

Capitolo 4
Controllo a struttura variabile

Controllo a Struttura Variabile (VSC) o in Modo Scivolato (Sliding Mode)

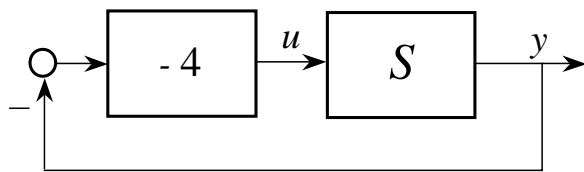
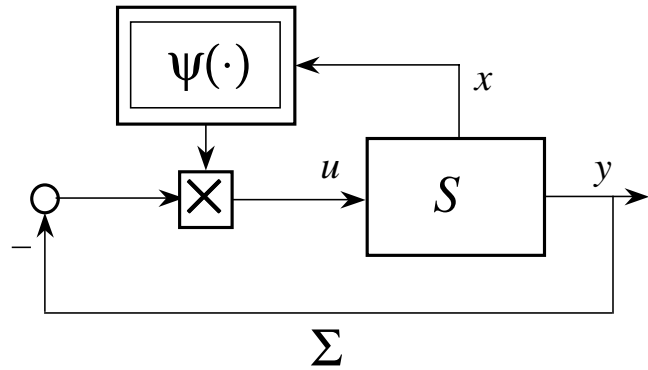
1. Introduzione. *Un esempio classico* (Emelianov)

$$S : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 2x_2 + u \\ y = x_1 \end{cases}$$

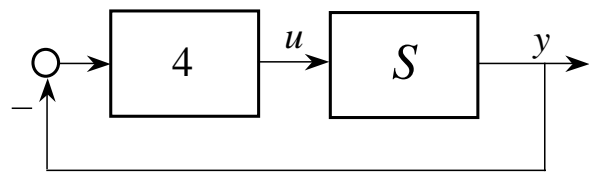
$$C : u = -\psi(x) y$$

dove:

$$\psi(x) = \begin{cases} 4 & , \quad \text{se } s(x) > 0 \\ -4 & , \quad \text{se } s(x) < 0 \end{cases} \quad , \quad s(x) := x_1 (0.5 x_1 + x_2)$$



$$\Sigma_1 : \psi(x) = -4$$



$$\Sigma_2 : \psi(x) = 4$$

Σ è un sistema “*a struttura variabile*”

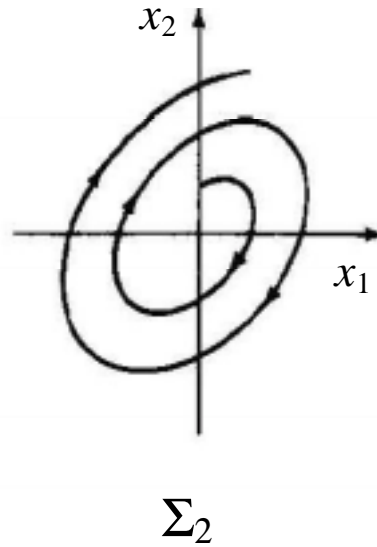
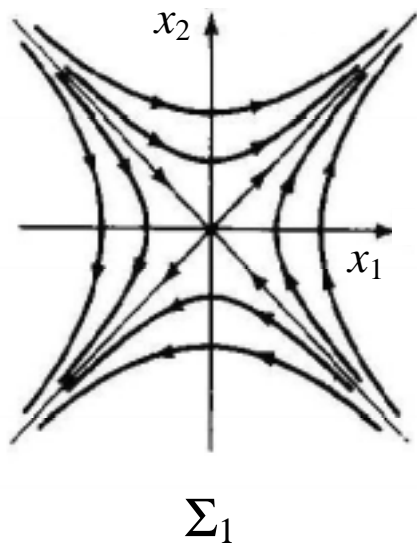
$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

$$\chi_1(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

$$\Sigma_2 : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -5x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

$$\chi_2(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 5$$

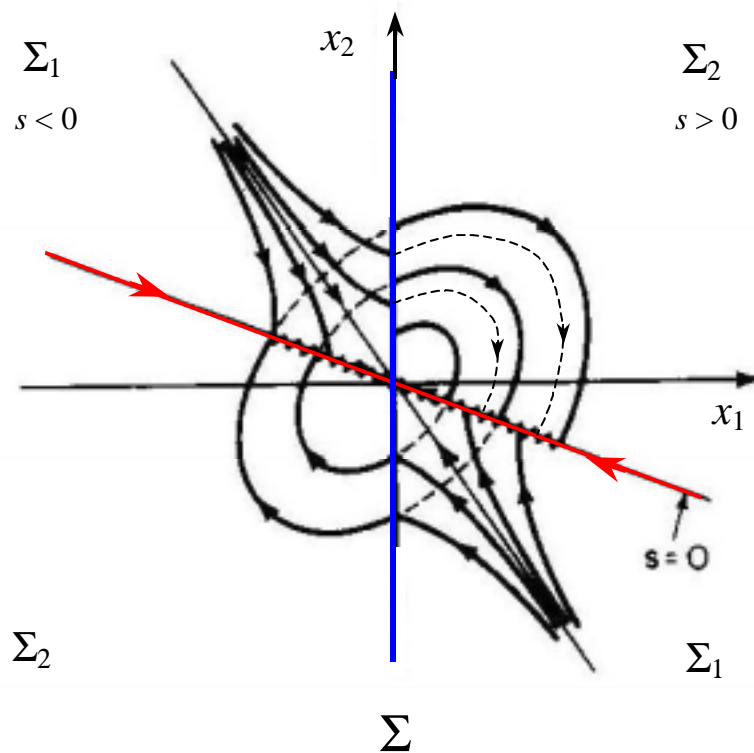
I sistemi lineari e tempo-invarianti Σ_1 e Σ_2 sono entrambi *instabili*.



Analisi di Σ

Nel piano di stato (x_1, x_2) , le regioni a $s(x) > 0$ e a $s(x) < 0$ sono delimitate da due rette:

$$s(x) := x_1 (0.5 x_1 + x_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ 0.5 x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$



La figura consente di rilevare che la commutazione da Σ_1 a Σ_2 in corrispondenza della retta $x_1 = 0$ avviene in modo consueto: il punto terminale dell'arco di traiettoria governato da Σ_1 coincide con il punto iniziale del successivo arco di traiettoria governato da Σ_2 .

Più interessante è quanto accade sulla retta $0.5 x_1 + x_2 = 0$ che, una volta raggiunta, non può più essere abbandonata (*retta di scivolamento*). Il guadagno ψ commuta a frequenza infinita tra +4 e -4, mentre lo stato del sistema evolve lungo la retta di scivolamento con un moto che è facile determinare sostituendo $x_2 = -0.5 x_1$ nella prima equazione di stato di S : $\dot{x}_1 = x_2$. In questo modo si ottiene:

$$\dot{x}_1 = -0.5 x_1.$$

L'origine $x = 0$ è dunque uno stato di equilibrio in senso lato (o di pseudo-equilibrio) globalmente stabile del sistema Σ .

2. Controllo a struttura variabile: i fondamenti

Cominciamo a fissare l'attenzione su un problema di regolazione dell'uscita di un sistema S lineare, tempo-invariante, a un ingresso e un'uscita. Sia cioè:

$$S : \begin{cases} \dot{x} = A x + B u \\ y = C x \end{cases}$$

con (A, B) raggiungibile e (A, C) osservabile, e sia y° il valore desiderato dell'uscita, che supponiamo costante (ma non fissato una volta per tutte). Obiettivo dell'azione di controllo è far sì che $y(t)$ tenda a y° , qualunque siano y° e lo stato iniziale di S .

La ricerca di una soluzione del problema mediante un controllore a struttura variabile può svilupparsi secondo le linee seguenti.

- a)** Determinare di una *funzione di commutazione* (“switching function”) $s(\cdot) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ intesa a specificare, la cosiddetta *superficie di scivolamento* (“sliding surface”), caratterizzata dall’equazione: $s(x) = 0$. Sulla superficie di scivolamento lo stato del sistema dovrà evolvere in modo coerente con l’obiettivo del controllo. In particolare, su tale superficie, le traiettorie dovranno convergere ad uno stato di (pseudo-)equilibrio in corrispondenza del quale $y = y^\circ$.
- b)** Determinare una *legge di controllo* $u = k(x; y^\circ)$ tale da garantire che ogni traiettoria avente origine in uno stato iniziale di S esterno alla superficie di scivolamento intercetti tale superficie dopo un intervallo di tempo di durata finita.

Entrambi i passi, (a) e (b), possono essere significativamente semplificati dal ricorso ad alcuni accorgimenti tipici.

A titolo illustrativo, mostriamo uno dei procedimenti possibili. Supponiamo che il sistema S sia (stato posto) in forma canonica di controllo (*Appendice*):

$$\dot{x}_i = x_{i+1} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$\dot{x}_n = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \dots - a_1 x_n + u$$

$$y = b_n x_1 + b_{n-1} x_2 + \dots + b_1 x_n$$

Perchè il problema di regolazione dell’uscita abbia soluzione è necessario che S non abbia zeri nell’origine: $b_n \neq 0$.

a) Scelta della funzione di commutazione

Nel caso di sistemi lineari (ma non solo!), è tipico ricorrere a funzioni di commutazione affini; cioè:

$$s(x) := \beta_{n-1} x_1 + \beta_{n-2} x_2 + \dots + \beta_1 x_{n-1} + x_n - \bar{w} ,$$

con \bar{w} costante. In questo modo, il movimento dello stato di S sulla superficie di scivolamento $s(x) = 0$ sarà governato dal sistema (di ordine $n-1$, in forma canonica di controllo):

$$S^* : \begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1} & , \quad i = 1, 2, \dots, n-2 \\ \dot{x}_{n-1} = x_n = -\beta_{n-1} x_1 - \beta_{n-2} x_2 - \dots - \beta_1 x_{n-1} + \bar{w} . \end{cases}$$

Si noti che il polinomio caratteristico di S^* è dato da:

$$\chi^*(\lambda) = \lambda^{n-1} + \beta_1 \lambda^{n-2} + \dots + \beta_{n-1} .$$

Le sue radici possono essere assegnate arbitrariamente scegliendo opportunamente i coefficienti β_i , $i = 1, 2, n-1$. Se le radici di $\chi^*(\lambda)$ hanno parte reale negativa, S^* è asintoticamente stabile e certamente risulta $\beta_{n-1} \neq 0$. Allora S^* ha un unico stato di equilibrio non nullo per ogni $\bar{w} \neq 0$; precisamente:

$$\bar{x}_1 = \bar{w}/\beta_{n-1} ; \quad \bar{x}_i = 0 \quad , \quad i = 2, 3, \dots, n-1 ;$$

e, corrispondentemente:

$$\bar{x}_n = 0 , \quad \bar{y} = C \bar{x} = b_n \bar{x}_1 = \bar{w} b_n / \beta_{n-1} .$$

