

Capitolo 3
Movimenti periodici

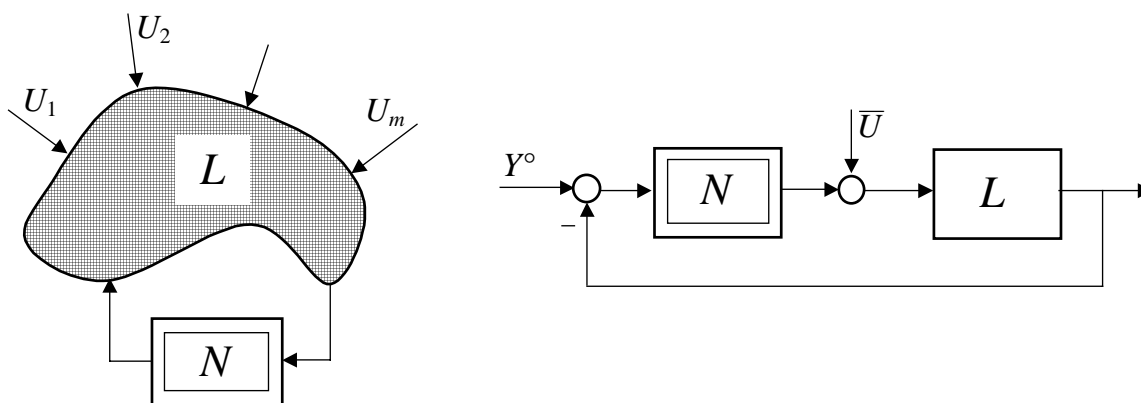
IL METODO DELLA FUNZIONE DESCRITTIVA

Obiettivo specifico

Fornire condizioni atte a saggiare l'esistenza, l'entità e la stabilità di movimenti periodici (*oscillazioni permanenti*) in un sistema dinamico reazionato, invariante nel tempo, soggetto a ingressi costanti, nel quale un elemento non lineare a un ingresso e un'uscita sia interconnesso a uno o più elementi lineari (*Sistema di Lur'e*).

Obiettivi più ampi

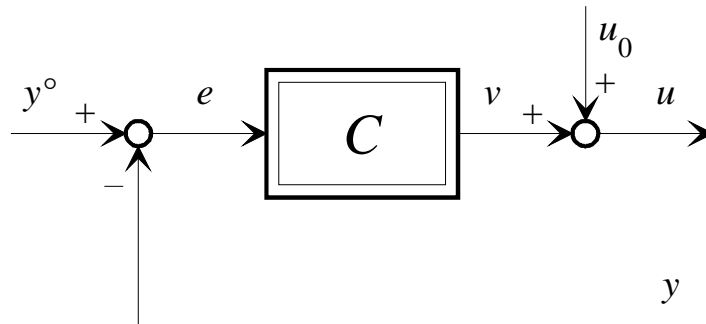
- Studio della risposta periodica a un ingresso sinusoidale di un sistema del tipo suddetto.
- ⇒ Parziale estensione al caso non lineare della nozione di "risposta in frequenza"
- ⇒ Estensione euristica della teoria classica del controllo a una classe di sistemi di controllo non lineari



Domanda. Perché è importante la ricerca e lo studio di regimi periodici stabili? (In Elettronica: progetto di oscillatori. In Meccanica analisi delle vibrazioni "spontanee". E in Automatica?)

CONTROLLORI INDUSTRIALI A COMMUTAZIONE

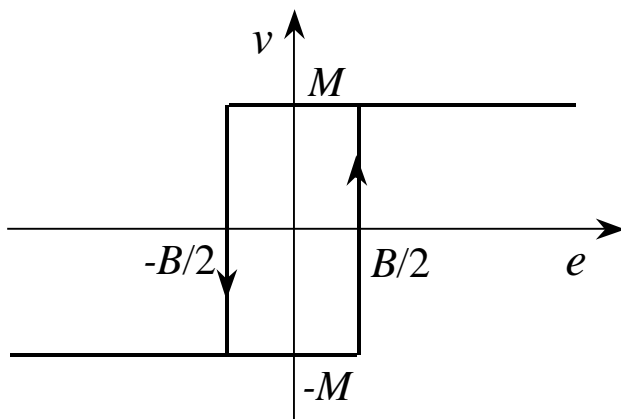
Controllori standard: $\begin{cases} - \text{"lineari" di tipo PID} \\ - \text{non lineari a commutazione} \end{cases}$



CONTROLLORI NON LINEARI A COMMUTAZIONE

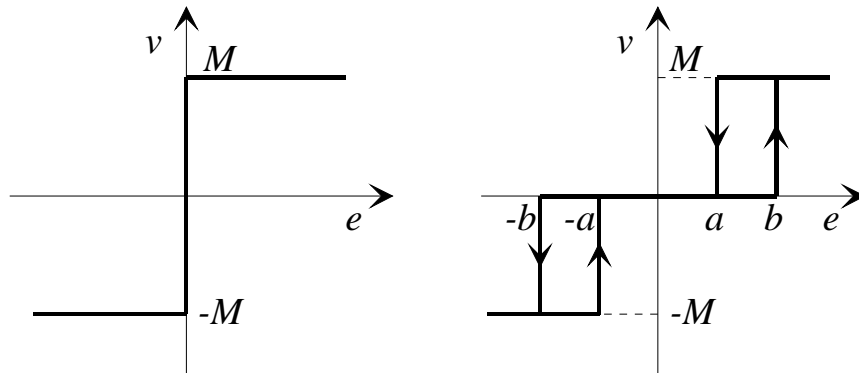
Connotato qualificante: l'insieme dei possibili valori della variabile di controllo u è *finito* e di solito molto piccolo (2÷3).

Il controllore a commutazione di gran lunga più diffuso è quello **a due livelli con isteresi**, esternamente descritto dal suddetto schema a blocchi, con il blocco C specificato dalla seguente caratteristica:



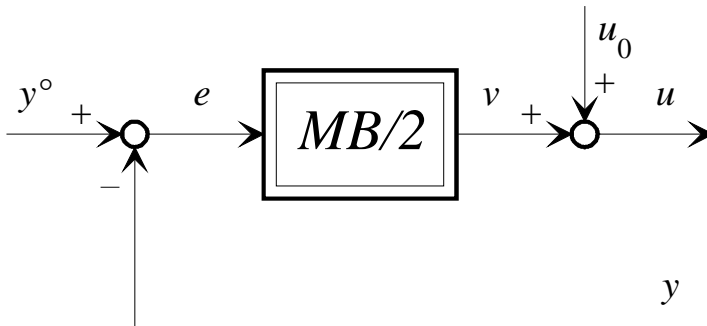
Nel seguito, questo controllore verrà indicato, per brevità, con il nome di $MB/2$ (leggi: *emme-bimezzi*). Questa denominazione ha tuttavia carattere strettamente "locale".

Altri controllori a commutazione:

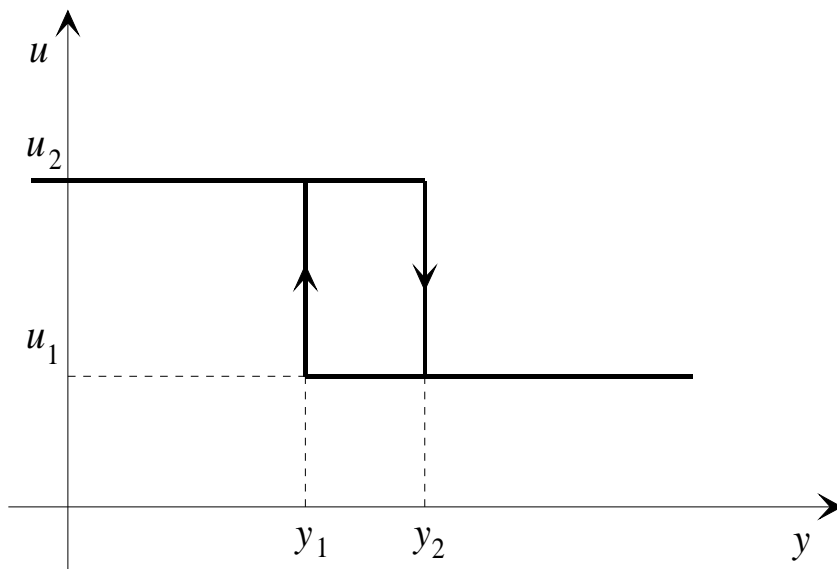


etc.

SULLA SCELTA DEI PARAMETRI
DI UN CONTROLLORE MB/2



$$\begin{aligned}
 u_1 &= u_0 - M \\
 u_2 &= u_0 + M \\
 y_1 &= y^\circ - B/2 \\
 y_2 &= y^\circ + B/2
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 u_0 &= (u_1 + u_2)/2 \\
 y^\circ &= (y_1 + y_2)/2 \\
 M &= (u_2 - u_1)/2 \\
 B &= y_2 - y_1
 \end{aligned}$$

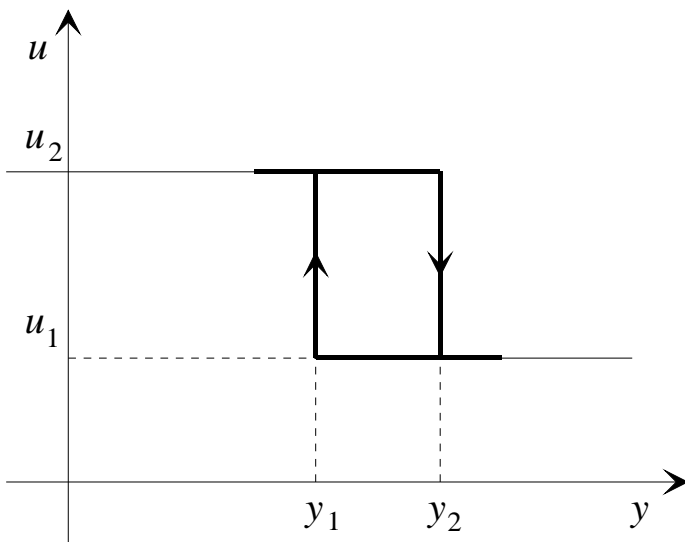
Osservazione. L'obiettivo intrinseco di questo controllore è far sì che il sistema di controllo abbia, *non uno stato di equilibrio stabile* in corrispondenza del quale $y^\circ - \bar{y}$ sia sufficientemente piccolo, *ma un regime periodico stabile*, in corrispondenza del quale $y(t) \in [y_{min}, y_{max}]$.

