\varphi^{-1}(\tilde{x})}\, u := \tilde{a}(\tilde{x}) + \tilde{b}(\tilde{x})\, u$$

$$y = [c(x)]_{\varphi^{-1}(\tilde{x})} := \tilde{c}(\tilde{x}) \quad .$$

Forma canonica normale

Supponiamo che sia $r < n$. In base alla definizione di grado relativo in $x°$, sappiamo che:

$$y^{(k)} = L_a^k\, c \qquad , \qquad k = 0, 1, 2, \dots , r - 1 ;$$

poniamo quindi:

$$\varphi_k := L_a^{k-1}\, c \qquad , \qquad k = 1, 2, \dots , r .$$

Quanto al resto, ci avvaliamo del risultato seguente.

***Lemma* 1.** (*Subtrasformazione complementare*)

Se $r < n$ è il grado relativo di S in $x°$, è possibile trovare $n - r$ funzioni φ_{r+k}, $k = 1, 2, \dots , n - r$, definite e regolari in un intorno di $x°$, con valore in $x°$ fissabile ad arbitrio e tali che:

1. φ_x sia non singolare in $x°$, dove: $\varphi(x) = [\varphi_1(x) \quad \varphi_2(x) \quad \dots \quad \varphi_n(x)]'$
2. $L_b\, \varphi_{r+k} \equiv 0$ in un intorno di $x°$, per ogni $k = 1, 2, \dots , n - r$.

La *prova* è omessa.

In vista del Lemma 1, è dunque possibile completare la definizione della funzione $\varphi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ in modo che questa sia un diffeomorfismo locale, utilizzabile per un cambio di coordinate nello spazio di stato. Poniamo quindi:

$$\tilde{x} = \varphi(x) \ .$$

Sicché, per $k = 1, 2, \dots , r - 1$, si ha:

$$\dot{\tilde{x}}_k = \frac{\partial \varphi_k}{\partial x}\, \dot{x} = \frac{\partial (L_a^{k\text{-}1} c)}{\partial x}\, (a + b\, u) = L_a^k\, c + u\, L_b\, L_a^{k\text{-}1}\, c =$$

$$= L_a^k\, c = \varphi_{k+1} = \tilde{x}_{k+1}$$

mentre, per $k = r$:

$$\dot{\tilde{x}}_r = y^{(r)} = L_a^r\, c + u\, L_b\, L_a^{r\text{-}1}\, c := \lambda(x) + u\, \mu(x) = \tilde{\lambda}(\tilde{x}) + u\, \tilde{\mu}(\tilde{x})$$

dove, ricordando che $x = \varphi^{-1}(\tilde{x})$:

$$\tilde{\lambda}(\tilde{x}) := \lambda(\varphi^{-1}(\tilde{x})) \quad , \quad \tilde{\mu}(\tilde{x}) := \mu(\varphi^{-1}(\tilde{x}))$$

mentre, per definizione di grado relativo, se $\tilde{x}° := \varphi(x°)$, si avrà:

$$\tilde{\mu}(\tilde{x}°) = \mu(\varphi^{-1}(\tilde{x}°)) = \mu(x°) \neq 0 \ .$$

Infine, per $k = 1, 2, \dots , n - r$, risulta (Lemma 1):

$$\dot{\tilde{x}}_{r+k} = \frac{\partial \varphi_{r+k}}{\partial x}\, (a + b\, u) = L_a\, \varphi_{r+k} + u\, L_b\, \varphi_{r+k} = L_a\, \varphi_{r+k} := \eta_k(x)$$

e in definitiva, ponendo: $\tilde{\eta}_k(\tilde{x}) := \eta_k(\varphi^{-1}(\tilde{x}))$, si ha:

$$\dot{\tilde{x}}_{r+k} = \tilde{\eta}_k(\tilde{x}) \ .$$

Riassumendo, poniamo:

$$[\tilde{x}_1 \quad \tilde{x}_2 \ \dots \ \tilde{x}_{r\text{-}1}]' := \tilde{w} \qquad , \qquad [\tilde{x}_{r+1} \quad \tilde{x}_{r+2} \ \dots \ \tilde{x}_n]' := \tilde{z}$$

sicché:

$$\tilde{x} = [\tilde{w}' \quad \tilde{x}_r \quad \tilde{z}\,]'$$

e l'*equazione di stato* del sistema S si articola in:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{w}} = M\,\tilde{w} + N\,\tilde{x}_r & \in \mathbf{R}^{r\text{-}1} \\ \dot{\tilde{x}}_r = \tilde{\lambda}(\tilde{x}) + u\,\tilde{\mu}(\tilde{x}) & \in \mathbf{R} \\ \dot{\tilde{z}} = \tilde{\eta}(\tilde{x}) & \in \mathbf{R}^{n\text{-}r} \end{cases} \qquad , \qquad \tilde{\mu}(\tilde{x}^\circ) \neq 0$$

dove $\tilde{\eta} := [\tilde{\eta}_1 \quad \tilde{\eta}_2 \quad \dots \quad \tilde{\eta}_{n\text{-}r}]'$ e inoltre:

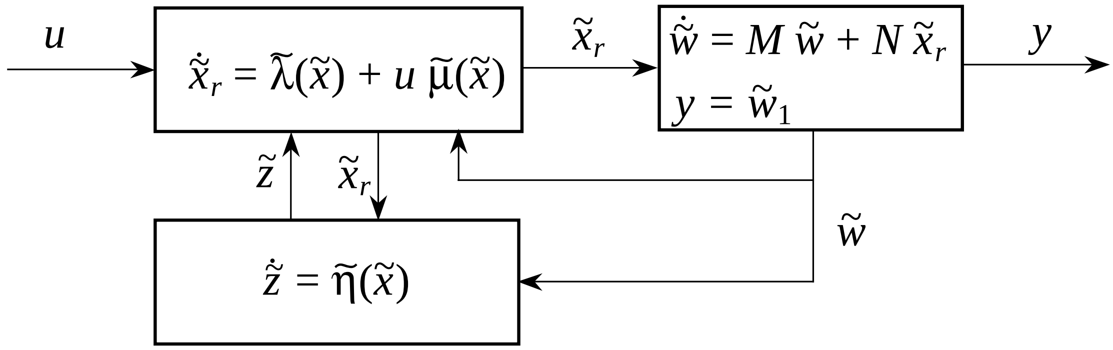
$$M := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ .. & .. & .. & \dots & .. \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \qquad , \qquad N := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ .. \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quanto all'uscita, notiamo che ($\varphi_k := L_a^{k\text{-}1}\, c$, $k = 1, 2, \dots, r$):

$$\tilde{w}_1 = \tilde{x}_1 = \varphi_1 = c$$

quindi l'equazione d'uscita si riduce a:

$$y = \tilde{w}_1\,.$$



Dinamica zero (perché?)

La forma canonica così ottenuta è anche detta ***forma normale*** di S.

Forma normale di un sistema lineare

Torniamo a considerare:

$$\boldsymbol{S}_L : \quad \begin{cases} \dot{x} = A\,x + B\,u & , \qquad x(0) := x_0 \in \mathbf{R}^n \\ y = C\,x \end{cases}$$

che supponiamo raggiungibile e osservabile. Sia inoltre:

$$G(s) = C\,(s\,I - A)^{-1}\,B = N(s)/D(s)$$

la funzione di trasferimento di S_L, e sia $r < n$ il suo grado relativo:

$$G(s) = \frac{\beta_r\, s^{n-r} + \beta_{r+1}\, s^{n-r-1} + \ldots + \beta_{n-1}\, s + \beta_n}{s^n + \alpha_1\, s^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1}\, s + \alpha_n} \quad , \qquad \beta_r \neq 0\ .$$

Possiamo quindi supporre, senza ledere la generalità, che S_L sia in forma canonica di controllo:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ .. & .. & .. & \ldots & .. \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \ldots & -\alpha_1 \end{pmatrix} \quad , \qquad B := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ .. \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C := \begin{pmatrix} \beta_n & \beta_{n-1} & \ldots & \beta_r & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}\ .$$

Si tratta innanzitutto di riconoscere che forma possa assumere un diffeomorfismo $\varphi(\cdot)$ tale da porre S_L in forma normale. Poiché, per ogni $k = 1, 2, \ldots, r$, abbiamo: $\varphi_k := L_a^{k-1}\, c$, mentre in S_L risulta:

$$a(x) = A\,x, \qquad b(x) = B, \qquad c(x) = C\,x\ .$$

sarà:

$$\varphi_1 = L_a^0\, c = c \qquad \Rightarrow \qquad \varphi_1(x) = C\,x = \beta_n\, x_1 + \beta_{n-1}\, x_2 + \ldots + \beta_r\, x_{n-r+1}$$

$$L_a^1\, c = L_a\, \varphi_1 \qquad \Rightarrow \qquad \varphi_2(x) = C\,A\,x = \beta_n\, x_2 + \beta_{n-1}\, x_3 + \ldots + \beta_r\, x_{n-r+2}$$

$$\ldots$$

$$L_a^{r-1}\, c = L_a\, \varphi_{r-1} \quad \Rightarrow \qquad \varphi_r(x) = C\,A^{r-1}\, x = \beta_n\, x_r + \beta_{n-1}\, x_{r+1} + \ldots + \beta_r\, x_n\,.$$

Le rimanenti funzioni φ_{r+k}, $k = 1, 2, \ldots, n\text{-}r$, (subtrasformazione complementare) possono essere scelte con ampi margini di libertà; le condizioni da rispettare sono:

1) $\varphi_x(x°)$ non singolare, 2) $L_b\, \varphi_{r+k} \equiv 0$ in un intorno di $x°$.

Proviamo con una scelta semplice:

$$\varphi_{r+k}(x) = x_k \quad , \quad k = 1, 2, \ldots, n\text{-}r\,.$$

Così facendo si ottiene $\varphi_x(x) = \Phi$, con:

$$\Phi = \begin{array}{r} \overbrace{\hphantom{\beta_r \quad 0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0}}^{r} \\ \left(\begin{array}{ccccccc|ccccc}
\beta_n & \beta_{n-1} & \beta_{n-2} & \ldots & \beta_{n-r+1} & \ldots & \beta_{r+1} & \beta_r & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & \beta_n & \beta_{n-1} & \ldots & \beta_{n-r} & \ldots & \beta_{r+2} & \beta_{r+1} & \beta_r & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 0 & \beta_n & \ldots & \beta_{n-r-1} & & \beta_{r+3} & \beta_{r+2} & \beta_{r+1} & \beta_r & \ldots & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & 0 & \ldots & \beta_n & \ldots & \beta_{2r} & \beta_{2r-1} & \beta_{2r-2} & \beta_{2r-3} & \ldots & \beta_r \\
\hline
1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0
\end{array}\right) \end{array}$$

Φ è non singolare poiché, essendo $\beta_r \neq 0$, le ultime r colonne sono palesemente linearmente indipendenti fra loro e le prime n - r colonne sono linearmente indipendenti fra loro e dalle ultime r colonne (si vedano le ultime n - r righe). Inoltre, $L_b\, \varphi_{r+k}$ si ottiene moltiplicando per b, cioè per B, la $(r + k)$-esima riga di φ_x e pertanto è nulla.