Affinché risulti $\bar{y} = y^\circ$, è sufficiente porre: $\bar{w} = \gamma y^\circ$, $\gamma := \beta_{n-1}/b_n$.

b) Condizioni di raggiungimento (in tempo finito, della superficie di scivolamento)

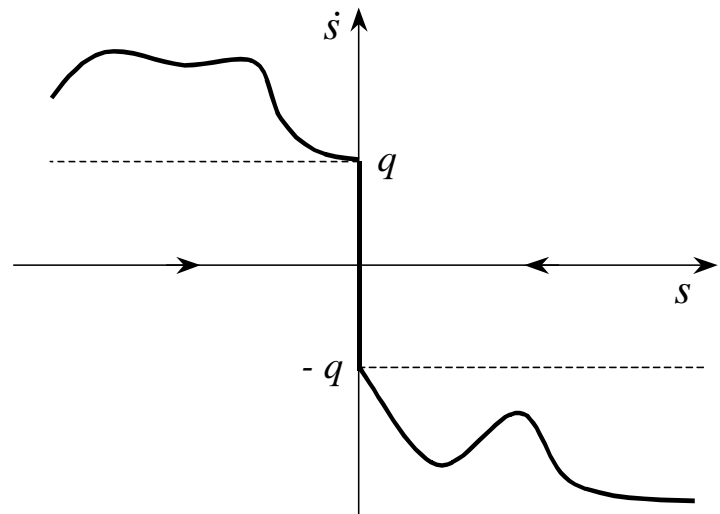
Abbiamo già sottolineato che la superficie $s(x) = 0$ sarà effettivamente una superficie di scivolamento solo se l'azione di controllo farà sì che tutte le traiettorie di S originate da stati iniziali esterni a tale superficie la raggiungano in tempo finito (“*reaching condition*”). L’attuazione di questo obiettivo può essere perseguita seguendo diverse impostazioni. Quella qui adottata è l’impostazione basata sulla *legge di raggiungimento* (“*reaching-law approach*”). Essa consiste nello specificare la dinamica della funzione di commutazione; più precisamente nel far sì che risulti:

$$\dot{s} = -q \operatorname{sgn}(s) - r g(s)$$

con: $q > 0$, $r \geq 0$, e $g(\cdot)$ tale che: $s g(s) > 0$, per ogni $s \neq 0$; tale cioè da appartenere al primo e terzo quadrante. Così facendo, per ogni $s \neq 0$ si ha:

$$s \dot{s} < 0 \quad , \quad |\dot{s}| \geq q > 0 ;$$

quindi, s tende a zero in tempo finito qualunque sia il suo valore iniziale $s(0)$; in altre parole, lo stato x del sistema S raggiunge la superficie di scivolamento ($s = 0$) in un tempo finito $t_r \leq |s(x_0)|/q$, qualunque sia il suo valore iniziale $x_0 = x(0)$.



A questo punto, resta da chiedersi quale sia la legge di controllo che consente di ottenere il risultato appena delineato. La risposta non è difficile. Avendo posto:

$$s(x) := \beta_{n-1} x_1 + \beta_{n-2} x_2 + \dots + \beta_1 x_{n-1} + x_n - \bar{w}, \quad \bar{w} = \gamma y^\circ, \quad \gamma := \beta_{n-1}/b_n,$$

ovvero

$$s(x) = \beta' x - \gamma y^\circ \quad , \quad \beta' := [\beta_{n-1} \quad \beta_{n-2} \quad \dots \quad \beta_1 \quad 1] ,$$

$$\dot{s} = \beta' \dot{x} = \beta' (A x + B u) .$$

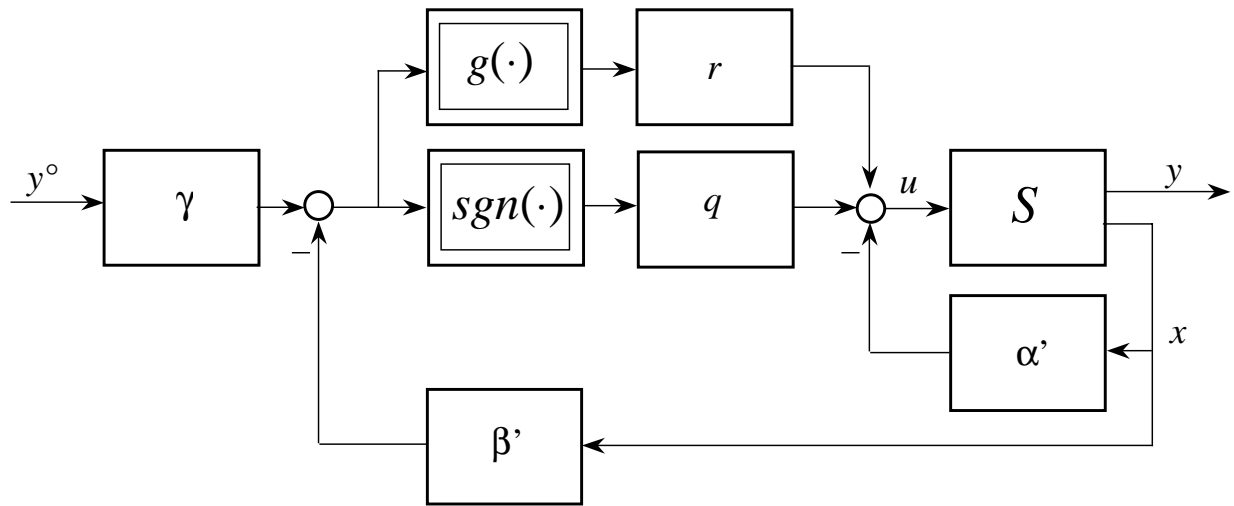
Imponendo: $\dot{s} = -q \operatorname{sgn}(s) - r g(s)$, si ha:

$$\beta' (A x + B u) = -q \operatorname{sgn}(s(x)) - r g(s(x)) ;$$

poiché $\beta' B = 1$, ponendo $\beta' A := \alpha'$ e risolvendo rispetto a u si trova:

$$\begin{aligned} u &= -(\beta' A x + q \operatorname{sgn}(\beta' x - \gamma y^\circ) + r g(\beta' x - \gamma y^\circ)) = \\ &= -\alpha' x + q \operatorname{sgn}(\gamma y^\circ - \beta' x) + r g(\gamma y^\circ - \beta' x) . \end{aligned}$$

Il sistema di controllo risultante è mostrato in figura.

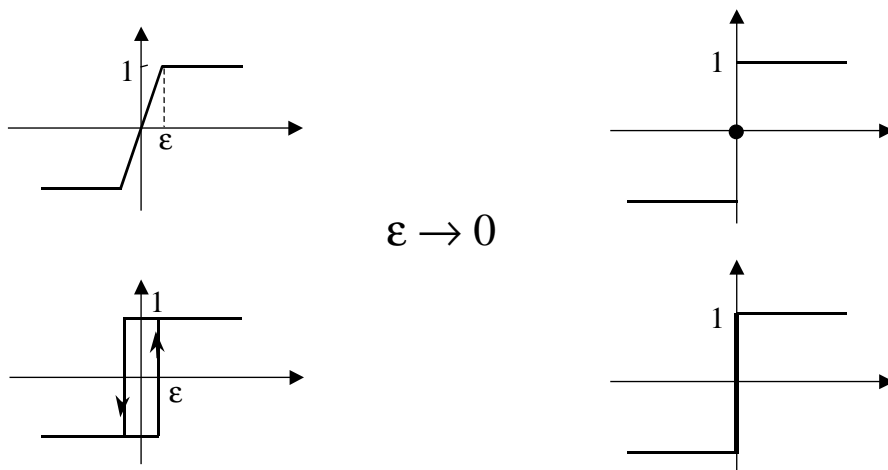


Osservazione

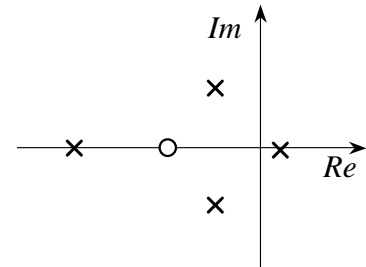
La funzione *segno*, indicata con $sgn(\cdot)$, è abitualmente definita nel modo seguente:

$$sgn(z) := \begin{cases} 1 & , \quad z > 0 \\ 0 & , \quad z = 0 \\ -1 & , \quad z < 0 . \end{cases}$$

Essa può quindi assumere **tre** valori diversi. Questo è in contrasto con l'idea che vi siano **due** “modi di funzionamento” separati dalla superficie di commutazione. Coerentemente, dobbiamo pensare ad una funzione segno definita in modo leggermente diverso da quello consueto. Precisamente, invece di pensare la funzione $sgn(\cdot)$ come una funzione di saturazione caratterizzata da un fronte di salita infinitamente ripido, è conveniente pensarla come un $MB/2$, con $M = 1$ e $B \rightarrow 0$.