Problema: Dati y_{min} e y_{max} , determinare

$$u_1, u_2, y_1, y_2 \quad (M, B, y^\circ, u_0) \quad \Rightarrow \quad y_p(t) \in [y_{min}, y_{max}]$$

$$y(t) \rightarrow y_p(t)$$

1. Scelta di y_1 e y_2



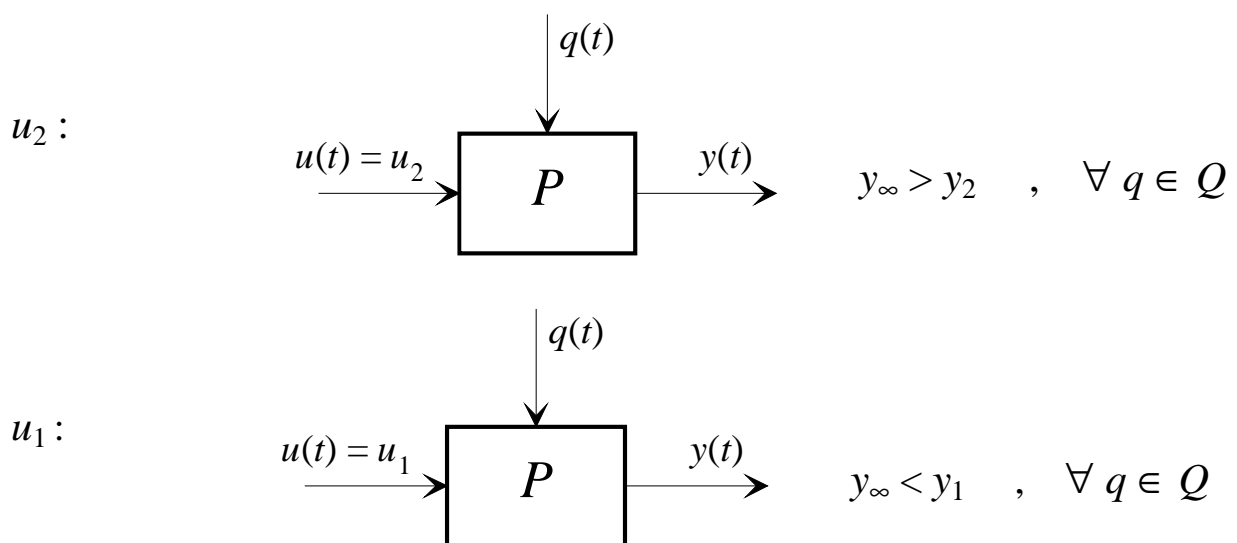
$$\Delta := (y_{max} - y_{min})/2$$

$$y_1 = y_{min} + \alpha \Delta$$

$$y_2 = y_{max} - \alpha \Delta$$

$$\alpha \in [0, 1]$$

2. Scelta di u_1 e u_2



ESEMPI

1. Il sistema sotto controllo P sia lineare tempo-invariante, con funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{10}{1 + 3s} ;$$

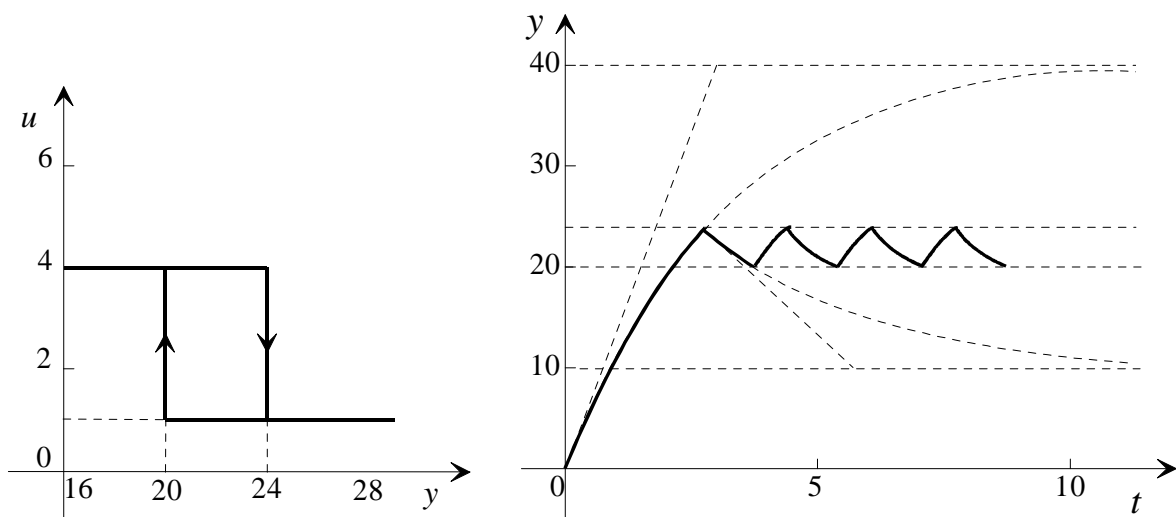
sia inoltre: $y_{min} = 20$, $y_{max} = 24$.

♣ Il sistema, del prim'ordine, è manifestamente privo di "inerzia" (una variazione a scalino di u provoca una variazione istantanea di \dot{y}); quindi, possiamo provare a porre $\alpha=0$, $\Rightarrow y_1 = y_{min}$, $y_2 = y_{max}$.

♣ Se $u(t) = \bar{u}$, $y_{\infty} = 10 \bar{u}$; quindi possiamo prendere:

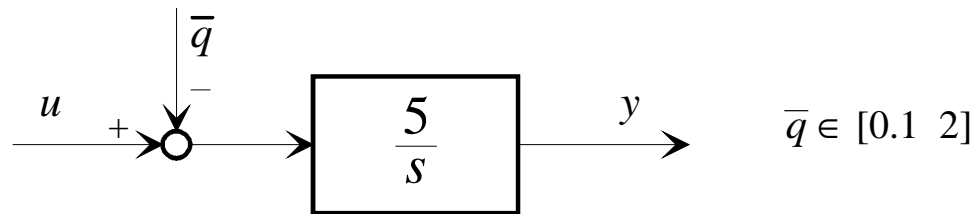
$$u_2 = 4 \quad , \quad u_1 = 1 .$$

In figura è mostrato il transitorio di avviamento ($y(0) = 0$) del sistema di controllo risultante.



Commento. La scelta $\alpha=0$ non è stata "scorretta", anche se $\alpha = 0.2$ ($y_1 = 20.4$, $y_2 = 23.6$) potrebbe essere più prudente.

2. Si consideri il medesimo problema dell'esempio precedente, supponendo però che il sistema P sotto controllo sia descritto da:



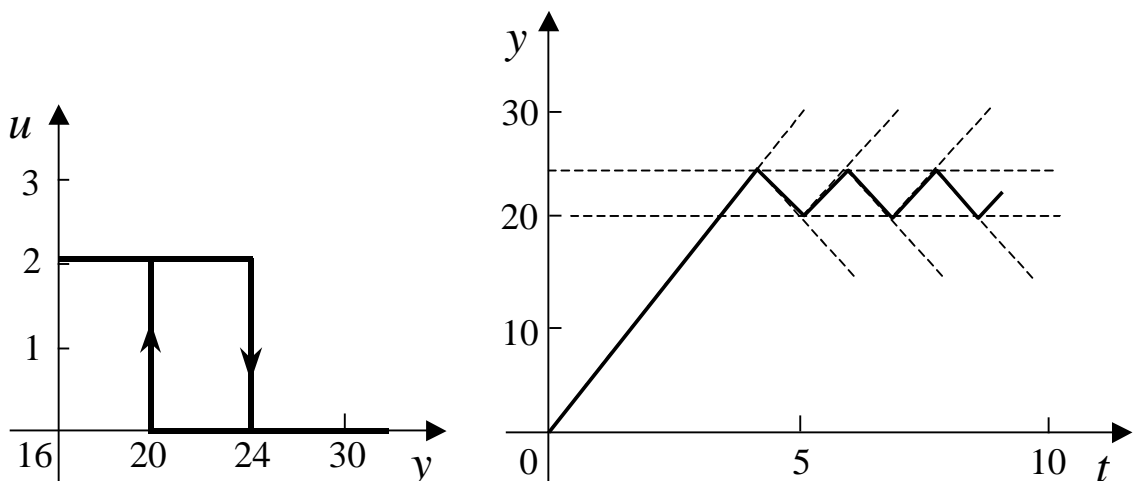
♣ Per quanto riguarda la scelta di y_1 e y_2 , continuano a valere le considerazioni fatte nell'esempio precedente. Poniamo, quindi, ancora ($\alpha=0$): $y_1 = 20$, $y_2 = 24$.

♣ I valori di u_1 e u_2 vanno invece scelti in modo che risulti:

$$u_2 - \bar{q} > 0 \quad , \quad u_1 - \bar{q} < 0 \quad , \quad \forall \bar{q} \in [0.1 \ 2] .$$

Molte sono, ovviamente, le soluzioni possibili. Supponendo che u sia una portata soggetta al vincolo $u(t) \geq 0$, poniamo: $u_1=0$, $u_2=2.1$.

In figura è mostrato il transitorio di avviamento ($y(0)=0$) del sistema di controllo così ottenuto, nel caso $\bar{q} = 1$.



Altri valori di \bar{q} ?