Possiamo dunque determinare la *forma normale* di S_L e metterne a fuoco, in particolare, la *dinamica zero*. Per questo, ricordiamo che:

$$\tilde{x} := \begin{pmatrix} \tilde{w} \\ \tilde{x}_r \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \varphi(x)$$

quindi

$$\tilde{z}_k = \varphi_{r+k}(x) = x_k \qquad , \qquad k = 1, 2, \dots , n\text{-}r \, .$$

e pertanto (S_L è in forma canonica di controllo):

$$\begin{gathered} \dot{\tilde{z}}_1 = \dot{x}_1 = x_2 = \tilde{z}_2 \\ \dot{\tilde{z}}_2 = \dot{x}_2 = x_3 = \tilde{z}_3 \\ \dots \\ \dot{\tilde{z}}_{n-r-1} = \dot{x}_{n-r-1} = x_{n-r} = \tilde{z}_{n-r} \\ \dot{\tilde{z}}_{n-r} = \dot{x}_{n-r} = x_{n-r+1} \, . \end{gathered}$$

A questo punto, dobbiamo ricordare che (per definizione)

$$\varphi_1(x) = C\,x = \beta_n\,x_1 + \beta_{n-1}\,x_2 + \dots + \beta_r\,x_{n-r+1}$$

e che $\varphi_1(x) = \tilde{x}_1 = \tilde{w}_1$. Quindi,

$$x_{n-r+1} = \frac{1}{\beta_r}(\tilde{w}_1 - \beta_n\,x_1 - \beta_{n-1}\,x_2 - \dots - \beta_{r+1}\,x_{n-r})$$

cioè:

$$x_{n-r+1} = \frac{1}{\beta_r}(\tilde{w}_1 - \beta_n\,\tilde{z}_1 - \beta_{n-1}\,\tilde{z}_2 - \dots - \beta_{r+1}\,\tilde{z}_{n-r}) \, .$$

In conclusione, la dinamica zero di S_L è descritta da:

$$\dot{\tilde{z}} = F\,\tilde{z} + H\,\tilde{w}_1$$

con:

$$F := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ .. & .. & .. & \dots & .. \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\frac{\beta_n}{\beta_r} & -\frac{\beta_{n-1}}{\beta_r} & -\frac{\beta_{n-2}}{\beta_r} & \dots & -\frac{\beta_{r+1}}{\beta_r} \end{pmatrix} , \qquad H := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ .. \\ 0 \\ \frac{1}{\beta_r} \end{pmatrix} .$$

Questo significa che

$$\beta_r \, det(s\, I - F) = \beta_r \left(s^{n-r} + \frac{\beta_{r+1}}{\beta_r} s^{n-r-1} + \dots + \frac{\beta_{n-1}}{\beta_r} s + \frac{\beta_n}{\beta_r} \right) = N(s) \; ;$$

quindi gli autovalori di F, ***gli autovalori*** cioè ***della dinamica zero di S_L, sono gli zeri di G(s)***.

*********   ***   *********

Osservazione (*forma canonica quasi normale*)

La seconda proprietà della subtrasformazione complementare che il Lemma 1 assicura perseguibile, cioè:

$L_b \, \varphi_{r+k} \equiv 0$ in un intorno di $x°$, per ogni $k = 1, 2, \dots , n - r$,

non svolge, in realtà, un ruolo cruciale. E', per altro, molto più facile determinare una subtrasformazione complementare che assicuri soltanto la non singolarità di φ in $x°$ (prima proprietà), senza curarsi troppo della seconda. In tal caso, per $k = 1, 2, \dots , n$-r, risulta:

$$\dot{\tilde{x}}_{r+k} = L_a \, \varphi_{r+k} + u \, L_b \, \varphi_{r+k} := \eta_k(x) + u \, \vartheta_k(x)$$

e quindi, ponendo:

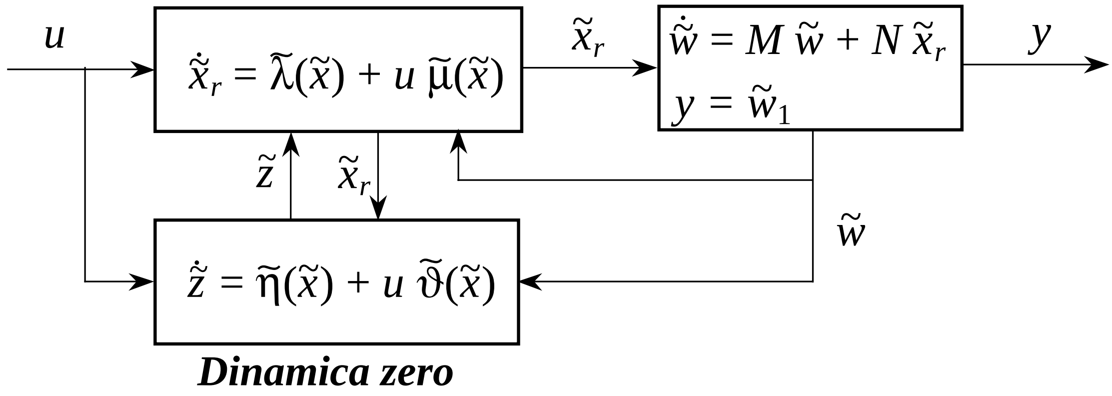
$$\tilde{\eta}_k(\tilde{x}) := \eta_k(\varphi^{-1}(\tilde{x})), \qquad \tilde{\vartheta}_k(\tilde{x}) := \vartheta_k(\varphi^{-1}(\tilde{x}))$$

si ha:

$$\dot{\tilde{x}}_{r+k} = \tilde{\eta}_k(\tilde{x}) + u \, \tilde{\vartheta}_k(\tilde{x}) := \dot{\tilde{z}}_k \, .$$

Con questo completamento "semplificato" della trasformazione φ, l'*equazione di stato* del sistema *S*, nelle nuove coordinate, diventa:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{w}} = M\,\tilde{w} + N\,\tilde{x}_r & \in \mathbf{R}^{r\text{-}1} \\ \dot{\tilde{x}}_r = \tilde{\lambda}(\tilde{x}) + u\,\tilde{\mu}(\tilde{x}) & \in \mathbf{R} \qquad , \qquad \tilde{\mu}(\tilde{x}^\circ) \neq 0 \\ \dot{\tilde{z}} = \tilde{\eta}(\tilde{x}) + u\,\tilde{\vartheta}(\tilde{x}) & \in \mathbf{R}^{n\text{-}r} \end{cases}$$



Forma canonica ***quasi normale*** di *S*.

Linearizzazione esterna e dinamica zero

Obiettivo di questo paragrafo è mettere in luce quale sia, nel caso $r < n$, la dinamica nascosta conseguente alla linearizzazione esterna (Teorema 1). Per questo, facciamo innanzitutto riferimento alla *forma normale* del sistema *S*. Sia dunque φ un diffeomorfismo che soddisfa entrambe le proprietà del Lemma 1.

Ricordiamo innanzitutto che porre (Teorema 1):

$$v := L_a^r\,c + u\,L_b\,L_a^{r\text{-}1}\,c$$

equivale a porre, nelle nuove coordinate $\tilde{x}$:

$$v = \tilde{\lambda}(\tilde{x}) + u\,\tilde{\mu}(\tilde{x})$$

dove:

$$\tilde\lambda(\tilde x) := \lambda(\varphi^{-1}(\tilde x)) = [L_a^r\, c]_{\varphi^{-1}(\tilde x)} \quad , \quad \tilde\mu(\tilde x) := \mu(\varphi^{-1}(\tilde x)) = [L_b\, L_a^{r\text{-}1}\, c]_{\varphi^{-1}(\tilde x)}.$$

Ricordiamo inoltre che la funzione $\tilde\mu$ è, per costruzione, non nulla in (un intorno di) $\tilde x°$. E' dunque ben definita, in un intorno di $\tilde x°$, la retroazione dallo stato:

$$u = \frac{1}{\tilde\mu(\tilde x)}\ [v - \tilde\lambda(\tilde x)] := \tilde\beta(\tilde x)\ [v - \tilde\alpha(\tilde x)]\ .$$

Per effetto di tale retroazione, la forma normale di S

$$\begin{cases} \dot{\tilde w} = M\,\tilde w + N\,\tilde x_r & \in \mathbf{R}^{r\text{-}1} \\ \dot{\tilde x}_r = \tilde\lambda(\tilde x) + u\,\tilde\mu(\tilde x) & \in \mathbf{R} \\ \dot{\tilde z} = \tilde\eta(\tilde x) & \in \mathbf{R}^{n\text{-}r} \\ y = \tilde w_1 := P\,\tilde w & \in \mathbf{R} \end{cases} \qquad , \qquad \tilde\mu(\tilde x°) \neq 0$$

dove: $P' := [1\ \ 0\ \ 0\ \ \ldots\ \ 0]' \in \mathbf{R}^{r\text{-}1}$ e $\tilde x := [\tilde w'\ \ \tilde x_r\ \ \tilde z']'$, diventa:

$$\boldsymbol{S^*:} \qquad \begin{cases} \dot{\tilde w} = M\,\tilde w + N\,\tilde x_r & \in \mathbf{R}^{r\text{-}1} \\ \dot{\tilde x}_r = v & \in \mathbf{R} \\ \dot{\tilde z} = \tilde\eta(\tilde x) & \in \mathbf{R}^{n\text{-}r} \\ y = P\,\tilde w & \in \mathbf{R} \end{cases}$$

Infine, possiamo dare di S^* una formulazione più compatta, capace di separarne la parte "viva" da quella "nascosta", o cieca. Una breve riflessione consente di riconoscere che la parte "viva" è costituita dalle prime due equazioni di stato e dall'equazione di uscita, tutte lineari, mentre la parte "nascosta" è costituita dalla terza equazione di stato (y non dipende da $\tilde z$).