3. Un esempio



Il sistema S sia descritto da : $G(s) =$

$$= \frac{10(1 + 0.2s)}{(1 + 0.25s + 0.05s^2)(1 - s)(1 + 0.1s)} = \frac{-400(s + 5)}{s^4 + 14s^3 + 55s^2 + 130s - 200}$$

ovvero da:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 200 & -130 & -55 & -14 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = -[2000 \quad 400 \quad 0 \quad 0]$$

$$a_1 = 14, \quad a_2 = 55, \quad a_3 = 130, \quad a_4 = -200$$

$$b_1 = b_2 = 0, \quad b_3 = -400, \quad b_4 = -2000.$$

Per quanto riguarda la scelta dei parametri che compaiono nella funzione di commutazione, possiamo imporre ad arbitrio (fatta salva la stabilità asintotica) i tre autovalori del moto scivolato. Ad esempio, possiamo decidere di mantenere i tre autovalori di A che giacciono nel semipiano sinistro:

$$\chi^*(\lambda) = (\lambda^2 + 5\lambda + 20)(\lambda + 10) = \lambda^3 + 15\lambda^2 + 70\lambda + 200.$$

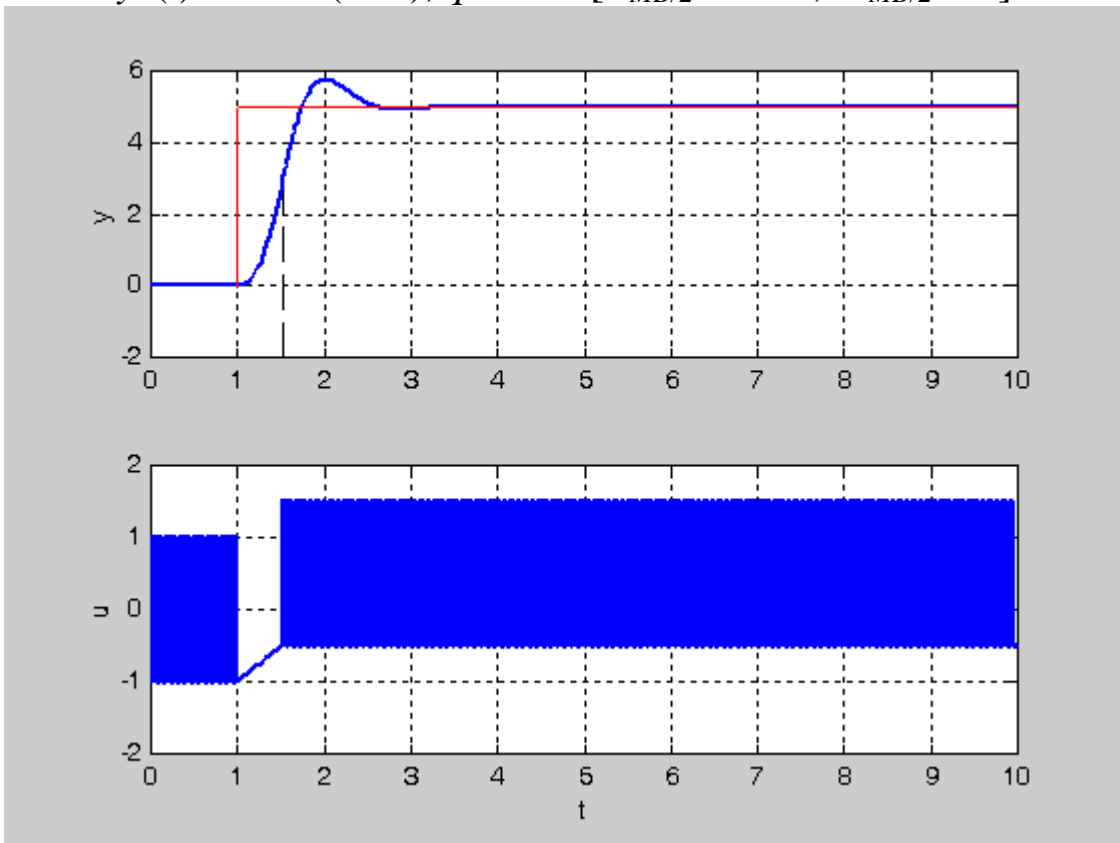
E' chiaro, tuttavia, che questa scelta non è in alcun modo "obbligata". Poniamo dunque: $\beta_1 = 15, \beta_2 = 70, \beta_3 = 200$. Sicché: $\gamma = \beta_3/b_4 = -0.1$,

$$\beta' := [\beta_3 \quad \beta_2 \quad \beta_1 \quad 1] = [200 \quad 70 \quad 15 \quad 1]$$

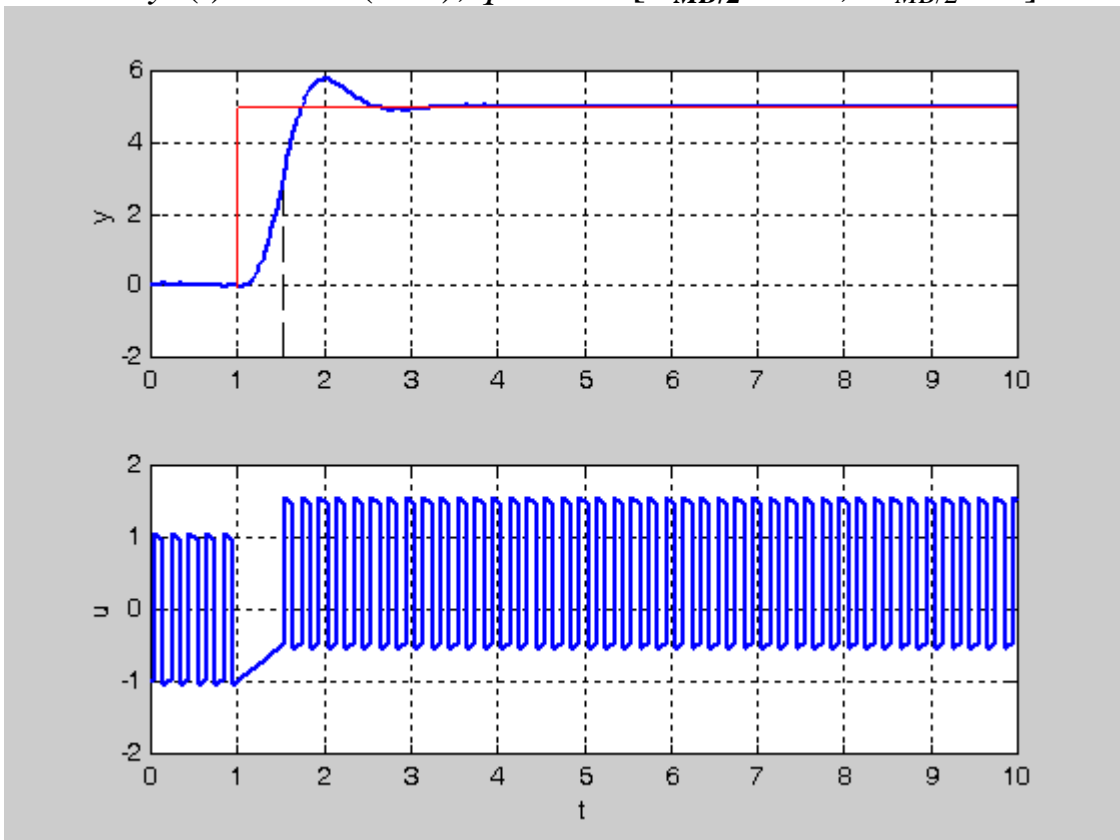
$$\alpha' := \beta' A = [200 \quad 70 \quad 15 \quad 1].$$

Quanto a $g(\cdot)$, nel primo e terzo quadrante, $r \geq 0$ e $q > 0$, possiamo cominciare a porre: $r = 0$, rendendo così irrilevante la scelta di $g(\cdot)$, e $q = 1$.

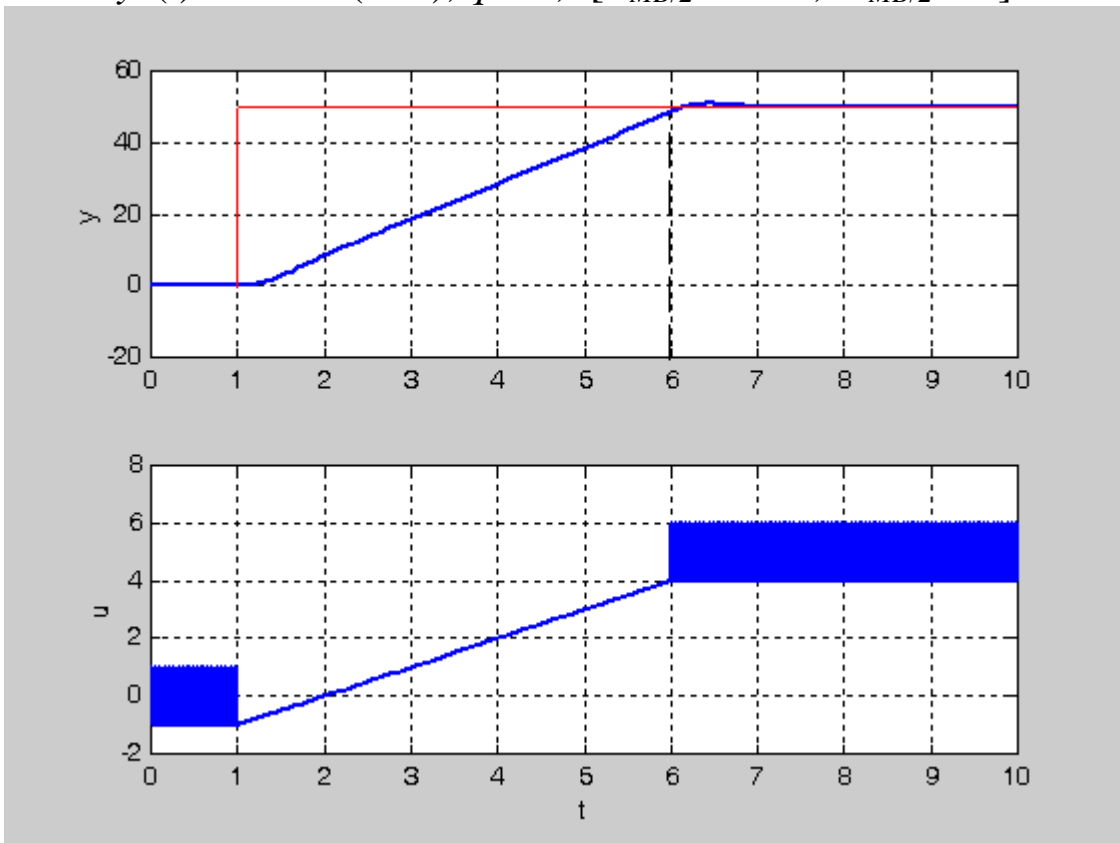
$$y^\circ(t) = 5 \operatorname{sca}(t - 1), q = 1 \quad [B_{MB/2} = 0.02, M_{MB/2} = 1]$$