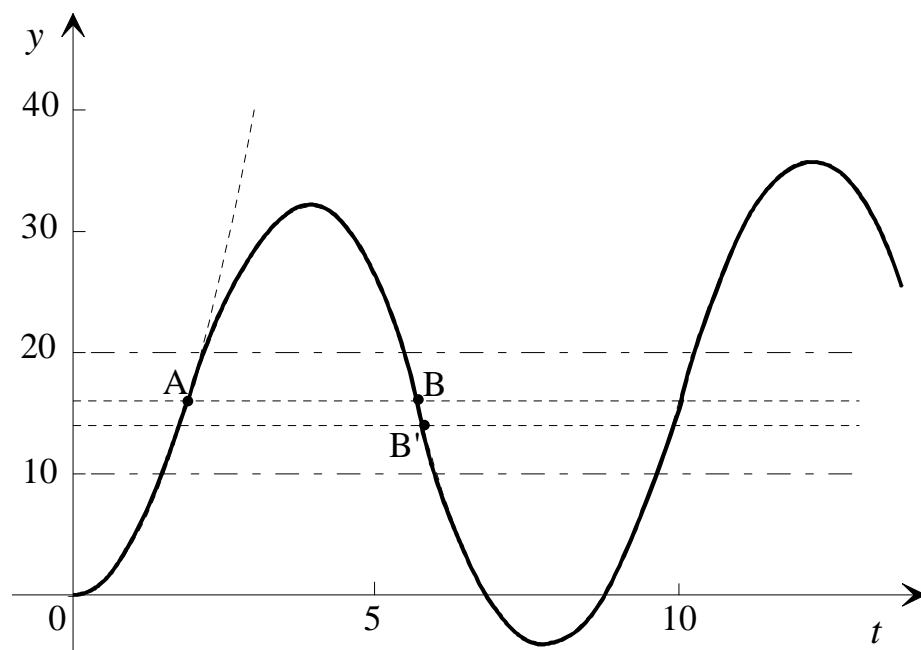
3. Da ultimo, consideriamo il caso di un sistema descritto da un integratore doppio (controllo di posizione di un carrello senza attriti).

$$G(s) = \frac{\mu}{s^2} \quad , \quad \mu = 4.5 .$$

♣ Dati: $y_{min} = 10$ e $y_{max} = 20$, teniamo conto dell'inerzia, certamente non trascurabile, del sistema ponendo "cautelativamente" $\alpha = 0.8$; quindi:

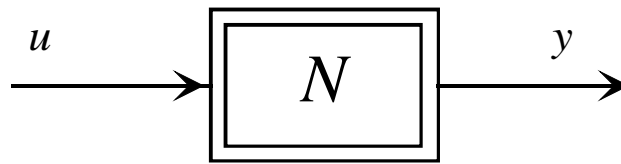
$$y_1 = 14 \quad , \quad y_2 = 16 .$$

♣ Per quanto riguarda u_2 e u_1 , è sufficiente che siano uno positivo e l'altro negativo. Poniamo: $u_2 = -u_1 = 2$.



Commento. L'esito è negativo *indipendentemente* dal valore di α . Per capire di più, occorre un metodo che consenta di stabilire: **a)** se il sistema di controllo ipotizzato ammetta un'oscillazione permanente, **b)** quanto "grande" sia tale eventuale oscillazione, **c)** se essa sia stabile o no.

FUNZIONE DESCRITTIVA : DEFINIZIONI



1. *Il caso più semplice: funzione descrittiva (a ingresso puramente sinusoidale)*

$$u(t) = U \cos(\Omega t)$$

$y_p(t; U, \Omega) =$ risposta periodica di N a $u(\cdot)$

$$y_p(t; U, \Omega) = Y_0(U, \Omega) + Y_1(U, \Omega) \cos(\Omega t + \varphi_1(U, \Omega)) + \\ + \sum_{k=2}^{\infty} Y_k(U, \Omega) \cos(k \Omega t + \varphi_k(U, \Omega))$$

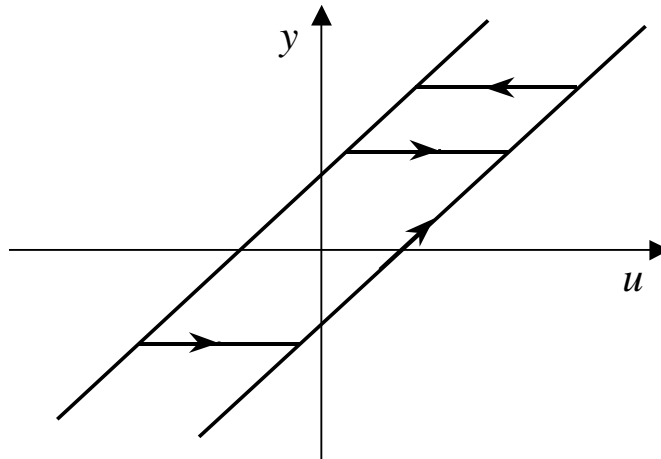
$$D(U, \Omega) := \frac{Y_1(U, \Omega)}{U} e^{j\varphi_1(U, \Omega)}$$

Proposizione 1

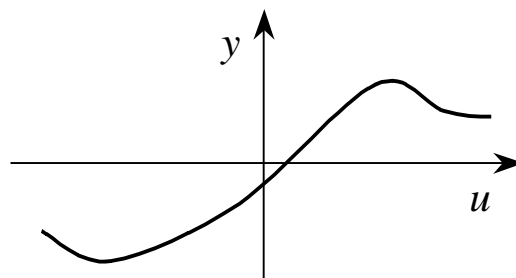
- Se N è un elemento non lineare "da caratteristica", il valore della funzione descrittiva è indipendente da Ω .

$$D(U, \Omega) \rightarrow D(U)$$

Esempio : (*Lasco* o "gioco")



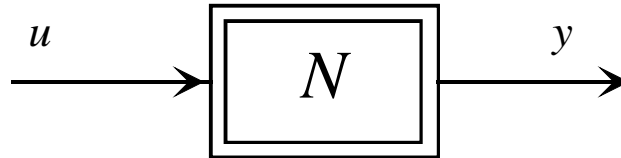
- Se inoltre la caratteristica di N è "a un sol valore" ($y = f(u)$), la funzione descrittiva è reale.



In questo caso, si può dimostrare che:

$$D(U) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(U \cos \varphi)}{U \cos \varphi} \cos^2 \varphi \, d\varphi \rightarrow \text{"guadagno apparente medio"}$$

2. Funzioni descrittive a duplice ingresso (Dual Input DF)



$$u(t) = U_0 + U_1 \cos(\Omega t)$$

$y_p(t; U_0, U_1, \Omega)$ = risposta periodica di N a $u(\cdot)$

$$y_p(t; U_0, U_1, \Omega) = Y_0(U_0, U_1, \Omega) +$$

$$+ Y_1(U_0, U_1, \Omega) \cos(\Omega t + \phi_1(U_0, U_1, \Omega)) +$$

$$+ \sum_{k=2}^{\infty} Y_k(U_0, U_1, \Omega) \cos(k \Omega t + \phi_k(U_0, U_1, \Omega))$$

$$D_0(U_0, U_1, \Omega) := \frac{Y_0(U_0, U_1, \Omega)}{U_0}$$

$$D_1(U_0, U_1, \Omega) := \frac{Y_1(U_0, U_1, \Omega)}{U_1} e^{j\phi_1(U_0, U_1, \Omega)}$$

Proposizione 2

- Se N è un elemento non lineare "da caratteristica", il valore delle funzioni descrittive è indipendente da Ω .

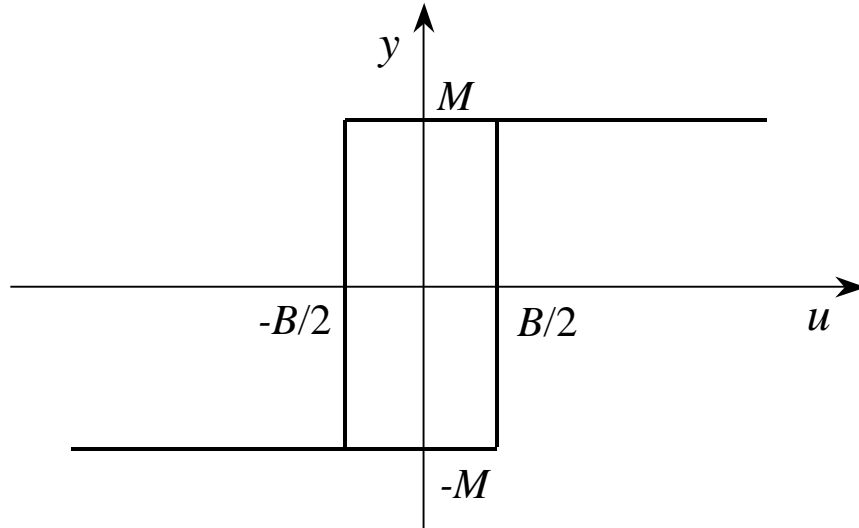
$$D_0(U_0, U_1, \Omega) \rightarrow D_0(U_0, U_1) \quad D_1(U_0, U_1, \Omega) \rightarrow D_1(U_0, U_1)$$

- Se inoltre la caratteristica di N è "a un sol valore", non solo D_0 ma anche D_1 è una funzione reale.

Proposizione 3

La funzione descrittiva (o le funzioni descrittive) di due elementi non lineari in parallelo è (sono) la somma delle singole funzioni descrittive.

Esempio. Controllare a commutazione a due posizioni ("relay") con isteresi $MB/2$



1) *Funzione descrittiva* (a ingresso puramente sinusoidale):

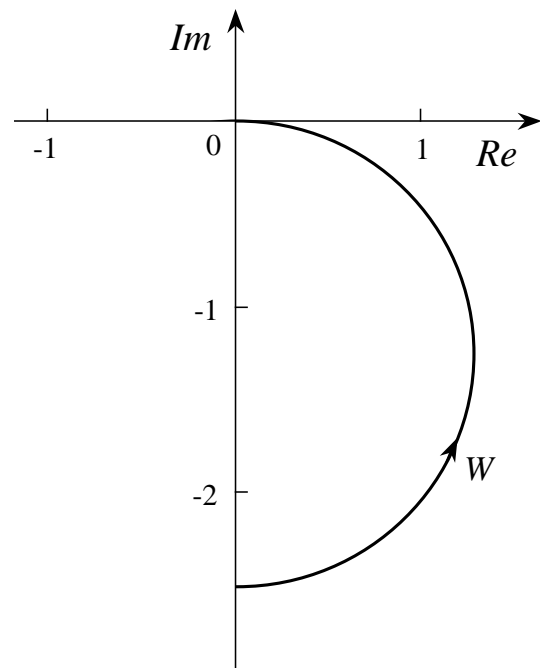
$$D(U) = \frac{2M}{\pi U^2} (\sqrt{4U^2 - B^2} - jB) \quad , \quad U \geq B/2$$

$$D(U) = \frac{M}{B} D^*(W) \quad , \quad W := \frac{U}{B} \geq 1/2$$

$$D^*(W) := \frac{2}{\pi} \frac{\sqrt{4W^2 - 1} - j}{W^2} \quad \rightarrow$$

Se $B = 0$,

$$D(U) = \frac{4M}{\pi U} \quad , \quad U > 0 .$$



2) Funzioni descrittive a duplice ingresso ($u(t)=U_0+U_1 \cos(\Omega t)$)

$$D_0(U_0, U_1) = \frac{M}{U_0} (g_0(\sigma) - g_0(\delta))$$

$$D_1(U_0, U_1) = \frac{2M}{\pi U_1} (g_1(\sigma) + g_1(\delta) - j \frac{B}{U_1})$$