Precisamente, con riferimento a:

$$
S^*: \quad \begin{cases} \dot{\tilde{w}} = M\,\tilde{w} + N\,\tilde{x}_r & \in \mathbf{R}^{r\text{-}1} \\ \dot{\tilde{x}}_r = v & \in \mathbf{R} \\ \dot{\tilde{z}} = \tilde{\eta}(\tilde{x}) & \in \mathbf{R}^{n\text{-}r} \\ y = P\,\tilde{w} & \in \mathbf{R} \end{cases}
$$

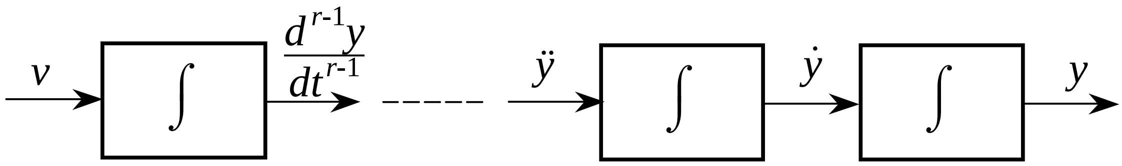
se si pone:

$$
\tilde{q} := \begin{bmatrix} \tilde{w} \\ \\ \tilde{x}_r \end{bmatrix}, \qquad A := \begin{bmatrix} M & N \\ \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B := \begin{bmatrix} 0 \\ \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad C := \begin{bmatrix} P & 0 \end{bmatrix},
$$

e, come sempre, $\tilde{x} := [\,\tilde{q}' \quad \tilde{z}'\,]'$, si ottiene:

$$
S^*: \quad \begin{cases} \dot{\tilde{q}} = A\,\tilde{q} + B\,v \\ y = C\,\tilde{q} \\ \dot{\tilde{z}} = \tilde{\eta}(\tilde{x}) \end{cases}
$$

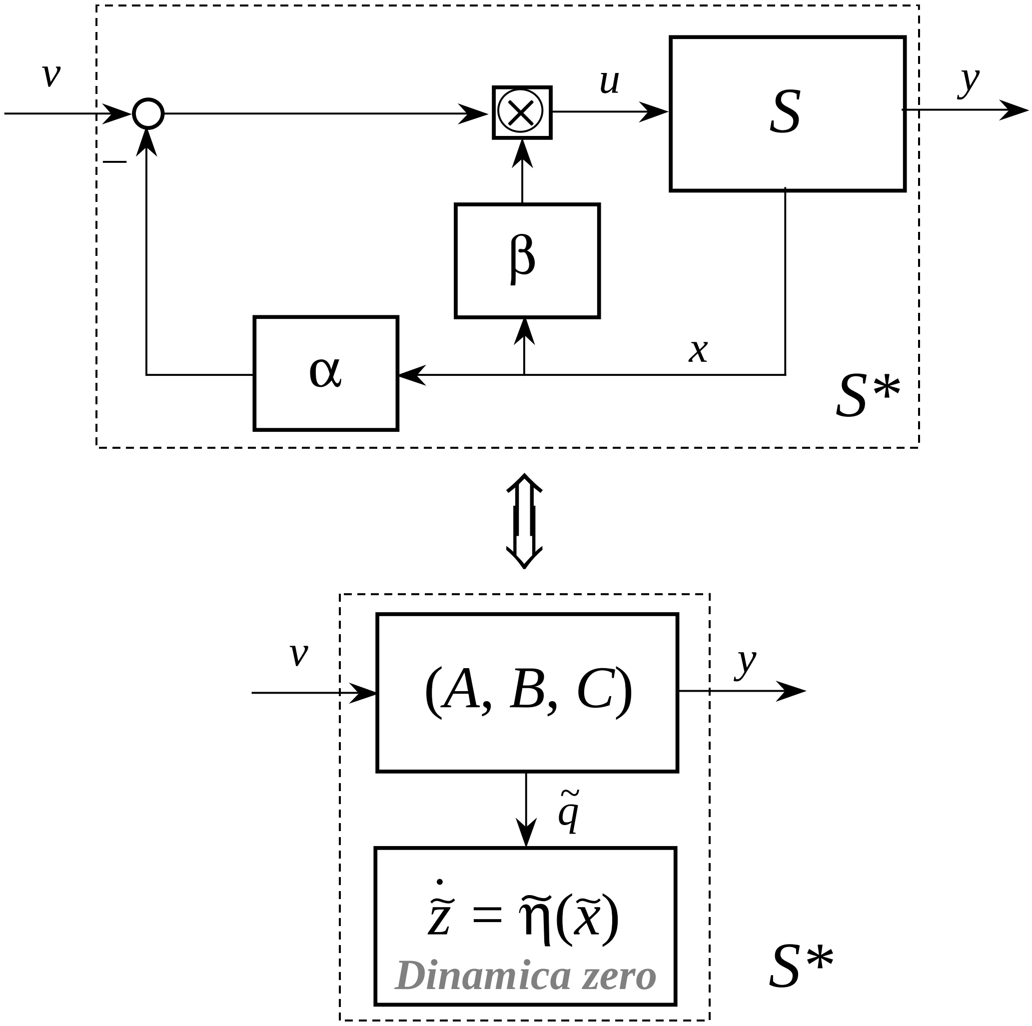
- Il sistema (A, B, C) è in forma canonica di controllo e non ha zeri; quindi, è raggiungibile e osservabile. E’ facile riconoscere che si tratta del sistema costituito dalla cascata di r integratori, con ingresso v e uscita y, già incontrato a commento del Teorema 1.



- La ***dinamica zero***, vale a dire il sistema:

$$
\dot{\tilde{z}} = \tilde{\eta}(\tilde{x})
$$

descrive la dinamica nascosta (la parte cieca) di S^*, prodotta dalla retroazione linearizzante.



***Commento* 1**

La linearizzazione esatta può essere effettuata nell'intorno di un punto $x°$ qualsiasi dello spazio di stato (purché in $x°$ sia ben definito il grado relativo di S). Molto spesso, però, è interessante eseguire questo tipo di "compensazione" (qualora ne sussistano le condizioni) nell'intorno di uno stato di equilibrio di S corrispondente a un ingresso costante. Senza ledere la generalità, possiamo supporre che tale stato di equilibrio sia l'origine dello spazio di stato, corrisponda a ingresso nullo e dia uscita nulla:

$$x° = 0 \qquad , \qquad a(0) = 0 \qquad , \qquad c(0) = 0 \ .$$

Se così è, allora per ogni k = 1, 2, … , r, si ha: $\varphi_k(0) := [L_a^{k\text{-}1}\, c]_0 = 0$. Per altro, in virtù del Lemma 1, è sempre possibile completare la trasformazione φ in modo che sia soddisfatta, tra le altre, anche la condizione: $\varphi_{r+k}(0) := 0$, per ogni $k = 1, 2, \ldots , n - r$. Così facendo, anche $\tilde{x}°$, come $x°$, coinciderà con l'origine dello spazio di stato; infatti, $\tilde{x}° = \varphi(x°) = \varphi(0) = 0$. Inoltre, poiché:

$$u = \frac{1}{\tilde{\mu}(\tilde{x})}\ [v - \tilde{\lambda}(\tilde{x})] := \tilde{\beta}(\tilde{x})\ [v - \tilde{\alpha}(\tilde{x})] \quad , \quad \tilde{\lambda}(\tilde{x}) := \lambda(\varphi^{-1}(\tilde{x}))$$

si ha: $\tilde{\lambda}(\tilde{x}°) = \tilde{\lambda}(0) = \lambda(0) = [L_a^r\ c]_0 = 0$; quindi l'origine $\tilde{x}° = 0$, che è uno stato di equilibrio di S corrispondente a $u = 0$, è anche uno stato di equilibrio di S^* corrispondente a $v = 0$.

***Commento* 2**

La linearizzazione esterna del sistema S in un intorno dell'origine è del tutto inconsistente se $\tilde{z} = 0$ non è uno *stato di equilibrio asintoticamente stabile della dinamica zero corrispondente a* $\tilde{q} = 0$, con un bacino di attrazione abbastanza ampio; idealmente tale da comprendere tutti gli stati della dinamica zero raggiungibili a seguito di andamenti ammissibili dell'ingresso v.

Dinamica zero e modello lineare tangente in x°

Con riferimento a

$$\boldsymbol{S:} \qquad \begin{cases} \dot{x} = a(x) + b(x)\,u & , \qquad x(0) := x_0 \in \mathbf{R}^n \\ y = c(x) \end{cases}$$

sia: $a(0) = 0$ e $c(0) = 0$ sicché l'origine dello spazio di stato è uno stato di equilibrio di S corrispondente a ingresso nullo ($u(t) = u° = 0$) e $y° = 0$ è il conseguente valore costante dell'uscita. Sia infine $x° := 0$. Supponiamo inoltre che il diffeomorfismo φ sia stato scelto in modo che risulti: $\tilde{x}° = \varphi(x°) = \varphi(0) = 0$. Allora l'origine $\tilde{z}° = 0$ è uno stato di equilibrio della dinamica zero di S corrispondente a ingresso nullo.

Il modello lineare tangente a S in $x° = 0$ è dato da:

$$\delta S : \quad \begin{cases} \delta\dot{x} = a_x(0)\, \delta x + b(0)\, \delta u \\ \delta y = c_x(0)\, \delta x \end{cases}$$

e indichiamo con $G_0(s) := c_x(0)\, [s\, I - a_x(0)]^{-1}\, b(0)$ la sua funzione di trasferimento.

***Proposizione* 1**

Sia r il grado relativo di S e sia: $F := \tilde{\eta}_{\tilde{z}}(0)$ lo jacobiano nell'origine della dinamica zero di S, allora:

1. il grado relativo di $G_0(s)$ è uguale a r;
2. gli autovalori di F sono gli autovalori della "parte cieca" di δS nonché gli zeri di $G_0(s)$.

Si noti che il grado relativo di $G_0(s)$ esiste sempre; quello di S in $x°$, non è detto. Tuttavia, se r è il grado relativo di S e si ha che δS è stabilizzabile e a fase minima, allora $\tilde{z}° = 0$ è uno stato di equilibrio asintoticamente stabile della dinamica zero.

Linearizzazione esterna e assegnamento dei poli

Una volta verificato che la linearizzazione esterna sia, almeno localmente, tecnicamente plausibile (δS sia stabilizzabile e gli zeri di $G_0(s)$ abbiano parte reale negativa), ci si può chiedere se non sia "poco conveniente" che il risultato visibile sia un sistema lineare senza zeri e r poli nell'origine (r integratori in cascata).