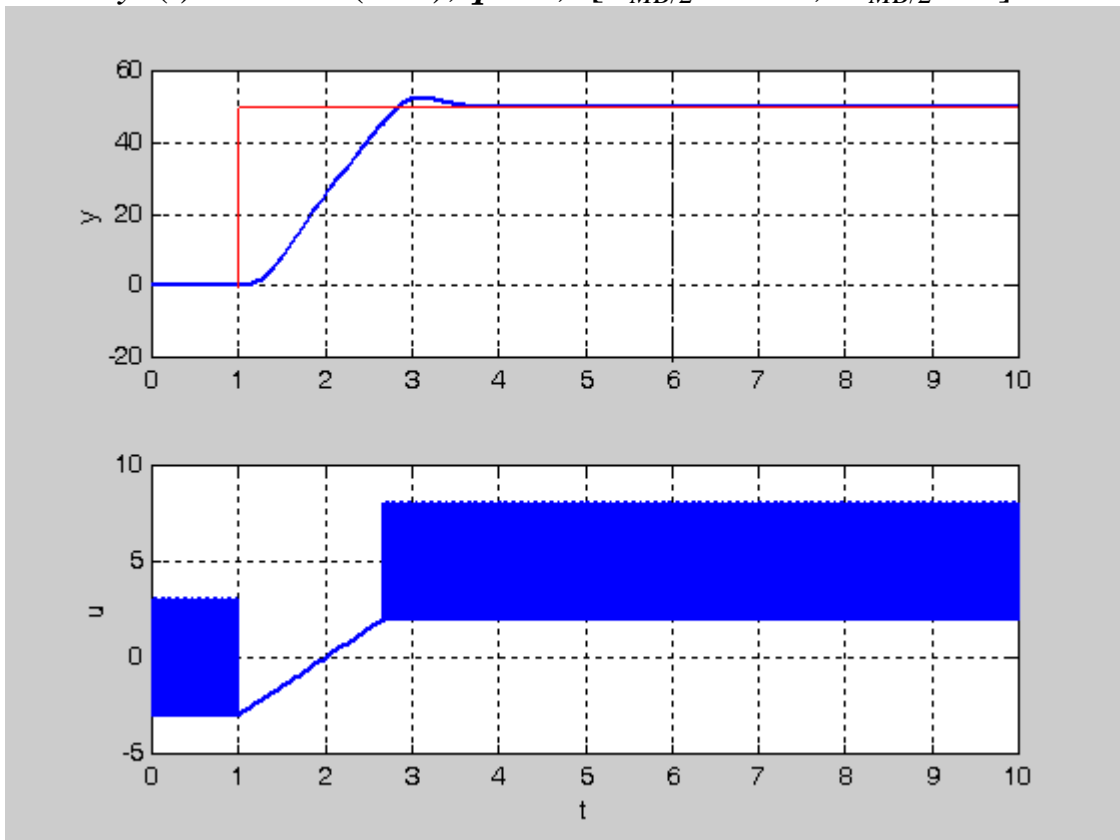
$$y^\circ(t) = 5 \operatorname{sca}(t - 1), q = 1 \quad [B_{MB/2} = \mathbf{0.1}, M_{MB/2} = 1]$$



$$y^\circ(t) = 50 \operatorname{sca}(t - 1), q = 1, [B_{MB/2} = 0.02, M_{MB/2} = 1]$$



$$y^\circ(t) = 50 \operatorname{sca}(t - 1), q = 3, [B_{MB/2} = 0.02, M_{MB/2} = 1]$$

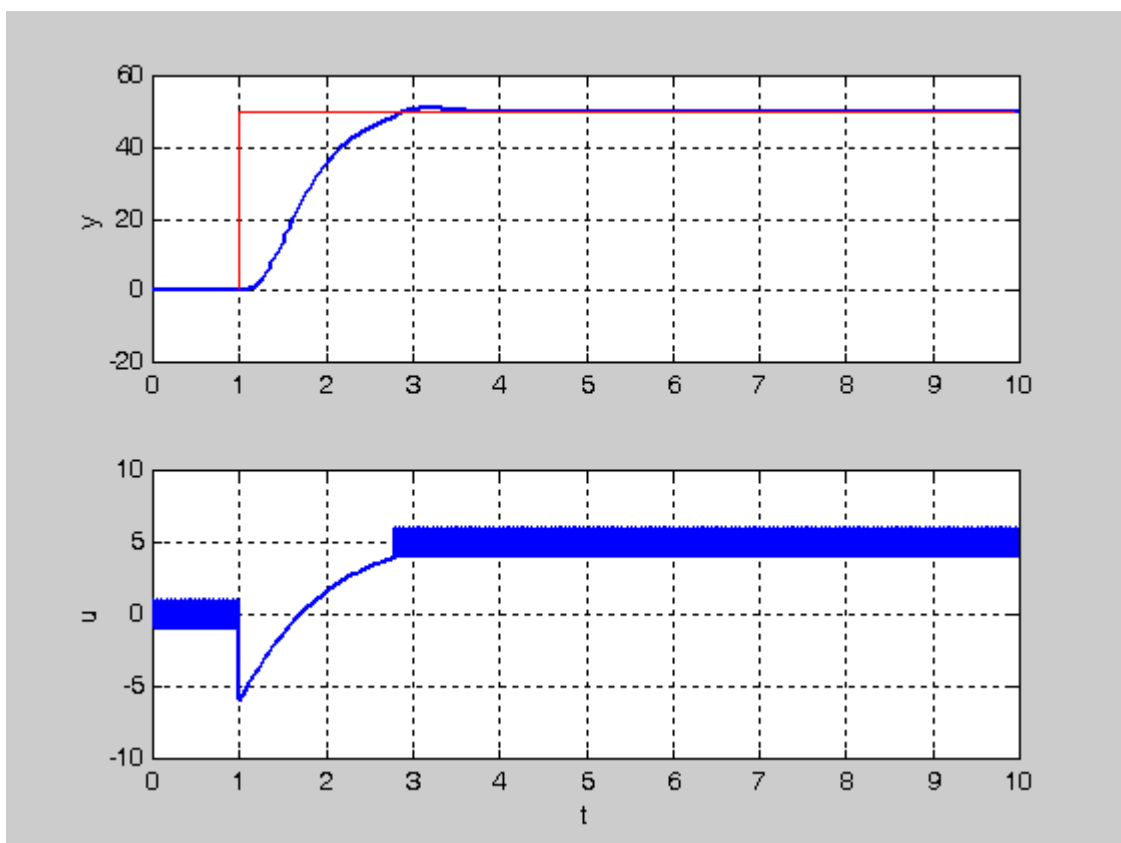


Dunque, un aumento del parametro q (o di $M_{MB/2}$) riduce la durata della fase di transizione fuori dalla superficie di scivolamento (“reaching phase”).

E’ interessante chiedersi se sia possibile ridurre la durata della suddetta fase di transizione senza modificare l’ampiezza dell’intervallo di commutazione della u . A questo scopo, può essere utile il ricorso ad un’opportuna funzione $g(\cdot)$ nel primo e terzo quadrante, naturalmente con $r > 0$. Ad esempio, ponendo:

$$g(z) = z \quad , \quad \forall z \in \mathbf{R} \quad ; \quad r = 1$$

e mantenendo $q = 1$, il risultato è il seguente.



Nel seguito, torneremo a porre $r = 0$, concentrando l’attenzione sul modo in cui una diversa scelta di $\chi^*(\lambda)$ può modificare l’azione di controllo e sulla robustezza di quest’ultima rispetto un’eventuale incertezza sui parametri del sistema sotto controllo.

Se, nella scelta della dinamica di scivolamento, avessimo ad esempio optato per 3 autovalori reali uguali allo zero di $G(s)$, vale a dire se avessimo posto:

$$\chi^*(\lambda) = (\lambda + 5)^3 = \lambda^3 + 15\lambda^2 + 75\lambda + 125$$

avremmo avuto:

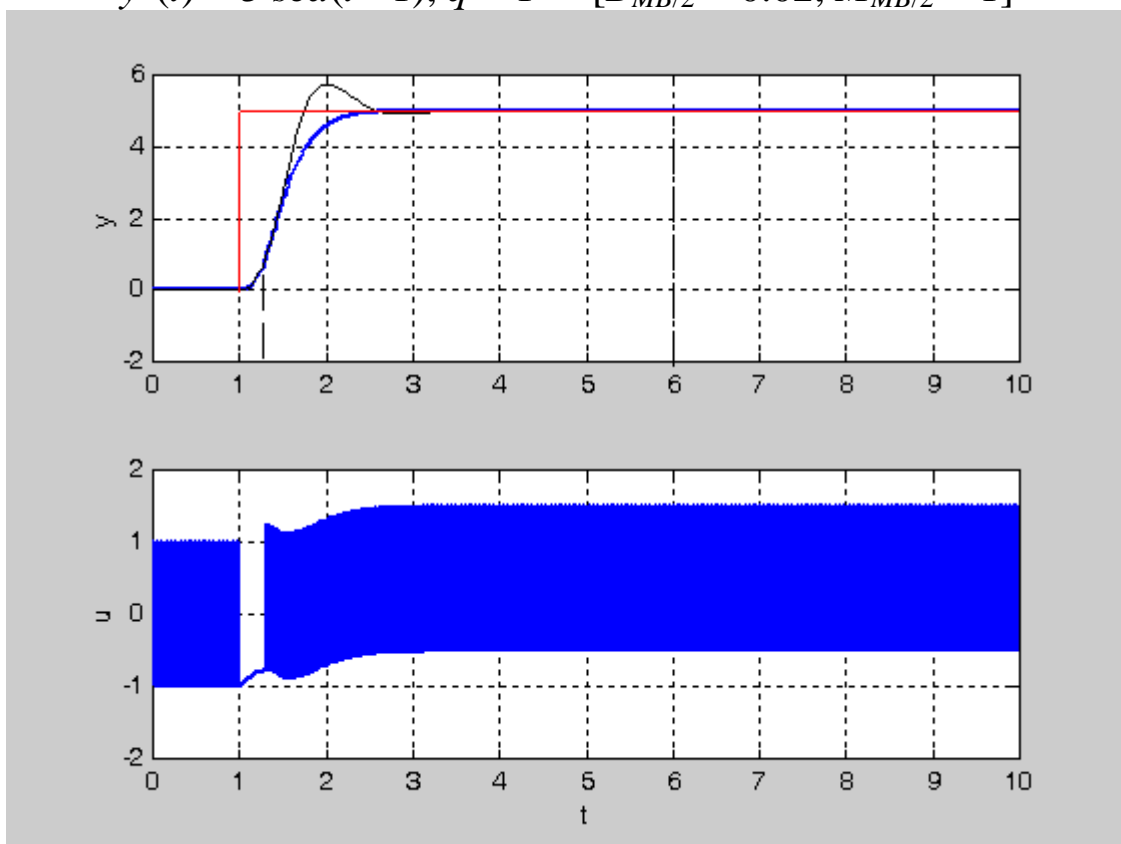
$$\beta' := [\beta_3 \ \beta_2 \ \beta_1 \ 1] = [125 \ 75 \ 15 \ 1];$$

$$\alpha' := \beta' A = [200 \ -5 \ 20 \ 1]$$

$$\gamma = \beta_3/b_4 = -0.0625.$$

In figura è mostrata la nuova risposta a una variazione a scalino del riferimento (linea blu) a confronto con quella (linea nera) corrispondente invece alla precedente scelta di $\chi^*(\lambda)$.

$$y^\circ(t) = 5 \operatorname{sca}(t - 1), q = 1 \quad [B_{MB/2} = 0.02, M_{MB/2} = 1]$$