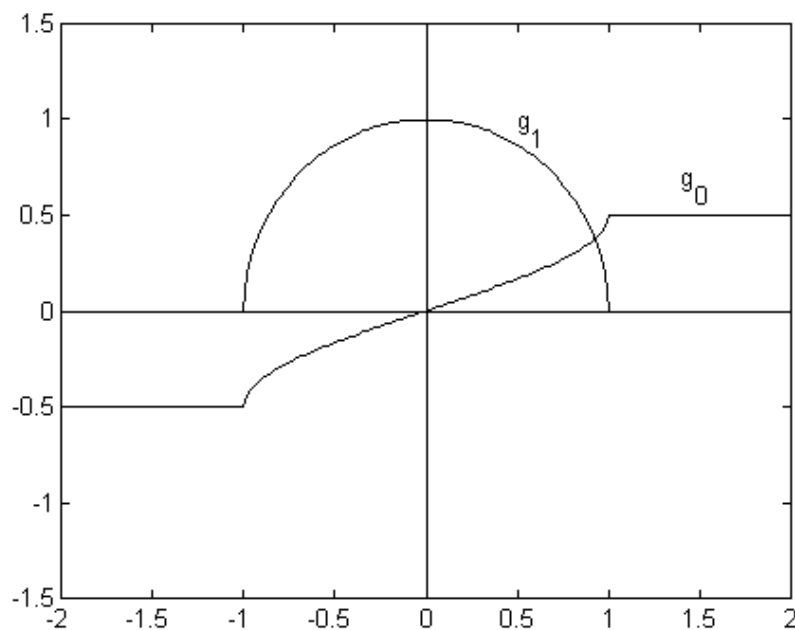
dove:

$$g_0(x) := \begin{cases} -1/2 & , \quad x < -1 \\ 1/\pi \arcsin(x) & , \quad |x| \leq 1 \\ 1/2 & , \quad x > 1 \end{cases}$$

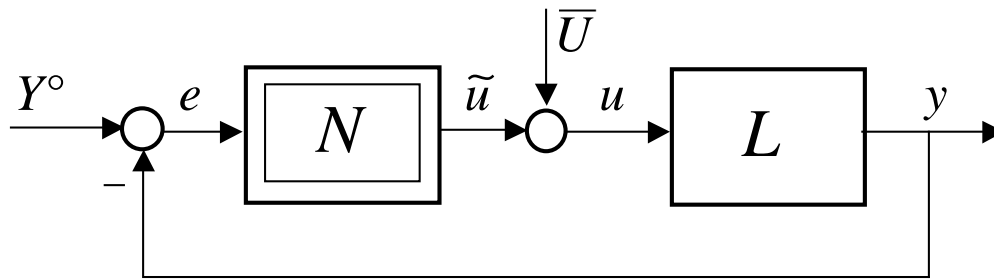
$$g_1(x) := \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & , \quad |x| \leq 1 \\ 0 & , \quad |x| > 1 \end{cases}$$

$$\sigma := a + r \quad , \quad \delta := a - r$$

$$a := \frac{B}{2 U_1} \quad , \quad r := \frac{U_0}{U_1} \quad ; \quad U_1 - |U_0| \geq \frac{B}{2} .$$



OSCILLAZIONI PERMANENTI NEI SISTEMI REAZIONATI



Nell'ipotesi che esista un movimento periodico di periodo T , sia:

$$u(t) = U_0 + U_1 \cos(\Omega t + \beta_1) + \sum_{k=2}^{\infty} U_k \cos(k \Omega t + \beta_k)$$

dove: $\Omega := 2 \pi/T$; corrispondentemente:

$$y(t) = G_0 U_0 + G_1 U_1 \cos(\Omega t + \beta_1 + \gamma_1) + \sum_{k=2}^{\infty} G_k U_k \cos(k \Omega t + \beta_k + \gamma_k)$$

dove:

$$G_k := |G(jk\Omega)| \quad , \quad \gamma_k := \angle G(jk\Omega) .$$

Ricordiamo che :

$$y(t) = G_0 U_0 + G_1 U_1 \cos(\Omega t + \beta_1 + \gamma_1) + \sum_{k=2}^{\infty} G_k U_k \cos(k \Omega t + \beta_k + \gamma_k).$$

Ipotesi "dell'azione filtrante"

Supponiamo che sia:

$$G_k U_k \ll G_1 U_1 \quad , \quad \forall k \geq 2$$

cioè:

$$y(t) \approx G_0 U_0 + G_1 U_1 \cos(\Omega t + \beta_1 + \gamma_1) .$$

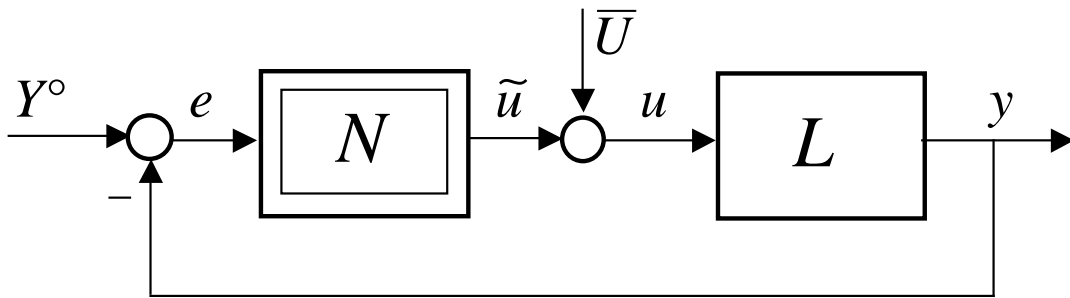
In tal caso, scegliendo opportunamente l'origine dei tempi:

$$e(t) \approx Y^\circ - G_0 U_0 - G_1 U_1 \cos(\Omega t + \beta_1 + \gamma_1) \rightarrow E_0 + E_1 \cos(\Omega t)$$

\Rightarrow per l'analisi del sistema in regime periodico, ciò che occorre conoscere, sotto l'ipotesi dell'azione filtrante, è *solo* in che modo valor medio e prima armonica dell'uscita di N dipendono dai parametri dell'ingresso: E_0, E_1, Ω .

\rightarrow (*funzioni descrittive* a duplice ingresso).

EQUAZIONI DI CONGRUENZA: BILANCIO ARMONICO



$$1) \quad (g \leq 0) \quad E_0 = Y^\circ - G_0 (\bar{U} + D_0(E_0, E_1, \Omega) E_0)$$

$$2) \quad E_1 = -G(j\Omega) D_1(E_0, E_1, \Omega) E_1$$

Se $G(s)$ ha poli nell'origine ($G_0 \rightarrow \infty$), la (1) diventa:

$$1') \quad (g > 0) \quad \bar{U} + D_0(E_0, E_1, \Omega) E_0 = \frac{E_0 - Y^\circ}{G_0} = 0$$

☞ 3 equazioni reali nelle 3 incognite: E_0, E_1, Ω .

Caso particolare interessante: N "da caratteristica"

$$(1) \text{ o } (1') \quad \varphi(E_0, E_1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad E_0 = \eta(E_1)$$

$$(2) \quad (E_1 \neq 0) \quad E_1 = -G(j\Omega) D_1(E_0, E_1) E_1$$

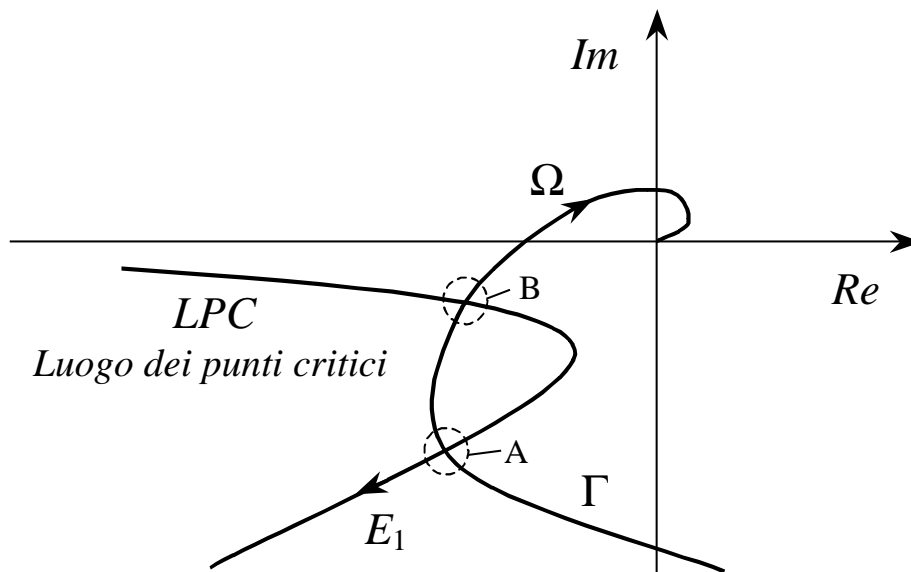
$$G(j\Omega) = \frac{-1}{D_1(E_0, E_1)} = \frac{-1}{D_1(\eta(E_1), E_1)} := H_1(E_1)$$

↓
 Γ

Diagramma polare della r . in f .

↓
 LPC

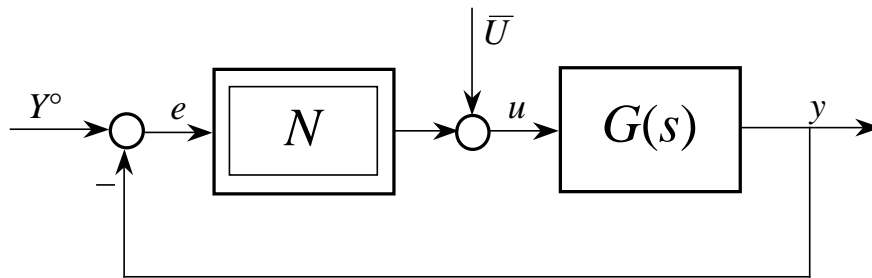
Luogo dei punti critici



Due soluzioni:

- $\Omega_A, E_{1A}, \quad E_{0A} = \eta(E_{1A}) \rightarrow e_A(t) = E_{0A} + E_{1A} \cos(\Omega_A t)$
- $\Omega_B, E_{1B}, \quad E_{0B} = \eta(E_{1B}) \rightarrow e_B(t) = E_{0B} + E_{1B} \cos(\Omega_B t)$

CASO PARTICOLARE: $E_0 \ll E_1$



$$1) \quad (g \leq 0) \quad E_0 = Y^\circ - G_0 (\bar{U} + D_0(E_0, E_1, \Omega) E_0)$$

$$E_0 = \frac{Y^\circ - G_0 \bar{U}}{1 + G_0 D_0(E_0, E_1, \Omega)}$$

$$1') \quad (g > 0) \quad \bar{U} + D_0(E_0, E_1, \Omega) E_0 = 0$$

$$E_0 = \frac{-\bar{U}}{D_0(E_0, E_1, \Omega)}$$

$$E_0 \cong 0 \quad \Rightarrow \quad e(t) \cong E \cos(\Omega t)$$

- *Equazione di congruenza o di bilancio armonico* ($E \neq 0$)

$$E = -G(j\Omega) D(E, \Omega) E \quad \Leftrightarrow \quad G(j\Omega) = \frac{-1}{D(E, \Omega)}$$