Con riferimento al sistema S^*,

$$S^* : \quad \begin{cases} \dot{\tilde{q}} = A\, \tilde{q} + B\, v \\ y = C\, \tilde{q} \\ \dot{\tilde{z}} = \tilde{\eta}(\tilde{x}) \end{cases}$$

dove:

$$\tilde{x} := \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \\ \tilde{z} \end{bmatrix}, \quad \tilde{q} := \begin{bmatrix} \tilde{w} \\ \\ \tilde{x}_r \end{bmatrix}; \quad A := \begin{bmatrix} M & N \\ & \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} 0 \\ \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C := \begin{bmatrix} P & 0 \end{bmatrix};$$

$$M := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ .. & .. & .. & \dots & .. \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad N := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ .. \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad ,$$

e quindi (A, B, C) è in forma canonica di controllo, osserviamo che in ogni istante t, essendo noti per ipotesi lo stato $x(t)$ e il diffeomorfismo φ, è anche da ritenersi noto lo stato $\tilde{x}(t) = \varphi(x(t))$. In particolare, è da ritenere nota la sua componente $\tilde{q}(t)$. Allora ponendo:

$$v = -K\,\tilde{q} + \upsilon$$

$$K = [k_r \quad k_{r\text{-}1} \quad \dots \quad k_1]$$

si ottiene

$$\boldsymbol{S^{**}}: \qquad \begin{cases} \dot{\tilde{q}} = (A - B\,K)\,\tilde{q} + B\,\upsilon \\ y = C\,\tilde{q} \\ \dot{\tilde{z}} = \tilde{\eta}(\tilde{x}) \end{cases}$$

e il polinomio caratteristico di $A - B\,K$ è dato da:

$$\chi(s) = s^r + k_1\,s^{r\text{-}1} + k_2\,s^{r\text{-}2} + \dots + k_r$$

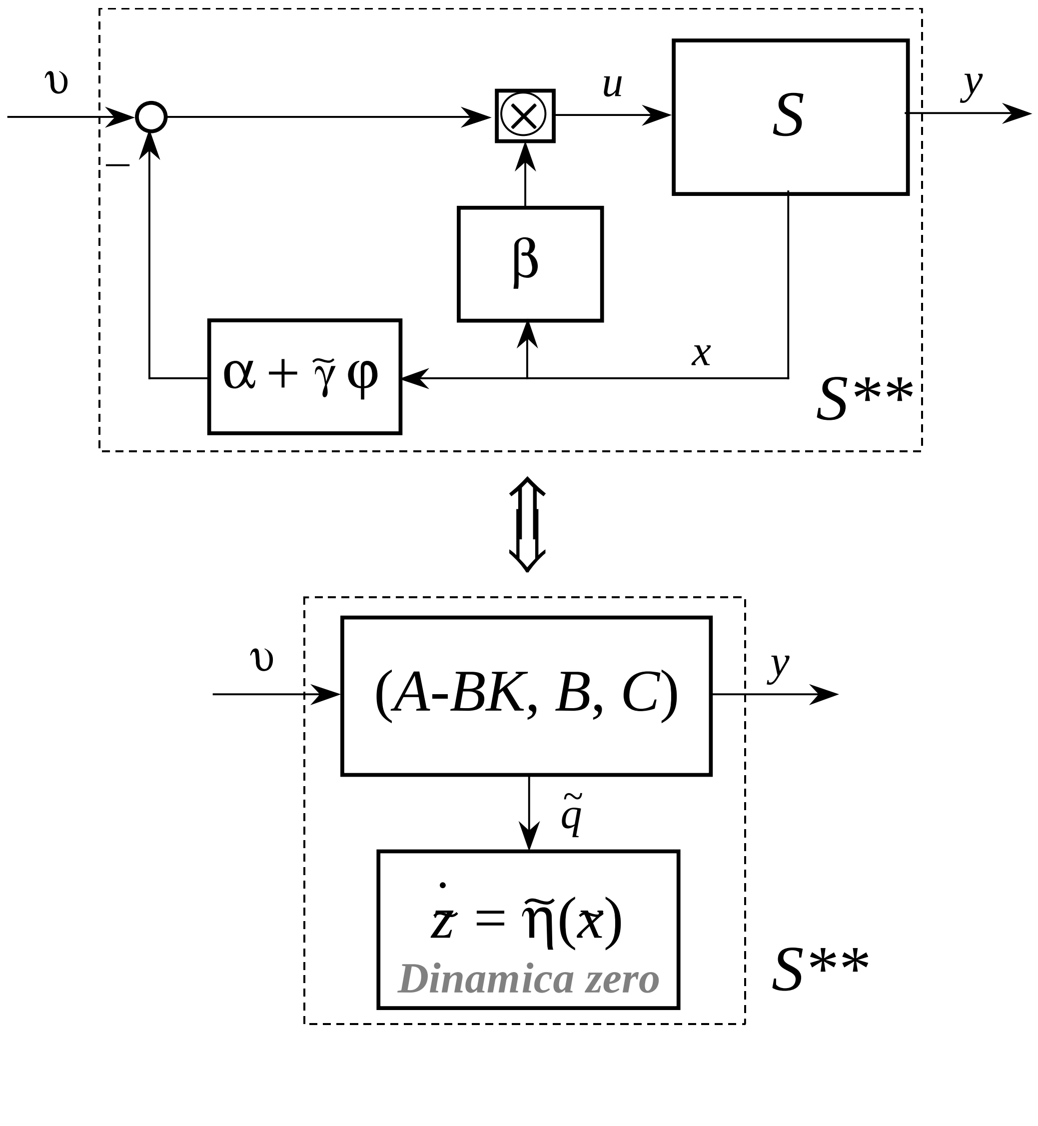
La funzione di trasferimento da υ a y non ha zeri e i suoi poli coincidono con le radici di $\chi(s)$.

La *retroazione linearizzante con assegnamento dei poli* è in definitiva data da:

$$u = \tilde{\beta}(\tilde{x})\,[v - \tilde{\alpha}(\tilde{x})] = \tilde{\beta}(\tilde{x})\,[\upsilon - \tilde{\gamma}\,\tilde{x} - \tilde{\alpha}(\tilde{x})] = \beta(x)\,[\upsilon - \tilde{\gamma}\,\varphi(x) - \alpha(x)]$$

dove:

$$\tilde{\gamma} := [K \quad 0]\,.$$



Linearizzazione completa

Se $r = n$, cioè se il grado relativo di S è uguale all'ordine del sistema, la dinamica zero svanisce e la procedura fin qui illustrata produce di fatto una *linearizzazione completa* (o *totale*) del sistema.

In particolare, si ha: $\tilde{q} = \tilde{x} = \varphi(x)$ e il sistema risultante

$$\boldsymbol{S^{**}}: \qquad \begin{cases} \dot{\tilde{q}} = (A - B\,K)\,\tilde{q} + B\,\upsilon \\ y = C\,\tilde{q} \end{cases}$$

non solo è lineare e tempo-invariante, ma *raggiungibile* (in forma canonica di controllo), *osservabile* (privo di zeri) e con un polinomio caratteristico dato da:

$$\chi(s) = s^n + k_1\,s^{n-1} + k_2\,s^{n-2} + \ldots + k_n$$

se

$$K = [k_n \quad k_{n-1} \quad \ldots \quad k_1]\,.$$

Commento

Una breve riflessione consente tuttavia di riconoscere che, in tutto ciò, l'uscita y svolge in realtà un ruolo quasi esclusivamente strumentale, dal momento che l'ipotesi fondamentale è la disponibilità dello stato x, mentre, a cose fatte, cruciale è la linearità dell'equazione di stato nelle nuove coordinate $\tilde{q}$. Questo porta a riformulare nel modo seguente il problema della linearizzazione totale.

Problema (*Linearizzazione completa mediante retroazione algebrica dallo stato*)**.** Dato un sistema regolare

$$\boldsymbol{S_o} : \qquad \dot{x} = a(x) + b(x)\, u \qquad \in \mathbf{R}^n$$

con: $a(0) = 0$, $b(0) \neq 0$, stato accessibile ($x(t)$ è noto in ogni istante t) e ingresso u scalare, dire se (e come) sia possibile determinare, in un intorno di $x° = 0$, un diffeomorfismo φ, con $\varphi(0) = 0$, e una retroazione algebrica dallo stato:

$$u = \beta(x)\,[v - \alpha(x)] := \beta(x)\, v + \sigma(x)$$

tali che, nelle nuove coordinate $\tilde{x} = \varphi(x)$, il sistema reazionato S_o^* assuma la forma

$$\boldsymbol{S_o^*} : \qquad \dot{\tilde{x}} = A\,\tilde{x} + B\, v$$

con (A, B) raggiungibile.

Come si sa, la soluzione di questo problema esiste ed è nota se in un intorno di $x°$ è possibile trovare una funzione regolare $c(\cdot)$ tale che il sistema

$$\boldsymbol{S} : \qquad \begin{cases} \dot{x} = a(x) + b(x)\, u \\ y = c(x) \end{cases}$$

abbia grado relativo $r = n$.

Il nostro primo obiettivo è dimostrare che *la condizione* appena enunciata, come *palesemente sufficiente*, *è anche necessaria*.

A questo scopo, è interessante premettere una notevole proprietà del sistema S.

***Lemma* 2** (*Invarianza del grado relativo*)

Il grado relativo di S è invariante sia rispetto a un cambio di coordinate nello spazio di stato, sia rispetto ad una retroazione algebrica dallo stato.

Prova. Sia φ un diffeomorfismo definito in un intorno di $x°$ e siano $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$ le funzioni che descrivono S nelle nuove coordinate $\tilde{x}$, vale a dire:

$$\tilde{a} = [\varphi_x\, a]_{\varphi^{-1}}\,, \quad \tilde{b} = [\varphi_x\, b]_{\varphi^{-1}}\,, \quad \tilde{c} = c(\varphi^{-1})\;;$$

quindi, poiché $x = \varphi^{-1}(\tilde{x})$,

$$L_{\tilde{a}}\, \tilde{c} = \tilde{c}_{\tilde{x}}\, \tilde{a} = c_x(\varphi^{-1})\, \varphi^{-1}_{\tilde{x}}\; [\varphi_x\, a]_{\varphi^{-1}}$$

ma $\varphi^{-1}_{\tilde{x}}\;\varphi_x(\varphi^{-1}) = I$, quindi

$$L_{\tilde{a}}\, \tilde{c} = c_x(\varphi^{-1})\, a(\varphi^{-1}) = [L_a\, c]_{\varphi^{-1}}\,.$$

Procedendo in modo anlogo, è facile dimostrare che

$$L_{\tilde{b}}\, L^k_{\tilde{a}}\, \tilde{c} = [L_b\, L^k_a\, c]_{\varphi^{-1}}$$

pertanto, in base alla definizione, il grado relativo di S non può che essere invariante rispetto ad un cambio di coordinate.