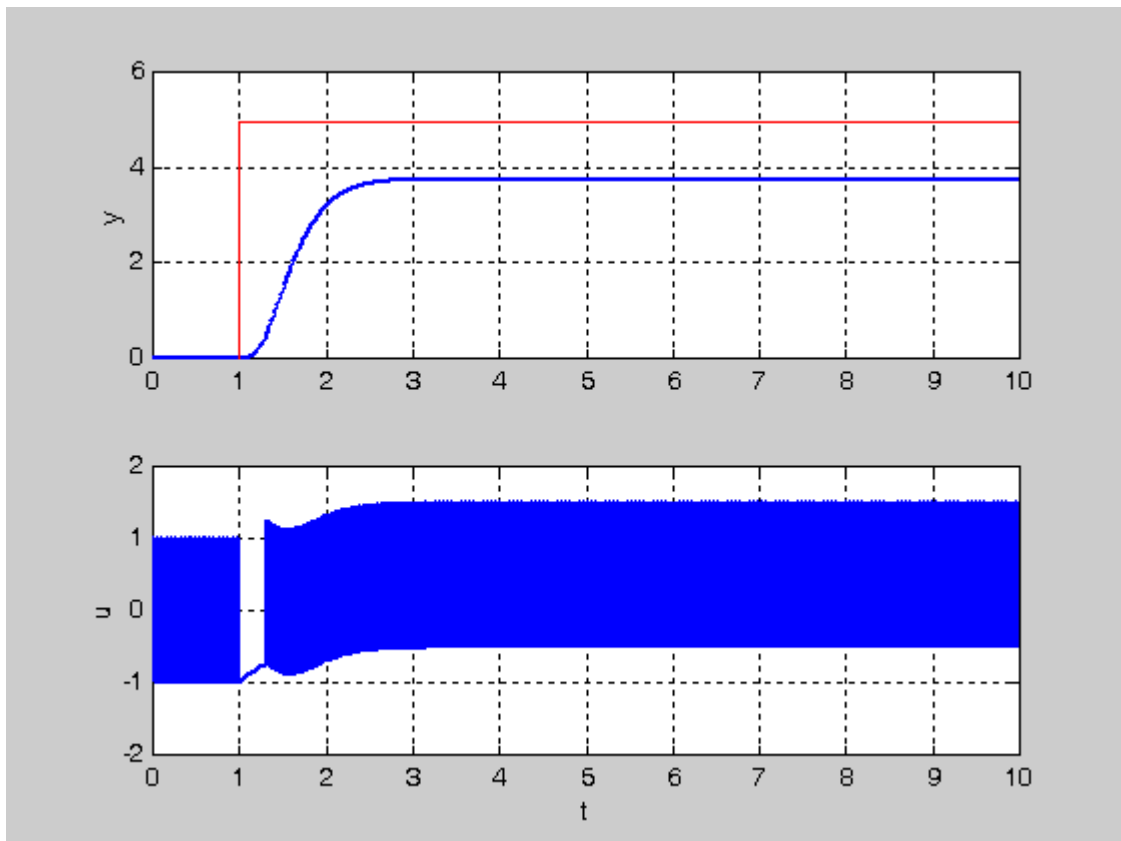
3.1 Robustezza del controllo in modo scivolato

$$a) \quad G(s) = \frac{10 (1 + 0.2 s)}{(1 + 0.25 s + 0.05 s^2)(1 - s)(1 + 0.1 s)} \rightarrow G_1(s)$$

$$G_1(s) = \frac{15 (1 + 0.1 s)}{(1 + 0.5 s + 0.05 s^2)(1 - s)(1 + 0.2 s)} =$$

$$= \frac{-150 (s + 10)}{s^4 + 14 s^3 + 55 s^2 + 30 s - 100}$$

In questo caso (variazione di alcuni parametri dal 50 al 100 %), con il controllore progettato su $G(s)$, il risultato è il seguente.

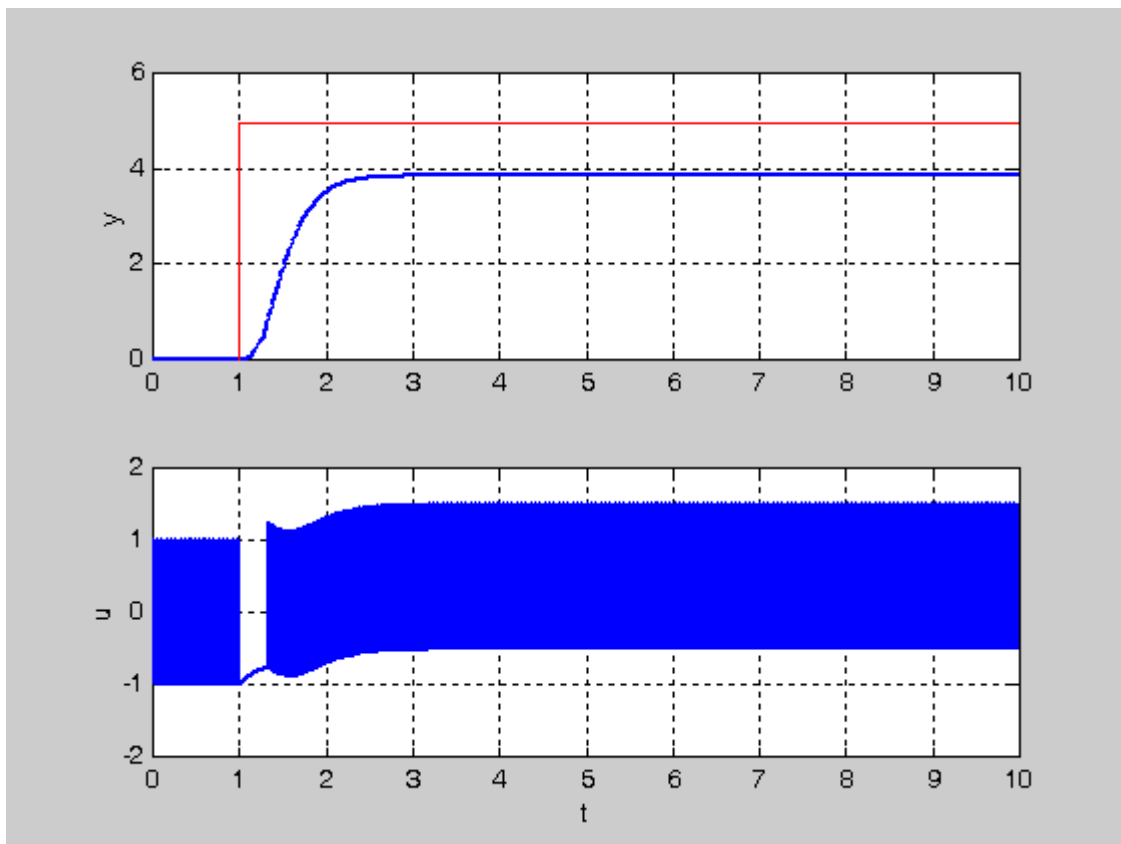


Ad eliminare il deterioramento sarebbe tuttavia sufficiente un adattamento empirico del guadagno $\gamma = \beta_3/b_4$ inteso ad annullare il valor medio dell'errore $y^\circ - y$, valutato su un intervallo di tempo abbastanza lungo rispetto al tempo di risposta del sistema (qui dovrebbe essere $\gamma = -125/1500 = -0.0833$ anziché -0.0625).

$$b) \quad G(s) = \frac{10 (1 + 0.2 s)}{(1 + 0.25 s + 0.05 s^2)(1 - s)(1 + 0.1 s)} \rightarrow G_2(s)$$

$$G_2(s) = \frac{10 (1 + 0.2 s)}{(1 + 0.25 s + 0.05 s^2)(1 - \mathbf{1.3} s)(1 + 0.1 s)} =$$

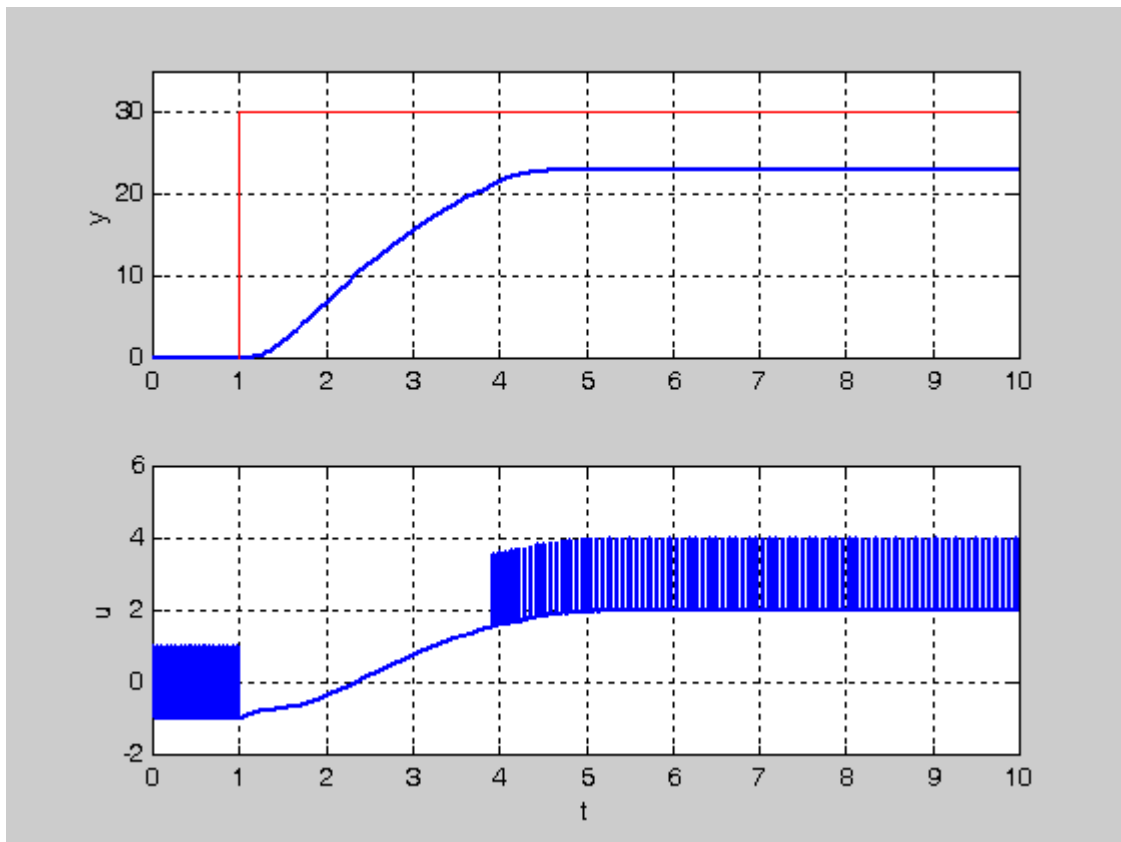
$$= \frac{-307.6923 (s + 5)}{s^4 + 14.2308 s^3 + 58.4615 s^2 + 146.1538 s - 153.8462}$$



Intuitivamente si potrebbe supporre che questo esito, inaspettatamente positivo, sia dovuto alla brevità della fase di transizione fuori dalla superficie di scivolamento (“reaching phase”).