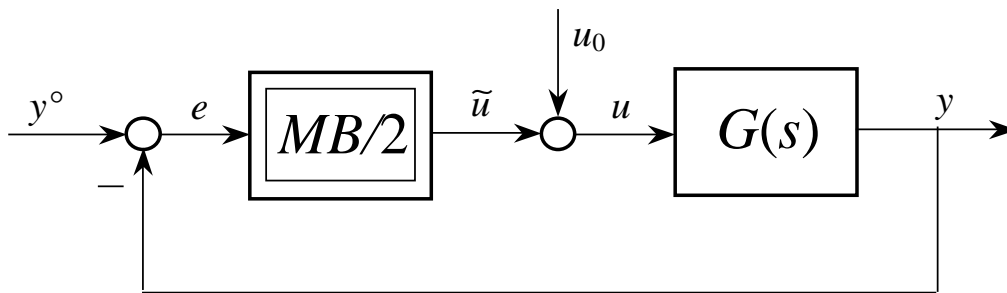
- ♣ Se N è “da caratteristica”:

$$G(j\Omega) = \frac{-1}{D(E)} := H(E)$$

↓

Luogo dei punti critici

ESEMPIO 1



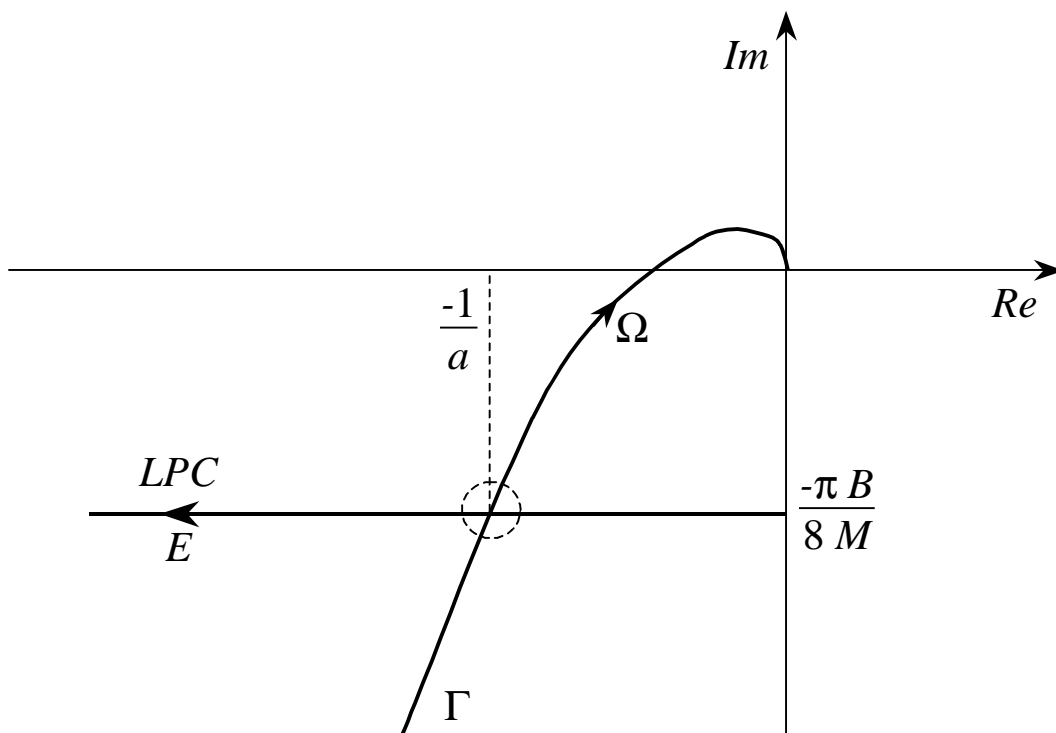
$$\begin{aligned}
 u_1 &= u_0 - M \\
 u_2 &= u_0 + M \\
 y_1 &= y^o - B/2 \\
 y_2 &= y^o + B/2
 \end{aligned}$$

Dati: y_{min} e y_{max} , è naturale porre:

$$y^o = (y_{min} + y_{max})/2, \quad u_0 = \frac{y^o}{G_0} \Rightarrow E_0 = 0$$

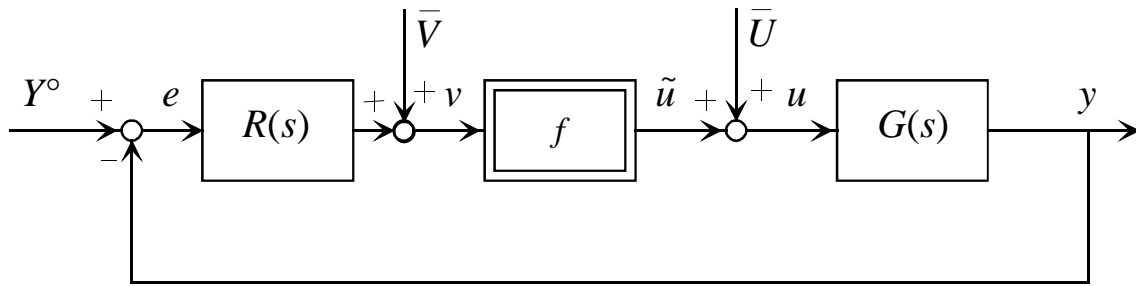
$$B : y_1 = y^o - B/2 \geq y_{min}$$

$$M : u_1 = u_0 - M \rightarrow y_\infty < y_1$$

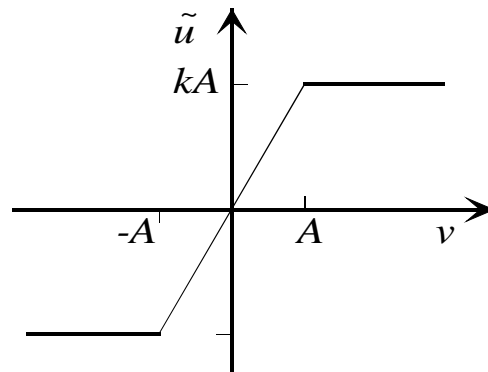


$$\bar{E} = \frac{1}{2} \sqrt{B^2 + \left(\frac{8M}{\pi a}\right)^2}$$

ESEMPIO 2

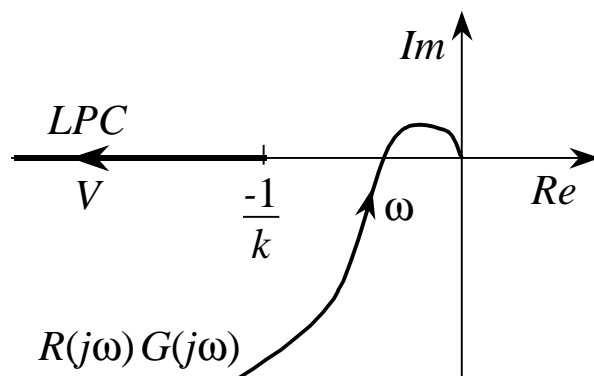
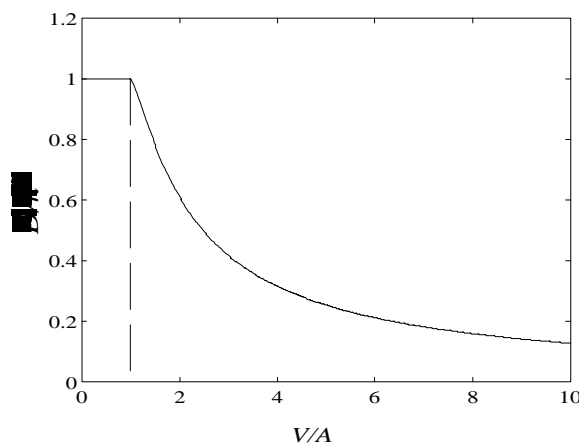


$$f(v) = \text{sat}(v; A, k) \quad \rightarrow$$

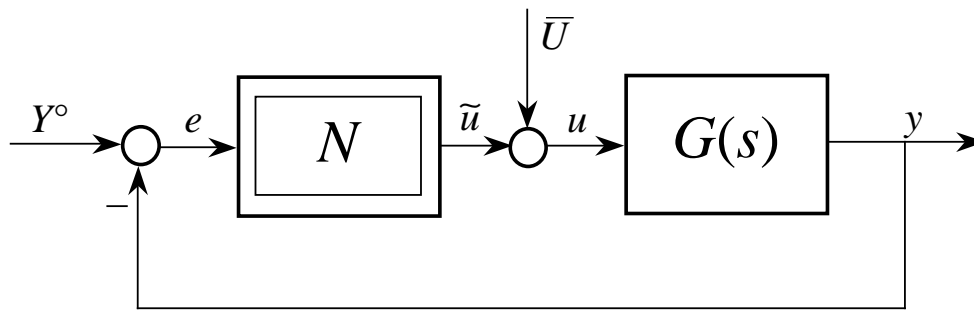


Funzione descrittiva ($H_p: V_0 \cong 0$):

$$D(V) = k \varphi(A/V) \quad , \quad \varphi(x) := \begin{cases} 1 & , \quad x > 1 \\ \frac{2}{\pi} [\arcsin(x) + x \sqrt{1-x^2}] & , \quad |x| \leq 1 \end{cases}$$



STABILITA' DELLE OSCILLAZIONI



Hp: • N “da caratteristica” • $E_0 \approx 0$

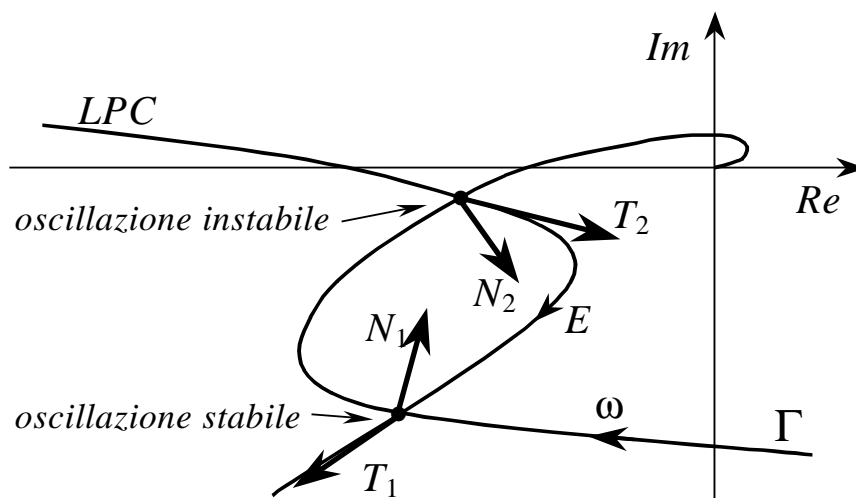
Criterio di Cahen-Loeb

- Sia (E_0, Ω_0) una soluzione dell'equazione $G(j\Omega) = H(E)$ e P il corrispondente punto d'intersezione di Γ con LPC .
- Sia T un vettore tangente in P a LPC , orientato nel senso delle E crescenti.
- Sia N un vettore normale in P a Γ , orientato verso destra per chi percorra Γ nel senso delle ω crescenti.