♣ Per quanto riguarda la retroazione algebrica dallo stato, notiamo innanzitutto che la sua applicazione all'equazione di stato di S dà:

$$\dot{x} = a + b\, u = a + b\, (\beta\, v + \sigma) = a + b\, \sigma + b\, \beta\, v\,.$$

Ora vogliamo dimostrare che, se r è il grado relativo di S, e quindi in particolare: $L_b\, L^k_a\, c \equiv 0$, per $k = 0, 1, 2, \dots, r$-2, allora risulta:

$$L^k_{a + b\sigma}\; c = L^k_a\; c \quad , \quad k = 0, 1, 2, \dots, r - 1\;.$$

Infatti, questo è vero banalmente per k=0. Per induzione, supponendo che ciò sia vero per un generico $k \le r - 2$, si ha:

$$L_{a+b\sigma}^{k+1} c = L_{a+b\sigma} L_{a+b\sigma}^{k} c = L_{a+b\sigma} L_a^k c = (L_a^k c)_x (a + b\,\sigma) =$$

$$= L_a^{k+1} c + (L_b L_a^k c)\,\sigma = L_a^{k+1} c \quad .$$

Ma, dalla relazione appena dimostrata, discende anche che

$$L_{b\beta} L_{a+b\sigma}^{k} c = L_{b\beta} L_a^k c = (L_b L_a^k c)\,\beta = 0 \quad , \quad k = 0, 1, 2, \dots , r - 2$$

e che, se $\beta(x°) \neq 0$,

$$L_{b\beta} L_{a+b\sigma}^{r-1} c \neq 0$$

Pertanto, il grado relativo di S è invariante rispetto a una retroazione algebrica dallo stato.

***Teorema* 2**

Il problema della linearizzazione completa mediante retroazione algebrica dallo stato ha soluzione se e solo se, in un intorno di $x°$, esiste una funzione regolare c tale che il sistema S abbia grado relativo $r = n$.

Prova. $\Leftarrow$ La sufficienza è ovvia.
$\Rightarrow$ Se il problema ha soluzione, ricordiamo che, per ogni coppia (A, B) raggiungibile, esistono una matrice T non singolare e un vettore riga K tali che:

$$T(A + B\,K)\,T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ .. & .. & .. & \dots & .. \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad T\,B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ .. \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Ponendo:

$$\hat{x} := T\,\tilde{x} = T\,\varphi(x) := \hat{\varphi}(x)$$

$$\hat{\sigma}(x) := \sigma(x) + \beta(x)\,K\,\varphi(x)$$

una breve riflessione consente di riconoscere che

$$\hat{a} := [\hat{\varphi}_x\,(a + b\,\hat{\sigma})]_{\hat{\varphi}^{-1}} = T\,(A + B\,K)\,T^{-1}\,\hat{x}$$

$$\hat{b} := [\hat{\varphi}_x\,b\,\beta]_{\hat{\varphi}^{-1}} = T\,B\;;$$

quindi, ponendo: $y = [1 \quad 0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0]\,\hat{x}$, è facile riconoscere che il sistema così ottenuto ha grado relativo n.

Poiché, per il Lemma 2, il grado relativo è invariante rispetto a tutte le operazioni compiute, è chiaro che, nelle coordinate originali, si avrà:

$$y = c(x)$$

con una $c(\cdot)$ opportuna e che, con quell'equazione d'uscita, il grado relativo del sistema S non può che essere n.

Osservazione. Per quanto interessante sul piano concettuale, il Teorema 2 non è di grande aiuto nel risolvere il problema della linearizzazione completa. Si limita a dirci che, se una soluzione esiste, deve esistere una funzione regolare $c(\cdot)$, definita in un intorno di $x°$, tale che S abbia grado relativo uguale a n. Cioè tale che:

$$\begin{gathered} L_b\,c = 0 \\ L_b\,L_a\,c = 0 \\ \ldots \\ L_b\,L_a^{n-2}\,c = 0 \end{gathered}$$

con $[L_b\,L_a^{n-1}\,c]_{x°} \neq 0$. In altre parole, si tratta di discutere la soluzione di un sistema di $n - 1$ *equazioni differenziali non lineari alle derivate parziali* nell'incognita $c(\cdot)$. Un bel rompicapo!

Seconda breve divagazione

Il *prodotto di Lie* $[\cdot,\cdot]$ (o "Lie bracket") di due campi vettoriali regolari:

$$f, g : A \to \mathbf{R}^n,$$

dove A è un sottoinsieme aperto di $\mathbf{R}^n$, è un campo vettoriale regolare $\lambda : A \to \mathbf{R}^n$ così definito:

$$\lambda := [f, g] := L_f\, g - L_g\, f\,.$$

Si noti che, se $g = k\, f$, $k \in \mathbf{R}$, allora $[f, g] = 0$.

Naturalmente, il risultato di un prodotto di Lie può essere, a sua volta, un fattore di un successivo prodotto di Lie. In particolare, è interessante considerare sequenze del tipo:

$$[f, g]\,, \quad [f, [f, g]]\,, \quad [f, [f, [f, g]]]\,, \quad \text{ecc.}$$

per le quali è utile la notazione:

$$ad_f^0\, g := g \quad , \quad ad_f^k\, g := [f, ad_f^{k-1}\, g] \quad \Rightarrow \quad [f, [f, [f, g]]] = ad_f^3\, g$$

Alcune proprietà del prodotto di Lie. Il prodotto di Lie:

1. è *bilineare* su $\mathbf{R}$; vale a dire che, se f, g, f_1, g_1, f_2, g_2 sono campi vettoriali regolari definiti su $A \subset \mathbf{R}^n$, allora, per ogni $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$,

$$[\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g] = \alpha_1 [f_1, g] + \alpha_2 [f_2, g]$$

$$[f, \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2] = \alpha_1 [f, g_1] + \alpha_2 [f, g_2]$$

2. è *anticommutativo*; cioè:

$$[f, g] = -[g, f]$$

3. soddisfa la cosiddetta *identità di Jacobi*; vale dire che, se f, g, h sono campi vettoriali regolari definiti su $A \subset \mathbf{R}^n$, allora:

$$[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0$$

4. soddisfa una specie di "*regola del prodotto*"; vale a dire che se A è un aperto di $\mathbf{R}^n$, $f, g : A \to \mathbf{R}^n$ e $a : A \to \mathbf{R}$, allora:

$$[f, a\, g] = (L_f\, a)\, g + a\, [f, g] \,.$$

Il sottospazio formato da tutte le possibili combinazioni lineari di k vettori $v_1, v_2, \dots, v_k, \in \mathbf{R}^n$ è detto in inglese "*span* $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$". In italiano, diremo che è il ***sottospazio generato da*** $v_1, v_2, \dots, v_k$ e lo indicheremo, per brevità, con: *sgen* $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$.

Consideriamo ora un insieme di k campi vettoriali

$$f_1, f_2, \dots, f_k : A \to \mathbf{R}^n \;,$$

dove A è un sottoinsieme aperto di $\mathbf{R}^n$. La funzione $\Delta(\cdot)$ definita, per ogni $x \in A$, nel modo seguente:

$$\Delta(x) = sgen\, \{ f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)\},$$

è detta *distribuzione*; più precisamente, è la ***distribuzione generata dall'insieme*** $\{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ ***di campi vettoriali*** definiti su A. Una distribuzione è detta *regolare* se sono regolari i campi vettoriali che la generano.

Per ogni $x \in A$, la *dimensione di* $\Delta(x)$ è, per definizione, il rango della matrice:

$$F(x) := [f_1(x) \quad f_2(x) \quad \dots \quad f_k(x)] \in \mathbf{R}^{n \times k} \;.$$

Formalmente: $dim(\Delta(x)) := rango(F(x))$. Se

$$dim(\Delta(x)) = d \quad , \quad \forall\, x \in A$$

la distribuzione Δ è *non singolare in* A e d è la sua *dimensione* (in A).

Un *punto* $x° \in A$ è *di non singolarità* (relativamente a Δ) se Δ è non singolare (ha una dimensione ben definita) in un suo intorno. Altrimenti, si tratta di un *punto singolare* (relativamente a Δ).

Alle distribuzioni si estendono in modo ovvio le nozioni di *somma* e *intersezione* (di sottospazi). Va tuttavia sottolineato che, mentre la somma di due distribuzioni regolari è sempre una distribuzione regolare, non si può dire la stessa cosa per l'intersezione di due distribuzioni regolari.

Quando ci s'imbatte in una *distribuzione* Δ *non regolare*, è possibile e quasi sempre conveniente sostituirla con una sua *approssimazione regolare*. Poiché la somma di distribuzioni regolari è regolare, è ben definita, e si candida come miglior approssimante regolare di Δ, *la più grande distribuzione regolare contenuta in* Δ.

Molte proprietà delle distribuzioni regolari sono conseguenze pressoché immediate delle definizioni date e di analoghe proprietà di algebra lineare. Fra queste, è particolarmente rilevante la seguente.

Proposizione (*Base di una distribuzione regolare in un intorno di* $x°$)

Sia $x°$ un punto di non singolarità di una distribuzione regolare Δ e sia $dim(\Delta(x°)) = d$. Allora esiste un intorno $A°$ di $x°$ e un insieme $\{b_1, b_2, \dots, b_d\}$ di campi vettoriali definiti e regolari in $A°$ tali che, per ogni $x \in A°$:

1. i vettori $b_1(x), b_2(x), \dots, b_d(x)$ sono linearmente indipendenti;
2. $sgen\,\{b_1(x), b_2(x), \dots, b_d(x)\} = \Delta(x)$.

Inoltre, ogni campo vettoriale regolare f definito in $A°$ e contenuto in Δ (cioè tale che $f(x) \in \Delta(x)$, per ogni $x \in A°$) può essere espresso come:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i(x)\, b_i(x)$$

dove le "*coordinate*" $\alpha_i(\cdot)$ sono funzioni scalari regolari definite in $A°$.

Definizione (*Distribuzione involutiva*)

Una distribuzione regolare Δ è *involutiva* se è chiusa rispetto al prodotto di Lie; vale a dire, se:

$$[f_1, f_2] \in \Delta \quad , \quad \forall f_1, f_2 \in \Delta \, .$$

Proposizione

La distribuzione $\Delta(x) = sgen\,\{ f_1(x), f_2(x), \dots , f_k(x)\}$ è involutiva se e solo se

$$[f_i, f_j] \in \Delta \quad , \quad i = 1, 2, \dots , k\text{-}1 \quad , \quad j = i+1, i+2, \dots , k \, .$$

Conseguenza immediata della suddetta proposizione è il seguente *criterio di involutività* della distribuzione Δ.