Aumentando l’ampiezza dello scalino ($y^\circ(t) = 30 \text{ sca}(t)$) questa fase si prolunga.

Ma il risultato non cambia!



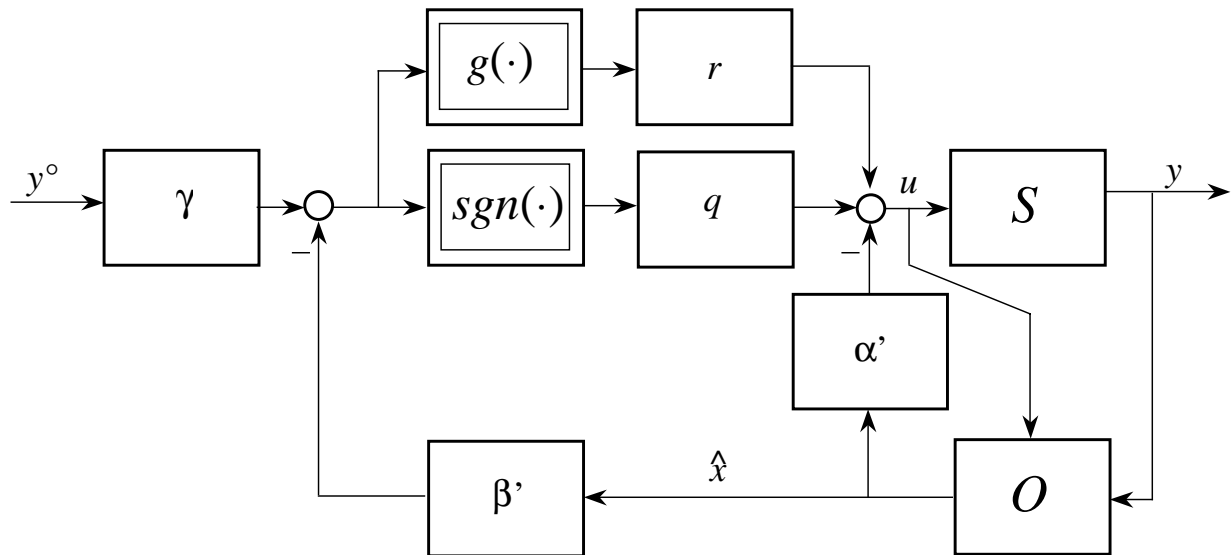
3.2 Stato non accessibile

Qualora lo stato del sistema sotto controllo non sia disponibile, si può pensare di ricorrere ad un ricostruttore asintotico dello stato (o “osservatore” di Luenberger):

$$\dot{\hat{x}} = A \hat{x} + B u + L (y - \hat{y}) = (A - L C) \hat{x} + B u + L y .$$

Come si sa, sotto l’ipotesi di osservabilità della coppia (A, C) , il vettore L può essere scelto in modo da fissare gli autovalori della matrice $A - L C$, che governano la dinamica dell’errore di ricostruzione: $\dot{e} = (A - L C) e$, $e := x - \hat{x}$.

Il sistema di controllo si modifica come mostrato in figura.



Nel caso dell'*esempio* discusso nelle pagine precedenti, se gli autovalori imposti all'osservatore sono -10, -8, -6, -5, si trova:

$$L = [0.0025 \quad -0.0250 \quad 0.0175 \quad 0.2550]' .$$

Per altro, ponendo:

$$\chi^*(\lambda) = (\lambda^2 + 5\lambda + 20)(\lambda + 10) = \lambda^3 + 15\lambda^2 + 70\lambda + 200 ,$$

si era già in precedenza ottenuto:

$$\beta' = \alpha' = [200 \quad 70 \quad 15 \quad 1] \quad , \quad \gamma = -0.1 .$$

Ripetendo la prima delle simulazioni effettuate nel caso di stato disponibile, vale a dire:

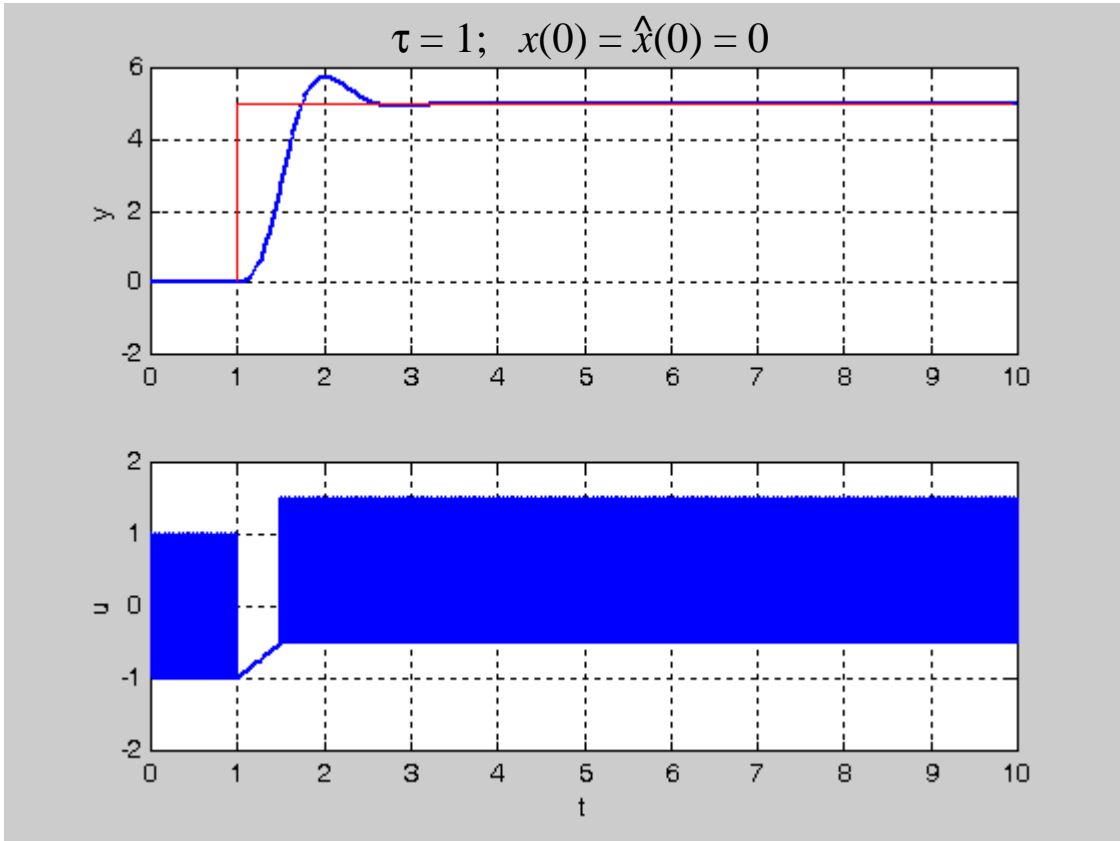
$$y^o(t) = 5 \operatorname{sca}(t - \tau),$$

$$B_{MB/2} = 0.02, \quad M_{MB/2} = 1, \quad q = 1$$

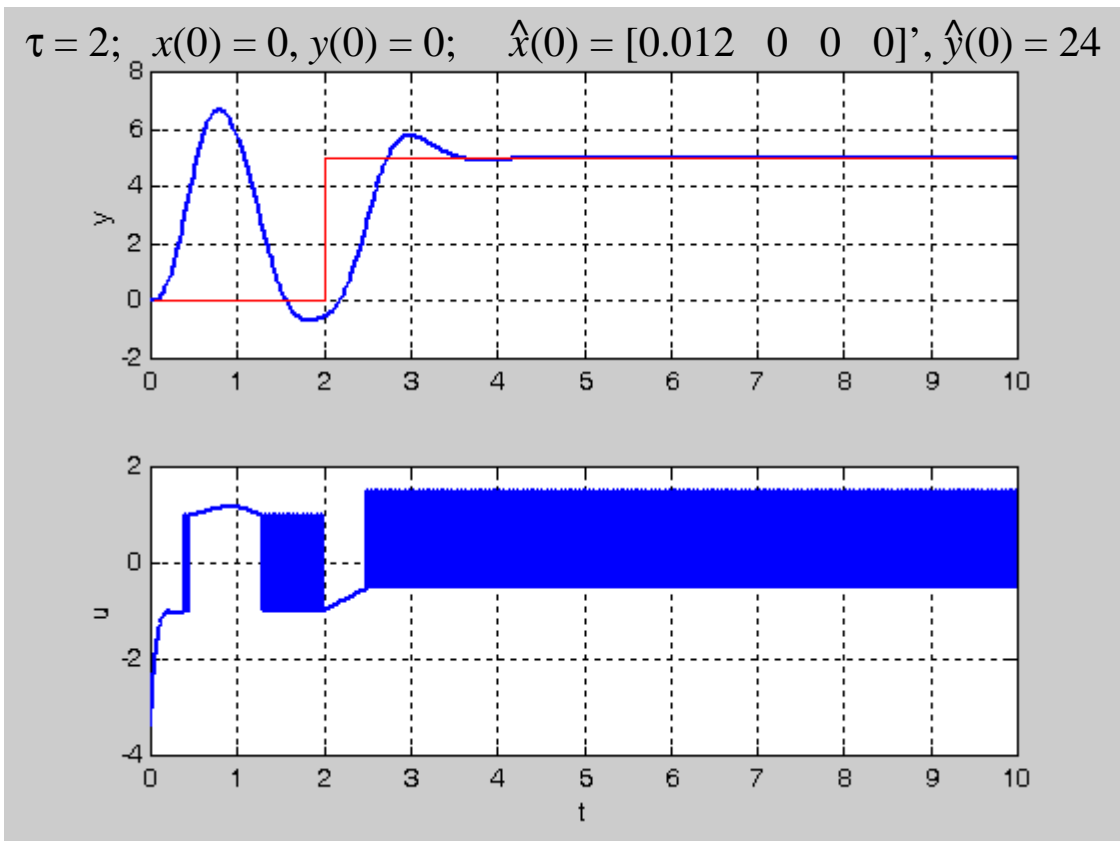
si ottengono, per y e u , gli andamenti mostrati nelle figure che seguono, corrispondenti a due diversi valori di $\hat{x}(0)$:

$$a) \hat{x}(0) = x(0) = 0 \quad , \quad b) \hat{x}(0) = [0.012 \quad 0 \quad 0 \quad 0]', \quad (\hat{y}(0) = 24).$$

a)