L'oscillazione corrispondente a P può ritenersi stabile se:

$$T \times N < 0 ;$$

instabile, se vale la disuguaglianza opposta.



Analisi delle oscillazioni perturbate

Sia (E_o, Ω_o) una soluzione dell'equazione di congruenza:

$$G(j\Omega) = \frac{-1}{D(E)} := H(E)$$

indicativa, quindi, di un'oscillazione permanente compatibile con il sistema di Lur'e. A seguito di una perturbazione del corrispondente regime periodico, l'andamento del segnale $e(\cdot)$ potrà sempre continuare ad essere rappresentato come una sinusoidale di ampiezza e pulsazione *variabili nel tempo*:

$$e(t) = E(t) \cos \Phi(t) \quad , \quad \Phi(t) = \Omega_o t + \varphi(t) \quad , \quad \Omega(t) := \dot{\Phi}(t) = \Omega_o + \delta\Omega(t).$$

Allora, ponendo: $\mathbf{E}(t) := E(t) e^{j\Phi(t)}$, si ha: $e(t) := \text{Re}[\mathbf{E}(t)]$, e si può ritenere che la prima armonica di $u(t)$, in regime sinusoidale perturbato, sia semplicemente costituita dalla parte reale di $\mathbf{U}(t)$, dove:

$$\mathbf{U}(t) = D(E(t)) \mathbf{E}(t) ;$$

inoltre : $\mathbf{E}(t) = -\mathbf{Y}(t)$ e $\mathbf{Y}(t)$ può ritenersi legata a $\mathbf{U}(t)$ dall'equazione differenziale:

$$a(p) \mathbf{Y}(t) = b(p) \mathbf{U}(t) ,$$

dove $a(s)$ e $b(s)$ sono, rispettivamente, il denominatore e il numeratore di $G(s)$ e con p si è esplicitamente indicato l'operatore di derivazione rispetto al tempo. In definitiva, l'equazione del moto perturbato è data da:

$$- a(p) \mathbf{E}(t) = b(p) [D(E(t)) \mathbf{E}(t)]$$

Per quanto riguarda le derivate di $\mathbf{E}(t)$, si ha:

$$\begin{aligned}
p \mathbf{E}(t) &:= \frac{d}{dt} [E(t) e^{j\Phi(t)}] = \dot{E}(t) e^{j\Phi(t)} + j E(t) \dot{\Phi}(t) e^{j\Phi(t)} = \\
&= \left[\frac{\dot{E}(t)}{E(t)} + j \dot{\Phi}(t) \right] E(t) e^{j\Phi(t)} := q(t) \mathbf{E}(t)
\end{aligned}$$

avendo posto:

$$q(t) := \frac{\dot{E}(t)}{E(t)} + j \dot{\Phi}(t) := \sigma(t) + j \Omega(t) \quad , \quad \sigma(t) = \frac{\dot{E}(t)}{E(t)} \quad , \quad \Omega(t) = \Omega_0 + \delta\Omega(t).$$

Analogamente :

$$p^2 \mathbf{E}(t) = p [q(t) \mathbf{E}(t)] = \dot{q}(t) \mathbf{E}(t) + q(t) p \mathbf{E}(t) = [\dot{q}(t) + q^2(t)] \mathbf{E}(t) .$$

Ponendo: $p^k \mathbf{E}(t) := Q_k(t) \mathbf{E}(t)$ e $p^k q(t) := q^{(k)}(t)$, si ha dunque:

$$\begin{aligned}
Q_1(t) &= q(t) \\
Q_2(t) &= q^{(1)}(t) + q^2(t) \\
Q_3(t) &= q^{(2)}(t) + 2 q^{(1)}(t) q(t) + q(t) [q^{(1)}(t) + q^2(t)] = \\
&= q^{(2)}(t) + 3 q^{(1)}(t) q(t) + q^3(t)
\end{aligned}$$

e, in generale, per ogni k non negativo:

$$Q_{k+1}(t) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} q^{(k-i)}(t) Q_i(t) \quad , \quad Q_0(t) := 1 \quad ; \quad \binom{k}{i} := \frac{k(k-1)\dots(k-i+1)}{i!} .$$

Per quanto riguarda il secondo membro dell'equazione che governa l'oscillazione perturbata, adottando la notazione $p^k D(E(t)) := D^{(k)}(E(t))$, e ricordando che $p \mathbf{E}(t) = q(t) \mathbf{E}(t)$, si ha:

$$\begin{aligned}
p [D(E(t)) \mathbf{E}(t)] &= D^{(1)}(E(t)) \mathbf{E}(t) + D(E(t)) (p \mathbf{E}(t)) = \\
&= [D^{(1)}(E(t)) + D(E(t)) q(t)] \mathbf{E}(t) := P_1(t) \mathbf{E}(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p^2 [D(E(t)) \mathbf{E}(t)] &= [D^{(2)}(E(t)) + D^{(1)}(E(t)) q(t) + D(E(t)) q^{(1)}(t)] \mathbf{E}(t) + \\
&+ [D^{(1)}(E(t)) + D(E(t)) q(t)] (p \mathbf{E}(t)) = \\
&= [D^{(2)}(E(t)) + 2 D^{(1)}(E(t)) q(t) + (q^2(t) + q^{(1)}(t)) D(E(t))] \mathbf{E}(t) =
\end{aligned}$$

$$:= P_2(t) \mathbf{E}(t)$$

In generale ponendo: $p^k [D(E(t)) \mathbf{E}(t)] := P_k(t) \mathbf{E}(t)$, per ogni k non negativo, si trova: $P_0(t) = D(E(t))$ e

$$P_{k+1}(t) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} [q^{(k-i)}(t) P_i(t) + D^{(k-i+1)}(E(t)) Q_i(t)] .$$

Pertanto, l'equazione

$$- a(p) \mathbf{E}(t) = b(p) [D(E(t)) \mathbf{E}(t)]$$

dove:

$$a(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n, \quad b(p) = b_1 p^{n-1} + b_2 p^{n-2} + \dots + b_n ,$$

può essere scritta:

$$\begin{aligned} - [Q_n(t) + a_1 Q_{n-1}(t) + \dots + a_n] \mathbf{E}(t) &= \\ &= [b_1 P_{n-1}(t) + b_2 P_{n-2}(t) + \dots + b_n P_0(t)] \mathbf{E}(t) . \end{aligned}$$

Poiché $\mathbf{E}(t) := E(t) e^{j\Phi(t)}$, le soluzioni dell'equazione suddetta con $E(\cdot) \neq 0$ sono date da:

$$\mathbf{S}^*: Q_n(t) + a_1 Q_{n-1}(t) + \dots + a_n + b_1 P_{n-1}(t) + b_2 P_{n-2}(t) + \dots + b_n P_0(t) = 0$$

Alla luce delle espressioni precedentemente trovate per $Q_k(t)$ e $P_k(t)$, questa è un'equazione differenziale non lineare *in campo complesso*, riconducibile (separando, ad esempio, parte reale e parte immaginaria) ad un sistema di due equazioni differenziali reali, di ordine $2n - 1$, nelle incognite $E(\cdot)$, $\Omega(\cdot)$.

Procedendo nell'analisi, mostriamo innanzitutto come ogni "stato di equilibrio" (soluzione costante) del sistema S^* corrisponda ad una soluzione dell'equazione di congruenza.

In *condizioni di equilibrio*, sarà: $e(t) = \bar{E} \cos(\Omega t + \bar{\varphi})$ con $\bar{\varphi}$ determinato dall'origine dell'asse dei tempi. Vale a dire:

$$E(t) = \bar{E}, \quad \Phi(t) = \bar{\Omega} t + \bar{\varphi}, \quad \Omega(t) := \dot{\Phi}(t) = \bar{\Omega}$$

$$q(t) := \frac{\dot{E}(t)}{E(t)} + j \dot{\Phi}(t) = j\bar{\Omega}, \quad Q_k(t) = (j\bar{\Omega})^k$$

$$P_0(t) = D(\bar{E}),$$

$$P_{k+1}(t) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} [q^{(k-i)}(t) P_i(t) + D^{(k-i+1)}(E(t)) Q_i(t)] = j\bar{\Omega} P_k(t)$$

$$P_k(t) = (j\bar{\Omega})^k D(\bar{E})$$

E pertanto, in condizioni di equilibrio, il sistema S^* diventa:

$$S_{eq}^* : \quad a(j\bar{\Omega}) + b(j\bar{\Omega}) D(\bar{E}) = 0$$

$$S_{eq}^* : \quad G(j\bar{\Omega}) := \frac{b(j\bar{\Omega})}{a(j\bar{\Omega})} = \frac{-1}{D(\bar{E})} := H(\bar{E}).$$

La condizione di equilibrio del sistema S^* coincide con l'equazione di congruenza. La stabilità dell'oscillazione associata alla soluzione (E_o, Ω_o) dell'equazione di congruenza equivale alla stabilità della condizione di equilibrio (E_o, Ω_o) del sistema S^* .

L'analisi della stabilità dell'equilibrio in un sistema non lineare come S^* può essere impegnativa. E' noto, però, che nella maggior parte dei casi una risposta soddisfacente può essere ottenuta esaminando *il sistema lineare* δS^* *tangente a* S^* *nel punto di equilibrio* (E_o, Ω_o) .