Siano $F(\cdot)$ e $F_{ij}(\cdot)$ due matrici definite, per ogni $x \in A$, nel modo seguente:

$$F(x) := \begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_k(x) \end{bmatrix}$$

$$F_{ij}(x) := \begin{bmatrix} F(x) & f_{ij}(x) \end{bmatrix} \, , \quad f_{ij} := [f_i, f_j]$$

Criterio di involutività

La distribuzione $\Delta(x) = sgen\,\{ f_1(x), f_2(x), \dots , f_k(x)\}$ è involutiva se e solo se $rango(F_{ij}) = rango(F)$, per ogni $i = 1, 2, \dots , k\text{-}1$ e per ogni $j = i+1, i+2, \dots , k$. (Si tratta, quindi, di calcolare il rango di $k\,(k - 1)/2$ matrici F_{ij}).

Proposizione

Sia Δ una distribuzione di dimensione d, definita e regolare in un sottoinsieme aperto A di $\mathbf{R}^n$, e sia $\{b_1(x), b_2(x), \dots , b_d(x)\}$ una base di Δ in A, allora Δ è involutiva se e solo se $sgen\,\{b_1(x), b_2(x), \dots , b_d(x)\}$ è involutiva.

Esempio

Sia: $n = 3$, $\Delta = sgen\{f_1, f_2\}$,

$$f_1 := \begin{bmatrix} x_2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad f_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{x_1} \end{bmatrix} .$$

Ponendo:

$$F(x) := \begin{bmatrix} x_2 & 0 \\ 4 & 0 \\ 0 & e^{x_1} \end{bmatrix}$$

si riconosce immediatamente che, in $\mathbf{R}^3$, $dim(\Delta) = rango(F) = 2$. Quindi, f_1 e f_2 sono una base di Δ.

$$[f_1, f_2] = f_{2x}\, f_1 - f_{1x}\, f_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ e^{x_1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{x_1} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_2\, e^{x_1} \end{bmatrix}$$

$$F_{12}(x) := \begin{bmatrix} x_2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & e^{x_1} & x_2\, e^{x_1} \end{bmatrix}$$

Poiché $rango(F_{12}) = rango(F) = 2$ in $\mathbf{R}^3$, si può concludere che Δ è una distribuzione involutiva.

Sia ora $\Delta^* := sgen\{f_1^*, f_2^*\}$, con: $f_1^* = f_1$ mentre $f_2^* = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{x_3} \\ 1 \end{bmatrix}$

Operando come nel caso precedente, si trova:

$$F^*(x) := \begin{bmatrix} x_2 & 0 \\ 4 & e^{x_3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \qquad rango(F^*) = 2 \ \text{ in } \ \mathbf{R}^3$$

$$[\,f_1^{\,*}, f_2^{\,*}] = -\begin{bmatrix} e^{x_3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \qquad F_{12}^*(x) := \begin{bmatrix} x_2 & 0 & -e^{x_3} \\ 4 & e^{x_3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Poiché $det(F_{12}^*(x)) = -\,4\;e^{x_3}$, si ha: $rango(F_{12}^*) = 3$ in $\mathbf{R}^3$. Quindi, la distribuzione Δ^* ***non è*** involutiva.

Si noti che Δ^* può anche essere vista come la somma di due distribuzioni monodimensionali: $\Delta_1^* := sgen\{\,f_1^{\,*}\}$, $\Delta_2^* := sgen\{\,f_2^{\,*}\}$. Ora è immediato riconoscere che una distribuzione monodimensionale è sempre involutiva. Abbiamo così implicitamente dimostrato che *la somma di due distribuzioni involutive può non essere involutiva*.

♣♣♣♣♣ ♣♣♣♣♣ ♣♣♣♣♣

***Teorema* 3** (Jakubczyk e Respondek 1980, Su 1982)

Il problema della linearizzazione completa del sistema S in un intorno di $x°$ mediante retroazione algebrica dallo stato ha soluzione se e solo se:

1. il modello lineare δS tangente a S in $x°$ è controllabile, ovvero (equivalentemente) la matrice $[b \;\; ad_a\, b \;\; ad_a^2\, b \;\; \dots \;\; ad_a^{n-1}\, b]_{x°}$ ha rango n (è non singolare);
2. la distribuzione $\Delta := sgen\{b,\ ad_a\, b,\ ad_a^2\, b,\ \dots\ ,\ ad_a^{n-2}\, b\}$ è involutiva in un intorno di $x°$.

Prova. La prova, qui omessa, si basa su un importante teorema di Frobenius che (indirettamente) consente di formulare le condizioni sotto cui il sistema di equazioni differenziali:

$$L_b\, c = 0 \quad , \quad L_b L_a\, c = 0 \quad , \quad \dots \quad , \quad L_b\, L_a^{n-2}\, c = 0$$

nell’incognita $c(\cdot)$ ammette soluzione.

ESEMPIO 1

Sia:

$$
S: \quad \begin{cases} \dot{z}_1 = (p_1 + p_{11} z_1 + p_{12} z_2 + q_1 w) z_1 \\ \\ \dot{z}_2 = (p_2 + p_{21} z_1 + p_{22} z_2) z_2 \end{cases}
$$

Se $p_{12}\ p_{21} < 0$, si tratta di un modello "preda-predatore" con intervento (sostegno/prelievo) su una delle due specie.

In forma più compatta, con evidente significato dei simboli:

$$
S: \quad \dot{z} = Diag(z)\,(p + P z + q w)
$$

dove, in particolare, $q := [q_1 \quad 0]'$.

Equilibrio

Uno stato di equilibrio corrispondente a un ingresso costante e uguale a $\bar{w}$ è non degenere se vi partecipano entrambe le specie ($\bar{z}_1 \neq 0$, $\bar{z}_2 \neq 0$).

Ogni stato di equilibrio non degenere corrispondente a $\bar{w}$ è dunque soluzione di:

$$
p + P z + q \bar{w} = 0 .
$$

Qualora P sia non singolare, se

$$
\bar{z} = - P^{-1}(p + q \bar{w})
$$

sta nel primo quadrante aperto ($\bar{z} > 0$) , allora $\bar{z}$ è uno stato di equilibrio non degenere di S corrispondente a $\bar{w}$.

Riformulazione

Se $\bar{z}$ è uno stato di equilibrio non degenere di S, sia:

$$
x := z - \bar{z}; \qquad \Rightarrow \qquad \dot{x} = \dot{z} \ , \quad z = \bar{z} + x.
$$

$$
u := w - \bar{w} \qquad \Rightarrow \qquad w = \bar{w} + u
$$

S **:** $\dot{x} = Diag(\bar{z} + x)\,(P\,x + q\,u) := a(x) + b(x)\,u$

$$a(x) = Diag(\bar{z} + x)\,P\,x \quad , \quad b(x) = Diag(\bar{z} + x)\,q$$

infatti: $\dot{x} = \dot{z} = Diag(z)\,(p + P\,z + q\,w) =$

$$= Diag(\bar{z} + x)\,[p + P\,(\bar{z} + x) + q\,(\bar{w} + u)]$$

ma, per definizione, $p + P\,\bar{z} + q\,\bar{w} = 0$.

Dunque, $x = 0$ $(z = \bar{z})$ è uno stato di equilibrio di S corrispondente a $u = 0$ $(w = \bar{w})$. In forma estesa, si ha:

$$\boldsymbol{S}: \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = (\bar{z}_1 + x_1)\,(p_{11}\,x_1 + p_{12}\,x_2 + q_1\,u) \\ \\ \dot{x}_2 = (\bar{z}_2 + x_2)\,(\,p_{21}\,x_1 + p_{22}\,x_2) \end{cases}$$

Il modello lineare δS tangente a S nell'origine è dato da:

δ*S* **:** $\delta\dot{x} = A\,\delta x + B\,\delta u$

dove:

$$A := \begin{pmatrix} \bar{z}_1\,p_{11} & \bar{z}_1\,p_{12} \\ \\ \bar{z}_2\,p_{21} & \bar{z}_2\,p_{22} \end{pmatrix} = Diag(\bar{z})\,P \quad , \quad B := \begin{pmatrix} \bar{z}_1\,q_1 \\ \\ 0 \end{pmatrix} = Diag(\bar{z})\,q$$

$$M_c = [B \quad A\,B] = \begin{pmatrix} \bar{z}_1\,q_1 & \bar{z}_1^{\,2}\,p_{11}\,q_1 \\ \\ 0 & \bar{z}_1\,\bar{z}_2\,p_{21}\,q_1 \end{pmatrix}$$

δS è controllabile $\quad\Leftrightarrow\quad det(M_c) \neq 0 \quad\Leftrightarrow\quad p_{21}\,q_1 \neq 0$

Supponiamo dunque che sia: $p_{21}\, q_1 \neq 0$.

In questo caso (sistema del second'ordine), la seconda condizione di completa linearizzabilità mediante retroazione algebrica dallo stato è certamente verificata; infatti (n = 2), la distribuzione

$$\Delta := sgen\{b, ad_a\, b, ad_a^2\, b, \dots , ad_a^{n\text{-}2}\, b\} = sgen\{b\}$$

è involutiva, qualunque sia il campo vettoriale b.

Per realizzare effettivamente la linearizzazione, occorre trovare un'equazione d'uscita rispetto alla quale il grado relativo di S sia 2.

1) Proviamo con $y = x_1$.

$$\dot{y} = \dot{x}_1 = (\overline{z}_1 + x_1)\,(p_{11}\, x_1 + p_{12}\, x_2 + q_1\, u)$$

poiché $z_1 > 0$ implica $x_1 > - \overline{z}_1$ e q_1 è diverso da zero per ipotesi, si deve concludere che, rispetto a questa uscita, il grado relativo di S è uguale a 1.