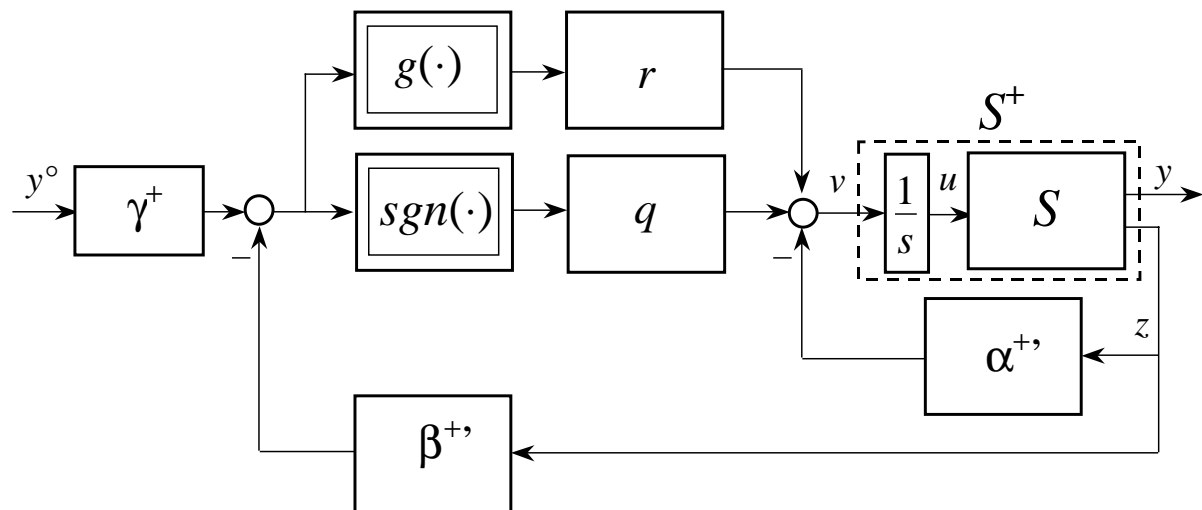


b)



3.3 Filtro preventivo sulla variabile di controllo

In varie applicazioni, la commutazione a frequenza elevatissima (teoricamente infinita) fra due livelli generalmente costanti della variabile di controllo, tipica della fase di scivolamento, può risultare fastidiosa, se non del tutto inaccettabile. Allo scopo di rendere più regolare l'andamento della variabile di controllo, sono stati proposti vari accorgimenti. Uno dei più semplici consiste nell'adottare, come nuova variabile di controllo ausiliaria v , la derivata di u , affidando così ad un semplice integratore il compito di generare, attraverso un'efficace azione filtrante sulle alte frequenze, la effettiva variabile di controllo u .



Questo procedimento verrà ora illustrato facendo ancora riferimento all'*esempio* discusso nelle pagine precedenti.

$$S^+ : \begin{cases} \dot{u} = v \\ S : \begin{cases} \dot{x} = A x + B u \\ y = C x \end{cases} \end{cases}$$

Sia: $z := [x' \quad u]'$ e $y^+ := [y \quad u]'$, allora:

$$S^+ : \begin{cases} \dot{z} = F z + G v \\ y^+ = H z \end{cases}$$

dove:

$$F := \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad H := \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Indicando con H_1 la prima riga di H , notiamo immediatamente che il sistema (F, G, H_1) non è in forma canonica di controllo. La trasformazione $\tilde{z} = T z$ che consente di ovviare a tale circostanza può essere calcolata senza eccessive difficoltà. Infatti, con:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 200 & -130 & -55 & -14 & 1 \end{bmatrix}, \quad [T = \hat{M}_c M_c^{-1}]$$

si ha:

$$\tilde{F} = T F T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 200 & -130 & -55 & -14 \end{bmatrix}, \quad \tilde{G} = T G = G$$

$$\tilde{H} = H T^{-1} = \begin{bmatrix} -2000 & -400 & 0 & 0 & 0 \\ -200 & 130 & 55 & 14 & 1 \end{bmatrix}$$

e la funzione di trasferimento di S^+ , da v a y , risulta (prevedibilmente) data da:

$$G(s) = \frac{-400s - 2000}{s^5 + 14s^4 + 55s^3 + 130s^2 - 200s} = \frac{10(1 + 0.2s)}{s(1 + 0.25s + 0.05s^2)(1-s)(1+0.1s)}.$$

Per quanto riguarda la scelta della dinamica in modo scivolato, manteniamo l'opzione già fatta precedentemente, limitandoci ad aggiungere un polo in -10 ; poniamo cioè:

$$\chi^*(\lambda) = (\lambda^2 + 5\lambda + 20)(\lambda + 10)^2 = \lambda^4 + 25\lambda^3 + 220\lambda^2 + 900\lambda + 2000.$$

Sicché:

$$\tilde{\beta}^+ := [\tilde{\beta}_4^+ \quad \tilde{\beta}_3^+ \quad \tilde{\beta}_2^+ \quad \tilde{\beta}_1^+ \quad 1] = [2000 \quad 900 \quad 220 \quad 25 \quad 1]$$

$$\tilde{\alpha}^+ := \tilde{\beta}^+ \tilde{F} = [0 \quad 2200 \quad 770 \quad 165 \quad 11]$$

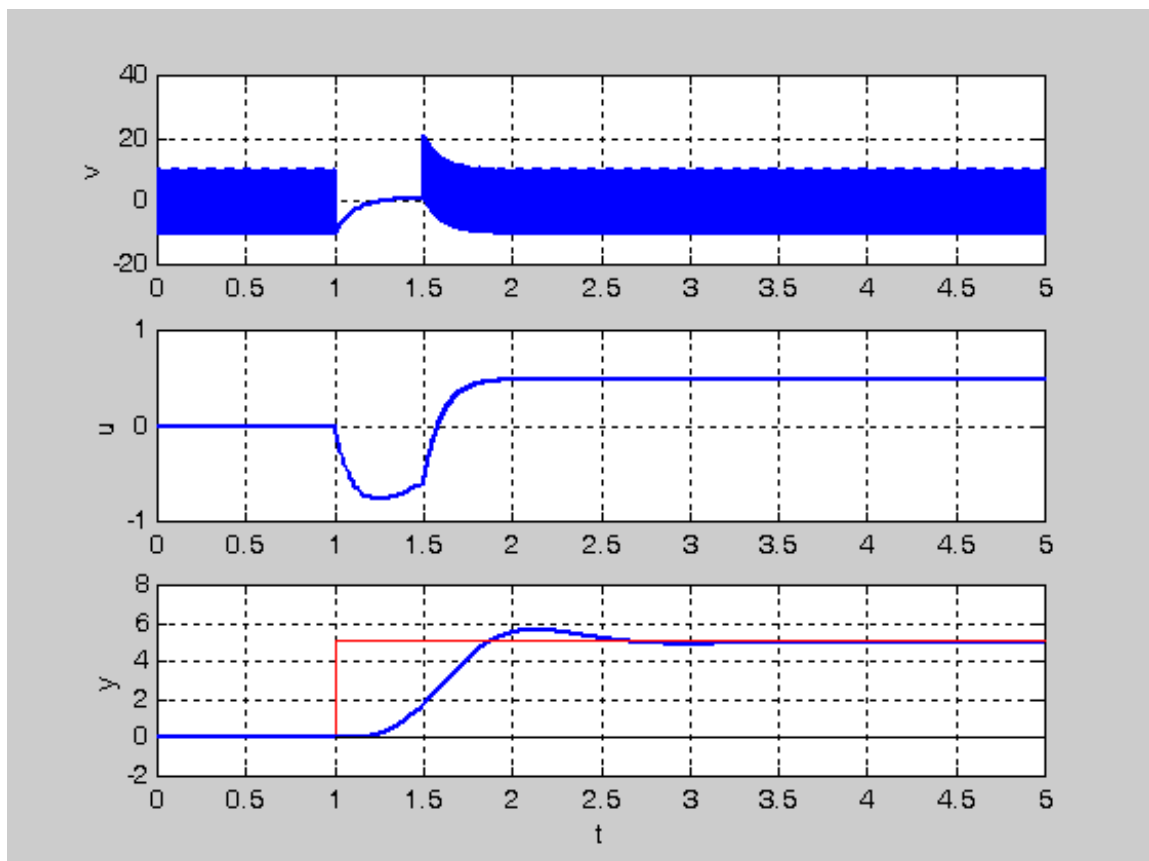
$$\tilde{\beta}_4^+ = 2000, \quad \tilde{b}_5^+ = \tilde{H}(1,1) = -2000, \quad \gamma^+ = \tilde{\beta}_4^+ / \tilde{b}_5^+ = -1.$$

Poiché lo stato di S^+ immediatamente disponibile è z e non \tilde{z} , si devono conseguentemente utilizzare per α^+ e β^+ i valori:

$$\beta^+ = \tilde{\beta}^+ T = [2200 \quad 770 \quad 165 \quad 11 \quad 1]$$

$$\alpha^+ = \tilde{\alpha}^+ T = [2200 \quad 770 \quad 165 \quad 11 \quad 11].$$

Completiamo il progetto del controllore ponendo, ancora una volta, $r = 0$ così che la scelta di $g(\cdot)$ risulti irrilevante. L'intervallo di commutazione di v , vale a dire della derivata di u , che è determinato dal valore attribuito al parametro q , può ora essere significativamente e "impunemente" aumentato ponendo, ad esempio, $q = 10$.