Per determinare δS^* , cominciamo ad osservare che:

$$\delta q(t) = \frac{1}{E_o} \delta \dot{E}(t) + j \delta \Omega(t) \quad , \quad \delta q^{(k)}(t) = \frac{1}{E_o} \delta E^{(k+1)}(t) + j \delta \Omega^{(k)}(t) \quad .$$

Pertanto, dall'espressione

$$Q_{k+1}(t) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} q^{(k-i)}(t) Q_i(t) \quad , \quad Q_0(t) := 1 \quad ,$$

valida per $k \geq 0$, segue immediatamente: $\delta Q_0(t) := 0$ e

$$\begin{aligned} \delta Q_{k+1}(t) &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \left[\frac{1}{E_o} \delta E^{(k-i+1)}(t) + j \delta \Omega^{(k-i)}(t) \right] (j\Omega_o)^i = \\ &= \frac{1}{E_o} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (j\Omega_o)^i \delta E^{(k-i+1)}(t) + j \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (j\Omega_o)^i \delta \Omega^{(k-i)}(t) \end{aligned}$$

Analogamente, dall'espressione:

$$P_{k+1}(t) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} [q^{(k-i)}(t) P_i(t) + D^{(k-i+1)}(E(t)) Q_i(t)] \quad , \quad P_0(t) = D(E(t)),$$

si ottiene: $\delta P_0(t) := D_{(1)}(E_o) \delta E(t)$ e, per ogni $k \geq 0$,

$$\begin{aligned} \delta P_{k+1}(t) &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \left[\frac{1}{E_o} \delta E^{(k-i+1)}(t) + j \delta \Omega^{(k-i)}(t) \right] (j\Omega_o)^i D(E_o) + \\ &+ j\Omega_o D_{(1)}(E_o) \delta E(t) + \\ &+ \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \{ (j\Omega_o)^i \delta D^{(k-i+1)}(E(t)) + [D^{(k-i+1)}(E(t))]_{E(t)=E_o} \delta Q_i(t) \} \end{aligned}$$

ma, $\delta D(E(t)) = D_{(1)}(E_o) \delta E(t)$; quindi, per ogni $k > 0$,

$$\delta D^{(k)}(E(t)) = D_{(1)}(E_o) \delta E^{(k)}(t)$$

mentre all'equilibrio: $D^{(k)}(E(t))|_{E(t)=E_o} = 0$ per ogni $k \geq 1$. Pertanto,

$$\begin{aligned} \delta P_{k+1}(t) &= D_{(1)}(E_o) \delta E(t) j\Omega_o + \\ &+ \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \left[\frac{1}{E_o} + \frac{D_{(1)}(E_o)}{D(E_o)} \right] \delta E^{(k-i+1)}(t) + j \delta \Omega^{(k-i)}(t) (j\Omega_o)^i D(E_o) = \\ &= D_{(1)}(E_o) \delta E(t) j\Omega_o + \frac{D(E_o) + E_o D_{(1)}(E_o)}{E_o} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \delta E^{(k-i+1)}(t) (j\Omega_o)^i + \\ &+ j D(E_o) \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \delta \Omega^{(k-i)}(t) (j\Omega_o)^i . \end{aligned}$$

Possiamo ora dare al sistema:

$$\begin{aligned} \delta S^*: \quad \delta Q_n(t) + a_1 \delta Q_{n-1}(t) + \dots + a_{n-1} \delta Q_1(t) + \\ + b_1 \delta P_{n-1}(t) + b_2 \delta P_{n-2}(t) + \dots + b_n \delta P_0(t) = 0 \end{aligned}$$

una forma più conveniente per l'analisi di stabilità. Sia:

$$\delta \Theta(t) := \frac{\delta E(t)}{E_o}$$

allora un paziente riordino dei coefficienti di $\delta \Theta(t)$, $\delta \Omega(t)$ e delle loro derivate porta a scrivere:

$$\delta S^*: \quad \alpha_0 \delta \Theta^{(n)}(t) + \alpha_1 \delta \Theta^{(n-1)}(t) + \dots + \alpha_n \delta \Theta(t) +$$

$$+ j [\beta_1 \delta\Omega^{(n-1)}(t) + \beta_2 \delta\Omega^{(n-2)}(t) + \dots + \beta_n \delta\Omega(t)] = 0$$

dove:

$$\alpha_0 = 1$$

$$\alpha_1 = (n-1) (j\Omega_o) + a_1 + [D(E_o) + E_o D_{(1)}(E_o)] b_1$$

$$\alpha_2 = \frac{(n-1)(n-2)}{2} (j\Omega_o)^2 + (n-2) (j\Omega_o) a_1 + a_2 + [D(E_o) + E_o D_{(1)}(E_o)] [(n-2) (j\Omega_o) b_1 + b_2]$$

$$\alpha_3 = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3!} (j\Omega_o)^3 + \frac{(n-2)(n-3)}{2} (j\Omega_o)^2 a_1 + (n-3) (j\Omega_o) a_2 + a_3 + [D(E_o) + E_o D_{(1)}(E_o)] \left[\frac{(n-2)(n-3)}{2} (j\Omega_o)^2 b_1 + (n-3) (j\Omega_o) b_2 + b_3 \right]$$

e in generale, ponendo: $a_0 := 1$, si ha:

$$\alpha_k = \sum_{i=0}^k \binom{n-i-1}{k-i} (j\Omega_o)^{(k-i)} a_i + [D(E_o) + E_o D_{(1)}(E_o)] \sum_{i=1}^k \binom{n-i-1}{k-i} (j\Omega_o)^{(k-i)} b_i$$

per ogni $k = 1, 2, \dots, n-1$, mentre $\alpha_n = a_n + [D(E_o) + E_o D_{(1)}(E_o)] b_n$.

Analogamente, si trova:

$$\beta_1 = 1$$

$$\beta_2 = (n-1) (j\Omega_o) + a_1 + D(E_o) b_1$$

$$\beta_3 = \frac{(n-1)(n-2)}{2} (j\Omega_o)^2 + (n-2) (j\Omega_o) a_1 + a_2 + D(E_o) [(n-2) (j\Omega_o) b_1 + b_2]$$

e in generale, per ogni $k = 2, 3, \dots, n$:

$$\beta_k = \sum_{i=1}^k \binom{n-i}{k-i} (j\Omega_o)^{(k-i)} a_{i-1} + D(E_o) \sum_{i=2}^k \binom{n-i}{k-i} (j\Omega_o)^{(k-i)} b_{i-1} .$$

Si noti infine che ponendo: $z(t) := \delta\Theta(t) + j \delta\Omega(t)$, e $\gamma_k := \alpha_k + \beta_k$, per ogni $k = 1, 2, \dots, n$, il sistema δS^* assume la forma:

$$\delta S^*: \quad \boxed{z^{(n)}(t) + \gamma_1 z^{(n-1)}(t) + \dots + \gamma_n z(t) = 0}$$

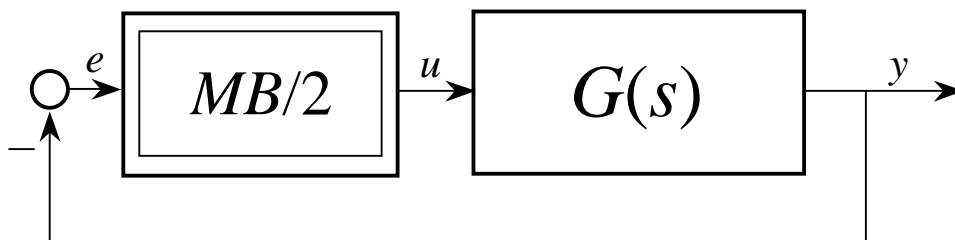
e tale sistema è asintoticamente stabile se e solo se le radici dell'equazione caratteristica:

$$s^n + \gamma_1 s^{n-1} + \dots + \gamma_n s = 0$$

hanno parte reale negativa, mentre è instabile se una delle radici ha parte reale positiva. Naturalmente, *l'impostazione qui adottata porta a concludere che l'oscillazione (E_o, Ω_o) sia da ritenersi stabile se δS^* è asintoticamente stabile e sia da ritenersi instabile se δS^* è instabile.*

Esempio

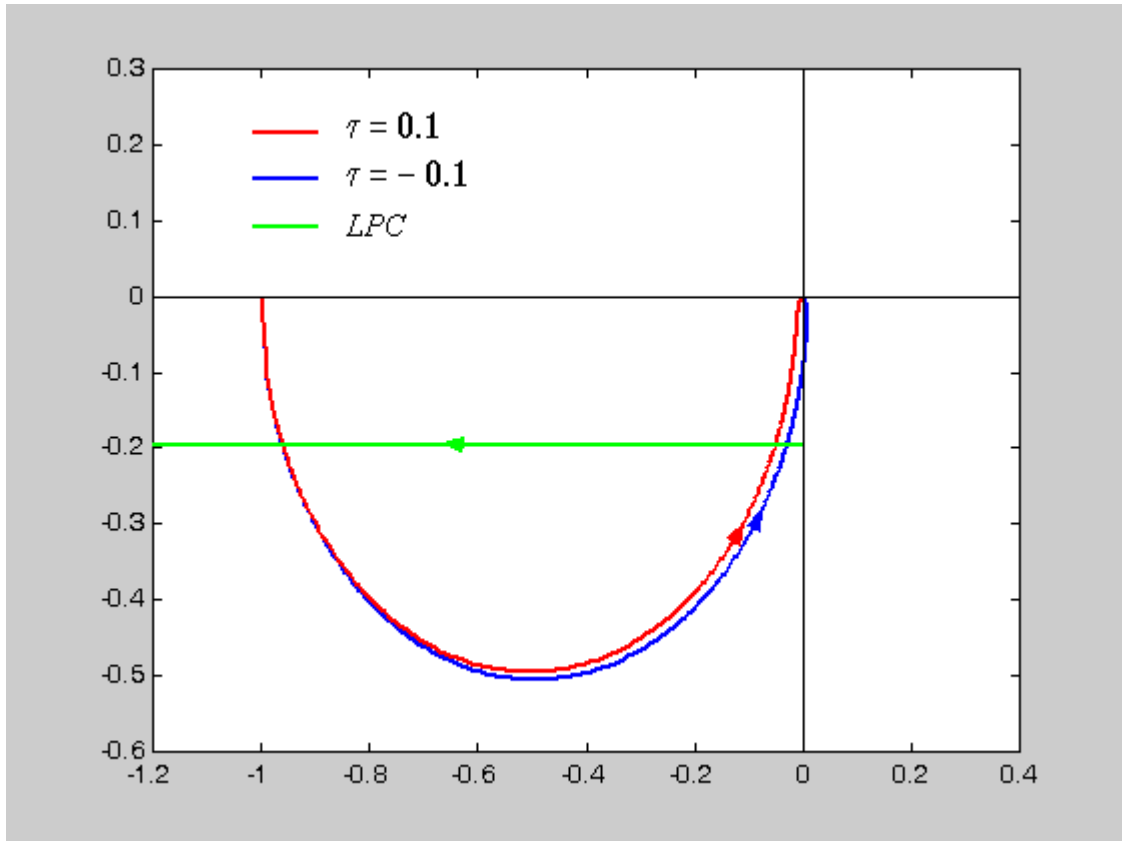
Con riferimento al sistema di Lur'e mostrato in figura,



sia: $M = 4, B = 2$ e

$$G(s) = \frac{-1}{(1 - 10s)(1 + \tau s)} \quad , \quad \tau = \pm 0.1 .$$

In entrambi i casi, il metodo della funzione descrittiva e il criterio di Caen-Loeb portano a prevedere l'esistenza di due oscillazioni permanenti: una instabile (a bassa frequenza) ed una stabile.