1) Proviamo allora con $y = x_2$.

$$\dot{y} = \dot{x}_2 = (\overline{z}_2 + x_2)\,(\, p_{21}\, x_1 + p_{22}\, x_2)$$
$$\ddot{y} = (\overline{z}_2 + x_2)\, p_{21}\, \dot{x}_1 + [(\, p_{21}\, x_1 + p_{22}\, x_2) + (\overline{z}_2 + x_2)\, p_{22}]\, \dot{x}_2 =$$
$$= \alpha(x) + [\beta\,(x)]^{-1}\, u$$

dove:

$$\alpha(x) := \; p_{21}\,(\overline{z}_1 + x_1)\,(\overline{z}_2 + x_2)\,(p_{11}\, x_1 + p_{12}\, x_2) +$$
$$+ p_{22}\,(\overline{z}_2 + x_2)^2\,(\, p_{21}\, x_1 + p_{22}\, x_2) +$$
$$+ (\overline{z}_2 + x_2)\,(\, p_{21}\, x_1 + p_{22}\, x_2)^2$$

$$[\beta\,(x)]^{-1} := p_{21}\, q_1\,(\overline{z}_1 + x_1)\,(\overline{z}_2 + x_2) \neq 0 \quad , \quad \text{se } \; x_1 > - \overline{z}_1 \; \text{ e } \; x_2 > - \overline{z}_2$$

Rispetto all'uscita $y = x_2$, il grado relativo del sistema S è dunque uguale a 2 e ciò ne consente la linearizzazione completa. Il cambiamento di coordinate nello spazio di stato che la rende possibile è dato da:

$$\tilde{x} = \varphi(x)$$

con:

$$\varphi_1(x) = x_2$$
$$\varphi_2(x) = (\bar{z}_2 + x_2)\,(p_{21}\, x_1 + p_{22}\, x_2)$$

da cui:

$$x_1 = \frac{1}{p_{21}}\left(\frac{\tilde{x}_2}{\bar{z}_2 + \tilde{x}_1} - p_{22}\,\tilde{x}_1\right)$$
$$x_2 = \tilde{x}_1$$

quindi φ è regolare, invertibile, con inversa φ^{-1} regolare nel semipiano aperto $\tilde{x}_1 = x_2 > -\bar{z}_2$ (diffeomorfismo).

Il controllore linearizzante si ottiene ponendo: $\alpha(x) + [\beta(x)]^{-1} u = v$; cioè:

$$u = \beta(x)\,[v - \alpha(x)]\,.$$

In questo modo, il legame tra v e y si riduce ad un integratore doppio.

Se vogliamo che, oltre ad effettuare la linearizzazione, il controllore imponga come polinomio caratteristico del sistema ad anello chiuso:

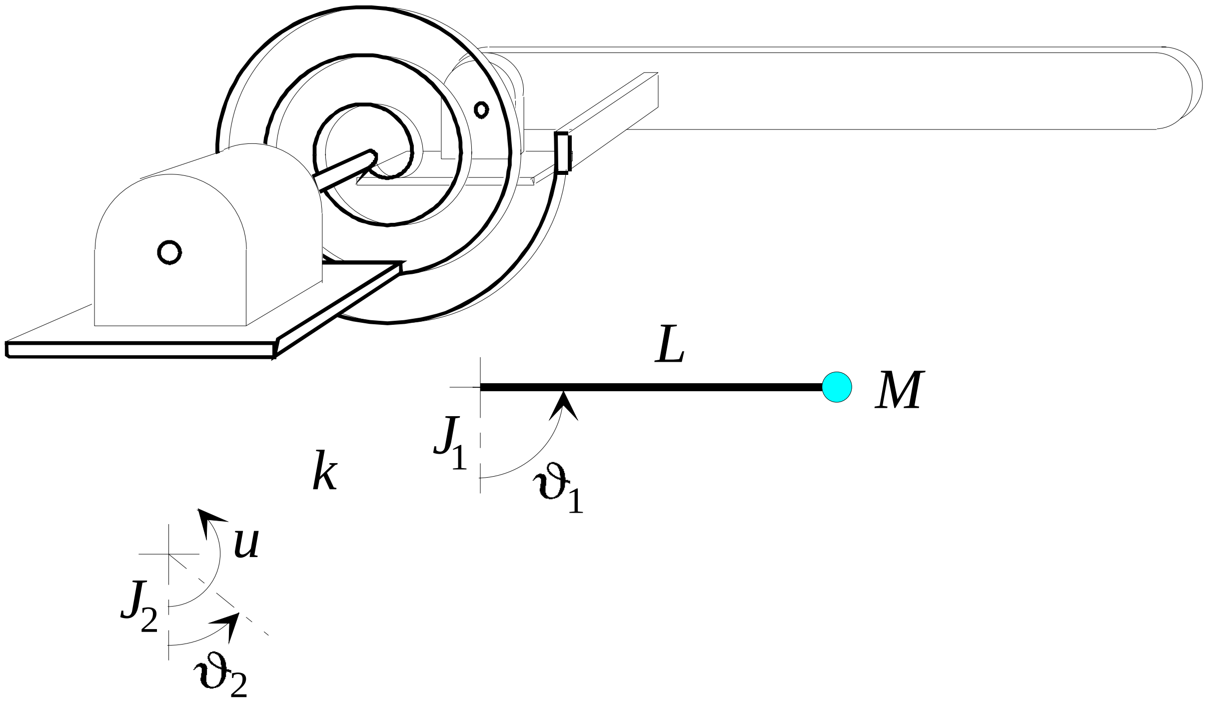
$$\chi°(s) = s^2 + k_1\, s + k_2$$

basterà porre:

$$u = \beta(x)\,[v - \alpha(x)] - K\,\varphi(x)$$

con: $K := [k_1 \quad k_2]$.

ESEMPIO 2



$$\begin{cases} J_1\, \ddot{\vartheta}_1 + F_1\, \dot{\vartheta}_1 + M\, g\, L\, sin(\vartheta_1) + k\, (\vartheta_1 - \vartheta_2) = 0 \\ J_2\, \ddot{\vartheta}_2 + F_2\, \dot{\vartheta}_2 - k\, (\vartheta_1 - \vartheta_2) = u \end{cases}$$

Ponendo:

$$x := |\, \vartheta_1 \quad \dot{\vartheta}_1 \quad \vartheta_2 \quad \dot{\vartheta}_2\, |'$$

si ha:

$\boldsymbol{S}$ **:** $$\dot{x} = a(x) + b(x)\, u$$

dove: ...

$$a(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{M\,g\,L}{J_1}\,sin(x_1) - \frac{F_1}{J_1}\,x_2 - \frac{k}{J_1}\,(x_1 - x_3) \\ x_4 \\ -\frac{F_2}{J_2}\,x_4 + \frac{k}{J_2}\,(x_1 - x_3) \end{bmatrix}, \quad b(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J_2} \end{bmatrix}$$

Poiché $a(0) = 0$, l'origine $x = 0$ è uno stato di equilibrio di S corrispondente all'ingresso $u = 0$. Per saggiare la completa linearizzabilità di S in un intorno di tale stato di equilibrio, calcoliamo:

$$[b \quad ad_a\,b \quad ad_a^{\,2}\,b \quad ad_a^{\,3}\,b] =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{-k}{J_1\,J_2} \\ 0 & 0 & \frac{k}{J_1\,J_2} & \frac{k\,(F_1\,J_2 + F_2\,J_1)}{J_1^{\,2}\,J_2^{\,2}} \\ 0 & \frac{-1}{J_2} & \frac{-F_2}{J_2^{\,2}} & \frac{k}{J_2^{\,2}} - \frac{F_2^{\,2}}{J_2^{\,3}} \\ \frac{1}{J_2} & \frac{F_2}{J_2^{\,2}} & \frac{F_2^{\,2}}{J_2^{\,3}} - \frac{k}{J_2^{\,2}} & \frac{F_2^{\,3}}{J_2^{\,4}} - \frac{2\,k\,F_2}{J_2^{\,3}} \end{bmatrix}$$

Infatti,

$$a(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{M\,g\,L}{J_1}\,sin(x_1) - \frac{F_1}{J_1}\,x_2 - \frac{k}{J_1}\,(x_1 - x_3) \\ x_4 \\ -\frac{F_2}{J_2}\,x_4 + \frac{k}{J_2}\,(x_1 - x_3) \end{bmatrix}, \qquad b(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J_2} \end{bmatrix}$$

$$ad_a\,b = [a, b] = L_a\,b - L_b\,a = b_x\,a - a_x\,b = -\,a_x\,b$$

$$a_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{M\,g\,L}{J_1}\,cos(x_1) - \frac{k}{J_1} & -\frac{F_1}{J_1} & \frac{k}{J_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{J_2} & 0 & -\frac{k}{J_2} & -\frac{F_2}{J_2} \end{bmatrix}$$

$$-\,a_x\,b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{J_2} & \frac{F_2}{J_2^{\,2}} \end{bmatrix}' := b_2^*$$

$$ad_a^{\,2}\,b = [a, [a, b]] = [a, b_2^*] = -\,a_x\,b_2^* =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{k}{J_1\,J_2} & -\frac{F_2}{J_2^{\,2}} & \frac{F_2^{\,2}}{J_2^{\,3}} - \frac{k}{J_2^{\,2}} \end{bmatrix}' := b_3^*$$

$$ad_a^{\,3}\,b = [a, b_3^*] = -\,a_x\,b_3^* =$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{k}{J_1\,J_2} & \frac{k\,(F_1\,J_2 + F_2\,J_1)}{J_1^{\,2}\,J_2^{\,2}} & \frac{k}{J_2^{\,2}} - \frac{F_2^{\,2}}{J_2^{\,3}} & \frac{F_2^{\,3}}{J_2^{\,4}} - \frac{2\,k\,F_2}{J_2^{\,3}} \end{bmatrix}'$$

Poiché:

1) $rango([b \quad ad_a\, b \quad ad_a^2\, b \quad ad_a^3\, b]_{x\,=\,0}) = 4$; (δS controllabile)

2) la distribuzione $\Delta := sgen\{b \quad ad_a\, b \quad ad_a^2\, b\}$, a *base costante*, è involutiva ovunque,

possiamo concludere che S è completamente linearizzabile.