4. Analisi del sistema di controllo in modo scivolato

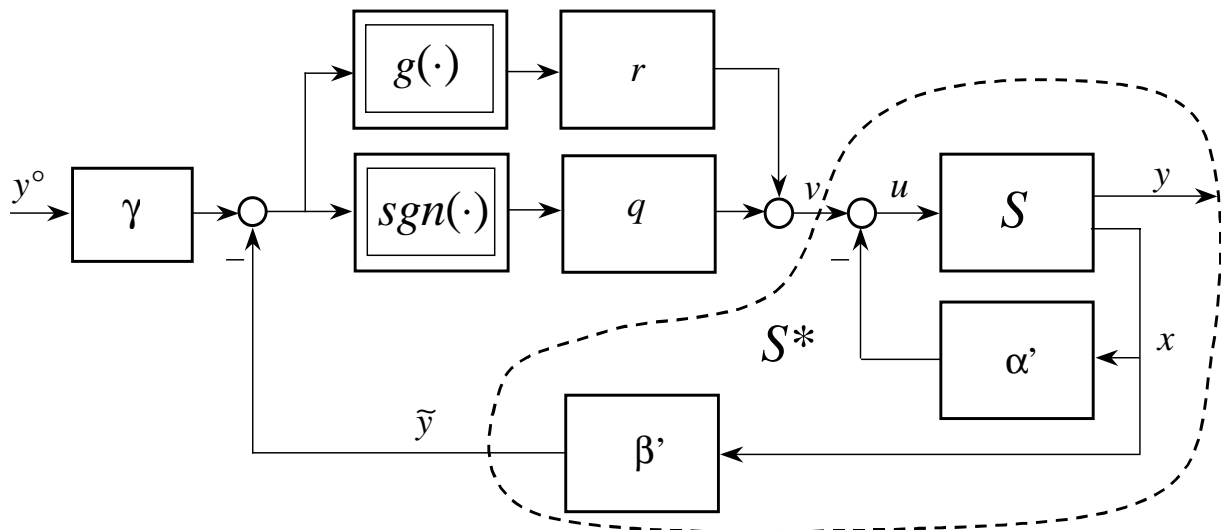
L'introduzione svolta nel Paragrafo 2 si era conclusa con il sistema di controllo mostrato in figura, dove (ricordando che S è, per ipotesi, in forma canonica di controllo):

$$\beta' := [\beta_{n-1} \quad \beta_{n-2} \quad \dots \quad \beta_1 \quad 1]$$

$$\alpha' := \beta' A = [-a_n \quad \beta_{n-1} - a_{n-1} \quad \beta_{n-2} - a_{n-2} \quad \dots \quad \beta_1 - a_1] = \tilde{\beta}' - \tilde{a}'$$

avendo posto:

$$\tilde{\beta}' := [0 \quad \beta_{n-1} \quad \beta_{n-2} \quad \dots \quad \beta_1] \quad , \quad \tilde{a}' := -[a_n \quad a_{n-1} \quad a_{n-2} \quad \dots \quad a_1].$$



Il sotto-sistema:

$$S^*: \begin{cases} \dot{x} = A x + B u \quad , \quad u = v - \alpha' x = v - \beta' x + \tilde{a}' x \\ \tilde{y} = \beta' x \end{cases}$$

equivale a:

$$S^*: \begin{cases} \dot{x} = \tilde{A} x + B v \\ \tilde{y} = \beta' x \end{cases}$$

dove $\tilde{A} = A + B \tilde{a}' - B \tilde{\beta}'$ ha la forma seguente

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & -\beta_{n-1} & -\beta_{n-2} & \dots & -\beta_2 & -\beta_1 \end{pmatrix}$$

In definitiva, il sistema S^* è in forma canonica di controllo e la sua funzione di trasferimento è palesemente data da:

$$\tilde{G}(s) = \frac{s^{n-1} + \beta_1 s^{n-2} + \dots + \beta_{n-1}}{s^n + \beta_1 s^{n-1} + \beta_2 s^{n-2} + \dots + \beta_{n-1} s} = \frac{\chi^*(s)}{s \chi^*(s)} = \frac{1}{s}$$

La parte cieca di S^* ha come polinomio caratteristico $\chi^*(s)$. La parte esternamente visibile, è invece un integratore, in virtù del quale risulta: $\dot{\tilde{y}} = v$; cioè:

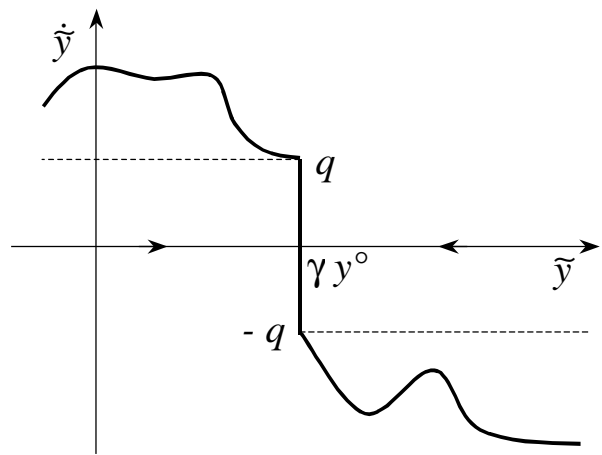
$$\dot{\tilde{y}} = q \operatorname{sgn}(\gamma y^\circ - \tilde{y}) + r g(\gamma y^\circ - \tilde{y})$$

Esiste quindi un unico punto di (pseudo-)equilibrio globalmente stabile, raggiunto in tempo finito, nel quale $\tilde{y} = \gamma y^\circ$. Nel momento in cui $\tilde{y} = \gamma y^\circ$, ha inizio, per S^* , la fase di “scivolamento”,

durante la quale solo la parte cieca, asintoticamente stabile, di S^* è interessata da un transitorio al termine del quale si ha:

$$\bar{x}_1 = y^\circ/b_n ; \quad \bar{x}_i = 0 , \quad i = 2, 3, \dots , n ; \quad \tilde{y} = \beta_{n-1} \bar{x}_1 ,$$

$$\bar{y} = b_n \bar{x}_1 = \tilde{y}/\gamma = y^\circ .$$



5. Osservazioni conclusive

5.1 *Un po' di storia*

Sistemi di controllo a struttura variabile, comprendenti fasi in modo scivolato, vennero efficacemente proposti e sviluppati, all'inizio degli anni '50 del '900, da S. V. Emelianov (che coniò l'espressione "controllo a struttura variabile") e dai suoi collaboratori, con particolare riferimento al problema della stabilizzazione di uno stato di equilibrio. Ma l'idea di base ha radici ancora più lontane e può essere rintracciata in lavori pubblicati in Russia negli anni '30 e rimasti a lungo ignorati.

In occidente, il principale promotore degli studi intesi ad applicare, estendere e a rendere sistematica questa interessante tecnica di progetto è stato Vadim J. Utkin il quale fece conoscere lo stato dell'arte in questo campo con un celebre articolo pubblicato nel 1977 dalle IEEE Transactions on Automatic Control e ottenne successivamente la Cattedra Ford di Sistemi Elettromeccanici presso la Ohio State University in Columbus (Stati Uniti).

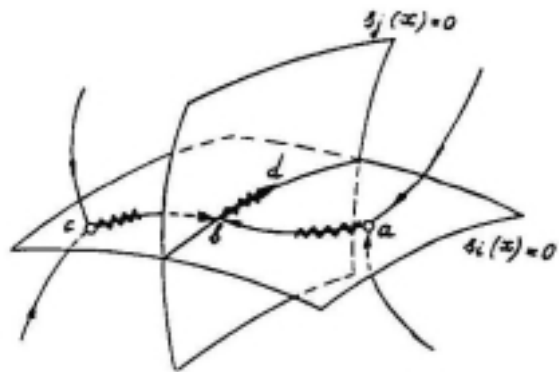
L'aspetto del controllo in modo scivolato che, a prima vista, maggiormente colpisce è la natura discontinua dell'azione di controllo e il succedersi delle commutazioni a frequenza elevatissima, teoricamente infinita, in virtù delle quali lo stato del sistema è indotto ad evolvere su particolari (iper)superfici con una dinamica che può essere prescritta in fase di progetto. La prerogativa più interessante che un controllore in modo scivolato conferisce al sistema di controllo è una notevole robustezza rispetto all'incertezza del modello che descrive il sistema sotto controllo: tanto quella che riguarda il valore dei parametri, quanto quella relativa al possibile andamento degli ingressi in funzione di disturbo o alla cosiddetta "dinamica non modellata". Tutto ciò non ha mancato di sollevare critiche e qualche scetticismo in tecnici e ricercatori ansiosi di sottolineare la natura pragmatica e fortemente "applicativa" della loro cultura professionale. Il tempo ha però reso sterili le polemiche di questo tipo, mostrando con scientifica e professionale chiarezza che il controllo a struttura variabile non è la panacea di tutti i mali, non pretende di offrire soluzioni adatte a problemi di controllo di qualsiasi natura, ma è

diventato in moltissime applicazioni uno strumento di provata efficacia, da aggiungere con interesse al ricco armamentario della teoria del controllo. Fra gli ambiti applicativi nei quali questa tecnica ha trovato più ampio impiego si può citare il controllo di motori elettrici, i servomeccanismi e, più in generale, la mecatronica e la robotica; le reti elettriche di potenza e il controllo dei processi; in ingegneria aerospaziale, il controllo del volo di aeromobili, la manovra di veicoli orbitanti e il controllo di strutture spaziali di grandi dimensioni.

5.2 Cenno a varianti ed estensioni

In questo capitolo abbiamo considerato un sistema sotto controllo lineare, tempo-invariante, a un ingresso e un'uscita e il problema preso in esame è stato, essenzialmente, un problema di regolazione.

Naturalmente, la teoria oggi disponibile riguarda un ventaglio di situazioni molto più ampio che comprende (classi di) sistemi multivariabili, lineari o non lineari, eventualmente varianti nel tempo, soggetti a ingressi caratterizzati come segnali deterministici o come processi stocastici, a tempo continuo o anche a tempo discreto.



Nella maggior parte dei casi, i risultati teorici disponibili non hanno carattere prescrittivo: forniscono cioè interessanti linee guida che aiutano nell'impostazione e nello sviluppo del progetto, lasciando tuttavia ampi margini di creatività ingegnosa (ed anche di difficoltà) a chi s'impegna nell'applicazione di queste tecniche a casi reali.

5.3 Per saperne di più

La letteratura sul tema trattato in questo capitolo è molto ampia. Basti qui citare, come riferimenti da cui partire, V. I. Utkin: "Variable structure systems and sliding mode - State of the art assessment", in *Variable Structure Control for Robotics and Aerospace Applications*, a cura di K. D. Young, Elsevier, New York 1993; o J. Y. Hung, W.

Gao e J. C. Hung: “Variable structure control: A survey”, IEEE Trans. Ind. El., Vol.40, N.1, 1993; o anche K. D. Young, V. I. Utkin e Ü. Özgüner: “A control engineer’s guide to sliding mode control”, IEEE Trans. Control Sys. Techn., Vol.7, N.3, 1999.

Appendice

Forma canonica di controllo

$$S : \begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \\ y(t) = C x(t) \end{cases} ,$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_2 & b_1 \end{bmatrix}$$

ovvero:

$$\dot{x}_i = x_{i+1} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$\dot{x}_n = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \dots - a_1 x_n + u$$

$$y = b_n x_1 + b_{n-1} x_2 + \dots + b_1 x_n .$$

La funzione di trasferimento di S è data da:

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \dots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n} .$$

Il sistema S è raggiungibile. Se $a(s)$ e $b(s)$ sono relativamente primi (non hanno radici in comune) S è anche osservabile. Quando S è osservabile, $G(s)$ non ha zeri nell’origine se e solo se $b_n \neq 0$.