***Come*?**

Proviamo a prendere come "variabile d'uscita" la posizione angolare x_1 e calcoliamo, se c'è, il corrispondente grado relativo di S. Ricordiamo che:

Il sistema S ha grado relativo r in $x°$ se, in un intorno di $x°$: $L_b L_a^k c \equiv 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, r\text{-}2,$ e inoltre: $[L_b L_a^{r-1} c]_{x°} \neq 0.$

Abbiamo (tentativamente) posto:

$y = x_1 = c(x)$;

quindi:

$$L_b\, c(x) = c_x(x)\, b(x) = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]\, [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1/J_2]' = 0$$

$$L_b L_a\, c(x) = L_b\, (c_x(x)\, a(x)) = L_b\, x_2 =$$
$$= [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]\, [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1/J_2]' = 0$$

$$L_b L_a^2\, c(x) = L_b L_a\, x_2 = L_b\, [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]\, a(x) =$$
$$= L_b \big(- MgL\, sin(x_1) - F_1\, x_2 - k\, (x_1 - x_3)\big)/J_1 =$$
$$= \frac{1}{J_1}\, [- MgL\, cos(x_1) - k \qquad - F_1 \qquad k \qquad 0]\, [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1/J_2]' = 0$$

Ora,

$$L_a^3\, c(x) = L_a \Big(- MgL\, sin(x_1) - F_1\, x_2 - k\, (x_1 - x_3)\Big)/J_1 =$$

$$= \frac{1}{J_1}\, [- MgL\, cos(x_1) - k \quad - F_1 \quad k \quad 0]\; a(x)$$

quindi

$$L_b\, L_a^3\, c(x) = \frac{1}{J_2} \frac{\partial}{\partial x_4} \Big(\frac{1}{J_1}\, [- MgL\, cos(x_1) - k \quad - F_1 \quad k \quad 0]\; a(x)\Big) =$$

$$= \frac{k}{J_1\, J_2} \neq 0\ .$$

Pertanto, il grado relativo di S in un intorno dell'origine è ben definito ed è uguale a 4, che è anche l'ordine del sistema. La legge di controllo che realizza la linearizzazione completa di S è dunque data da:

$$u = \frac{1}{L_b\, L_a^3\, c}\, (v - L_a^4\, c) := \beta\, (v - \alpha)$$

dove:

$$\alpha := L_a^4\, c \qquad , \qquad \beta := \frac{1}{L_b\, L_a^3\, c} = \frac{J_1\, J_2}{k}$$

e precisamente:

$$\alpha := L_a^4\, c(x) = L_a\, (L_a^3\, c(x)) =$$

$$= \frac{1}{J_1}\; L_a \Big([- MgL\, cos(x_1) - k \quad - F_1 \quad k \quad 0]\; a(x)\Big) =$$

$$= \frac{1}{J_1} \, L_a \left[\left(- MgL\, cos(x_1) - k\right) x_2 + \right.$$

$$\left. + \frac{F_1}{J_1} \left(MgL\, sin(x_1) + F_1\, x_2 + k\, x_1 - k\, x_3\right) + k\, x_4\right] =$$

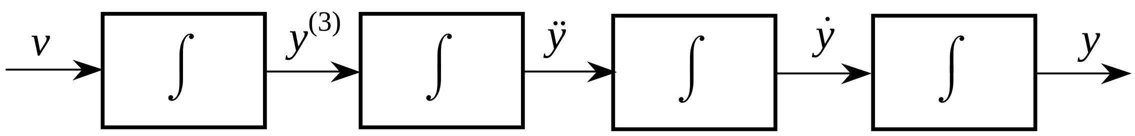
$$= \frac{1}{J_1} \begin{pmatrix} MgL\,(x_2\, sin(x_1) + \frac{F_1}{J_1} cos(x_1)) + \frac{F_1}{J_1} k \\ - (MgL\, cos(x_1) + k) + \frac{F_1^{\,2}}{J_1} \\ - \frac{F_1}{J_1} k \\ k \end{pmatrix}' \quad a(x) =$$

$$= \frac{M\,g\,L}{J_1} x_2^{\,2}\, sin(x_1) - \frac{F_2\, k}{J_1\, J_2} x_4 + \frac{k^2}{J_1\, J_2} (x_1 - x_3) +$$

$$+ \left[\frac{M\,g\,L}{J_1} cos(x_1) + \frac{k}{J_1}\right]\left[\frac{M\,g\,L}{J_1} sin(x_1) + \frac{F_1}{J_1} x_2 + \frac{k}{J_1} (x_1 - x_3)\right] +$$

$$- \frac{F_1^{\,2}}{J_1^{\,2}} \left[\frac{M\,g\,L}{J_1} sin(x_1) + \frac{F_1}{J_1} x_2 + \frac{k}{J_1} (x_1 - x_3)\right] - \frac{F_1}{J_1^{\,2}} k\, x_4\,.$$

La legge di controllo così trovata fornisce una *linearizzazione completa* di S in $\mathbf{R}^4$.



Domanda: Qual è il legame fra le vecchie e le nuove variabili di stato?

Il legame cercato è quello descritto dalla trasformazione

$$\tilde{x} = \varphi(x) \qquad , \qquad \tilde{x} := [y \quad y^{(1)} \quad y^{(2)} \quad y^{(3)}]' ,$$

dove :

$$\varphi_k := L_a^{k\text{-}1}\, c \qquad , \qquad k = 1, 2, 3 , 4 .$$

Quindi,

$$\varphi_1(x) = c(x) = x_1$$

$$\varphi_2(x) = L_a\, \varphi_1(x) = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]\; a(x) = x_2$$

$$\varphi_3(x) = L_a\, \varphi_2(x) = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]\; a(x) =$$

$$= -\frac{1}{J_1}\Big(MgL\, sin(x_1) + F_1\, x_2 + k\,(x_1 - x_3)\Big)$$

$$\varphi_4(x) = L_a\, \varphi_3(x) = \alpha(x) =$$

$$= \frac{M\,g\,L}{J_1}\, x_2^{\,2}\, sin(x_1) - \frac{F_2\, k}{J_1\, J_2}\, x_4 + \frac{k^2}{J_1\, J_2}\,(x_1 - x_3) +$$

$$+ \Big[\frac{M\,g\,L}{J_1}\, cos(x_1) + \frac{k}{J_1}\Big]\Big[\frac{M\,g\,L}{J_1}\, sin(x_1) + \frac{F_1}{J_1}\, x_2 + \frac{k}{J_1}\,(x_1 - x_3)\Big] +$$

$$- \frac{F_1^{\,2}}{J_1^{\,2}}\Big[\frac{M\,g\,L}{J_1}\, sin(x_1) + \frac{F_1}{J_1}\, x_2 + \frac{k}{J_1}\,(x_1 - x_3)\Big] - \frac{F_1}{J_1^{\,2}}\, k\, x_4.$$

Lo Jacobiano di φ in $x° = 0$ è triangolare e gli elementi sulla diagonale sono: 1, 1, k/J_1, $-\dfrac{F_2\, J_1 + F_1\, J_2}{J_1\, J_2}\, k/J_1$.

Pertanto, almeno in un intorno dell'origine, la trasformazione φ è un diffeomorfismo.

Ma c'è di più …

La funzione φ è invertibile in $\mathbf{R}^4$. Infatti, dalle prime due equazioni del sistema $\tilde{x} = \varphi(x)$, banalmente si ha:

$$x_1 = \tilde{x}_1$$
$$x_2 = \tilde{x}_2$$

dalla terza equazione:

$$x_3 = \frac{MgL}{k}\, sin(\tilde{x}_1) + \tilde{x}_1 + \frac{F_1}{k}\,\tilde{x}_2 + \frac{J_1}{k}\,\tilde{x}_3$$

e infine dalla quarta (con qualche passaggio in più):

$$x_4 = \frac{J_1^2\, J_2}{k\,(F_1\, J_2 + F_2\, J_1)} \Bigg(\frac{M\,g\,L}{J_1}\,\tilde{x}_2^{\,2}\, sin(\tilde{x}_1) +$$
$$- \frac{k}{J_1\, J_2}\big(MgL\, sin(\tilde{x}_1) + F_1\,\tilde{x}_2 + J_1\,\tilde{x}_3\big) +$$
$$+ \Big[\frac{M\,g\,L}{J_1}\, cos(\tilde{x}_1) + \frac{k}{J_1}\Big]\Big[\frac{M\,g\,L}{J_1}\, sin(\tilde{x}_1) + \frac{F_1}{J_1}\,\tilde{x}_2 +$$
$$- \frac{1}{J_1}\big(MgL\, sin(\tilde{x}_1) + F_1\,\tilde{x}_2 + J_1\,\tilde{x}_3\big)\Big] +$$
$$- \frac{F_1^{\,2}}{J_1^{\,2}}\Big[\frac{M\,g\,L}{J_1}\, sin(\tilde{x}_1) +$$
$$+ \frac{F_1}{J_1}\,\tilde{x}_2 - \frac{1}{J_1}\big(MgL\, sin(\tilde{x}_1) + F_1\,\tilde{x}_2 + J_1\,\tilde{x}_3\big)\Big] - \tilde{x}_4 \Bigg)$$

La funzione φ è dunque un diffeomorfismo *globale* e la soluzione trovata costituisce una linearizzazione completa e globale del sistema S.

Linearizzazione completa con assegnamento dei poli

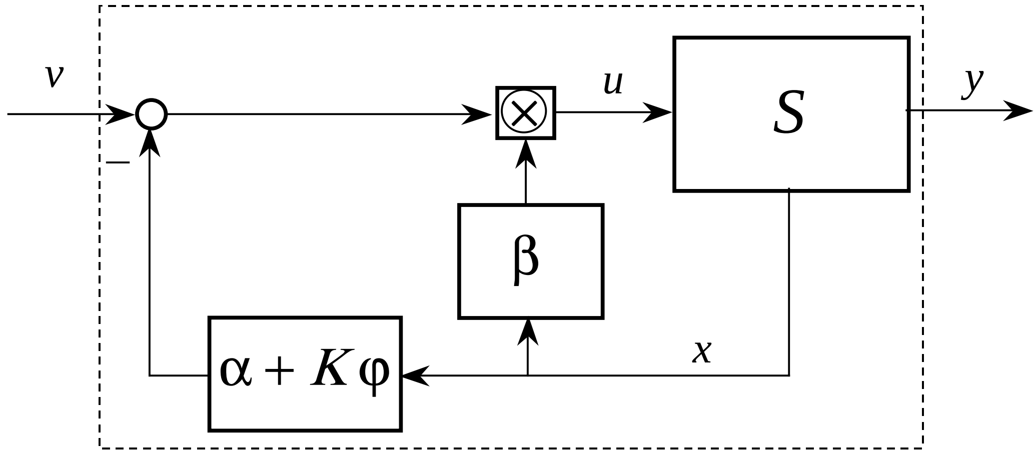
Se si desidera che gli autovalori del sistema linearizzato, anziché stare nell'origine, siano le radici del polinomio:

$$\chi(s) = s^n + k_1 s^{n-1} + k_2 s^{n-2} + ... + k_n$$

sappiamo che, una volta noto il diffeomorfismo φ, il risultato voluto si ottiene facilmente ponendo:

$$K := [k_1 \quad k_2 \quad \dots \quad k_n]$$

$$u = \beta(x)\,[v - \alpha(x) - K\,\varphi(x)]$$



In questo modo, il legame lineare fra v e $\tilde{x} = \varphi(x)$ risulta descritto da una coppia (A, B) in forma canonica di controllo, e $\chi(s)$ è il polinomio caratteristico della matrice dinamica A.