Caso A: $\tau = 0.1$

$$G(s) = \frac{-1}{(1 - 10s)(1 + 0.1s)} = \frac{1}{(s + 10)(s - 0.1)} = \frac{1}{s^2 + 9.9s - 1}$$

$$a_1 = 9.9 \quad , \quad a_2 = -1 \quad , \quad b_1 = 0 \quad , \quad b_2 = 1$$

Luogo dei punti critici: $-\frac{\pi B}{8M} = -0.1963$. In “alta frequenza”,

$$Im[G(j\omega)] = \frac{-9.9\omega}{(1 + \omega^2)^2 + 9.9^2\omega^2} = -0.1963 \quad \Rightarrow \quad \Omega_o = 0.4825$$

$$a = -\frac{1}{Re[G(j\Omega_o)]} = 19.7413 \quad , \quad E_o = \frac{1}{2} \sqrt{B^2 + \left(\frac{8M}{\pi a}\right)^2} = 1.0327$$

$$D(E_o) = \frac{2 M}{\pi E_o^2} (\sqrt{4 E_o^2 - B^2} - j B) = 1.2319 - j 4.7751$$

$$D_{(1)}(E_o) = -\frac{2 M}{\pi E_o^3} (\sqrt{4 E_o^2 - B^2} - j B) + \frac{8 M}{\pi E_o} \frac{1}{\sqrt{4 E_o^2 - B^2}} =$$

$$= 17.9225 + j 4.6237$$

$$\alpha_1 = (n-1)j\Omega_o + a_1 + [D(E_o) + E_o D_{(1)}(E_o)] b_1 = 9.9 + j 0.4825$$

$$\alpha_2 = a_2 + [D(E_o) + E_o D_{(1)}(E_o)] b_2 = 18.7413$$

$$\beta_1 = 1$$

$$\beta_2 = j\Omega_o + a_1 + D(E_o) b_1 = 9.9 + j 5.0918$$

$$\gamma_1 = 10.9000 - j 0.4825, \quad \gamma_2 = 28.6413 - j 0.4825$$

Le radici dell'equazione caratteristica:

$$s^2 + \gamma_1 s + \gamma_2 = 0$$

sono:

$$r_1 = -6.7486 + j 1.0679 \quad \text{e} \quad r_2 = -4.1514 - j 0.5854$$

quindi, l'oscillazione permanente in esame è da ritenersi stabile, in accordo con quanto correttamente suggerito, in questo caso, dal criterio di Caen-Loeb.

Caso B: $\tau = -0.1$

$$G(s) = \frac{-1}{(1 - 10s)(1 - 0.1s)} = \frac{-1}{(s - 10)(s - 0.1)} = \frac{-1}{s^2 - 10.1s + 1}$$

$$a_1 = -10.1, \quad a_2 = 1, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = -1$$

Il luogo dei punti critici è immutato. Sempre in “alta frequenza”,

$$\text{Im}[G(j\omega)] = \frac{-10.1 \omega}{(1 - \omega^2)^2 + 10.1^2 \omega^2} = -0.1963 \quad \Rightarrow \quad \Omega_o = 0.4930$$

$$a = \frac{-1}{\text{Re}[G(j\Omega_o)]} = 33.5113, \quad E_o = \frac{1}{2} \sqrt{B^2 + \left(\frac{8M}{\pi a}\right)^2} = 1.0115$$

$$D(E_o) = \frac{2M}{\pi E_o^2} (\sqrt{4E_o^2 - B^2} - jB) = 0.7565 - j4.9780$$

$$D_{(1)}(E_o) = -\frac{2M}{\pi E_o^3} (\sqrt{4E_o^2 - B^2} - jB) + \frac{8M}{\pi E_o} \frac{1}{\sqrt{4E_o^2 - B^2}} = \\ = 32.3829 + j4.9215$$

$$\alpha_1 = (n-1)j\Omega_o + a_1 + [D(E_o) + E_o D_{(1)}(E_o)] b_1 = -10.1000 + j0.4930$$

$$\alpha_2 = a_2 + [D(E_o) + E_o D_{(1)}(E_o)] b_2 = -32.5113$$

$$\beta_1 = 1$$

$$\beta_2 = j\Omega_o + a_1 + D(E_o) b_1 = -10.1000 + j0.4930$$

$$\gamma_1 = -9.1000 - j0.4930, \quad \gamma_2 = -42.6113 - j0.4930$$

Le radici dell'equazione caratteristica:

$$s^2 + \gamma_1 s + \gamma_2 = 0$$

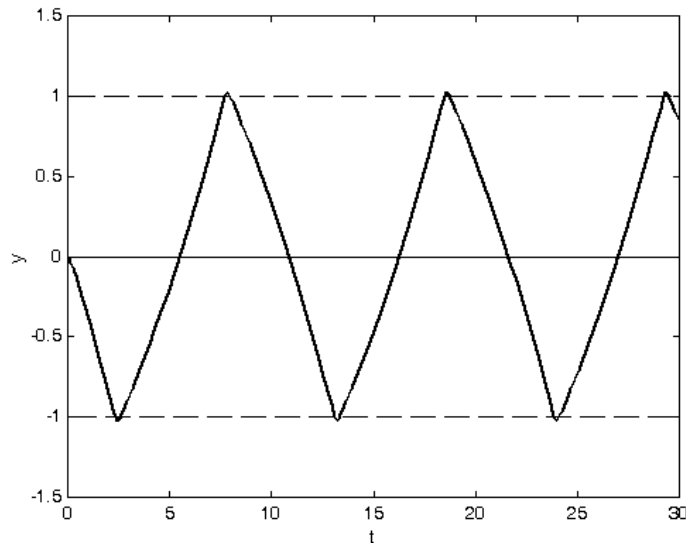
sono:

$$r_1 = 12.5050 + j0.4185 \quad \text{e} \quad r_2 = -3.4050 + j0.0745$$

quindi in questo caso, contrariamente a quanto suggerito dal criterio di Caen-Loeb, l'oscillazione permanente in esame è da ritenersi *instabile*.

In effetti, un'analisi accurata delle traiettorie nel piano di stato porta a concludere che, come spesso accade, in entrambi i casi qui considerati le orbite che il metodo della funzione descrittiva induce a ritenere

instabili in realtà non esistono, mentre esiste ed è effettivamente tale quella prevista stabile nel caso A; vale a dire quando $\tau = 0.1$.



Nel caso B, la previsione basata sul criterio di Cahen-Loeb è invece errata, come dimostra l'analisi più accurata svolta in questo paragrafo.

Una derivazione del Criterio di Cahen-Loeb

Il criterio di Cahen-Loeb si basa su un'ipotesi di *quasi stazionarietà* (ampiezza e fase) dell'oscillazione perturbata. Si suppone cioè che si abbia: $q^{(k)}(t) \cong 0$, per ogni $k > 0$. E inoltre:

$$q(t) := \frac{\dot{E}(t)}{E(t)} + j \Omega(t) \cong j \Omega(t), \quad \Omega(t) := \dot{\Phi}(t) = \Omega_0 + \delta\Omega(t), \quad dq = j d\Omega.$$

Di conseguenza, risulta :

$$Q_k(t) \cong q^k(t), \quad P_k(t) \cong q^k(t) D(E(t));$$

Pertanto, l'equazione del moto sinusoidale perturbato:

$$S^*: Q_n(t) + a_1 Q_{n-1}(t) + \dots + a_n + b_1 P_{n-1}(t) + b_2 P_{n-2}(t) + \dots + b_n P_0(t) = 0$$

si riduce a:

$$S_{rid}^*: a(q(t)) + b(q(t)) D(E(t)) = 0$$

ovvero:

$$S_{rid}^* : \quad G(q(t)) = - \frac{1}{D(E(t))} =: H(E(t))$$

Il modello lineare δS_{rid}^* tangente a S_{rid}^* nel punto di lavoro $q(t) = j\Omega_o$, $E(t) = E_o$ è dato da:

$$\delta S_{rid}^* : \quad \frac{dG}{dq}(j\Omega_o) \delta q(t) = \frac{dH}{dE}(E_o) \delta E(t)$$

$$\delta S_{rid}^* : \quad \frac{1}{j} \frac{dG}{d\Omega}(j\Omega_o) \left[\frac{\delta \dot{E}(t)}{E_o} + j \delta \Omega(t) \right] = \frac{dH}{dE}(E_o) \delta E(t)$$

$$\delta S_{rid}^* : \quad \frac{\delta \dot{E}(t)}{E_o} + j \delta \Omega(t) - \frac{E_o \frac{dH}{dE}(E_o)}{-j \frac{dG}{d\Omega}(j\Omega_o)} \frac{\delta E(t)}{E_o} = 0$$

Se ora si pone:

$$\frac{E_o \frac{dH}{dE}(E_o)}{-j \frac{dG}{d\Omega}(j\Omega_o)} := \alpha + j \beta$$

e si separano la parte reale e la parte immaginaria, si ottiene:

$$\delta S_{rid}^* : \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta \dot{E}(t)}{E_o} - \alpha \frac{\delta E(t)}{E_o} = 0 \\ \delta \Omega(t) - \beta \frac{\delta E(t)}{E_o} = 0 \end{array} \right.$$

Evidentemente, δS_{rid}^* è asintoticamente stabile se e solo se $\alpha < 0$ ed è instabile se $\alpha > 0$. Ma,

$$T := E_o \frac{dH}{dE}(E_o) \quad , \quad N := -j \frac{dG}{d\Omega}(j\Omega_o)$$

sono, rispettivamente, un vettore tangente nel punto E_o al luogo dei punti critici e un vettore normale, nel punto $G(j\Omega_o)$, al diagramma polare della risposta in frequenza associata a $G(s)$. Il vettore T è palesemente orientato nel senso delle E crescenti, mentre N è orientato verso destra per chi percorra nel senso delle Ω crescenti il diagramma polare. Per altro, in base alla definizione, α è negativa (e δS_{rid}^* è asintoticamente stabile) se e solo se

$$|\angle T - \angle N| > \pi/2$$

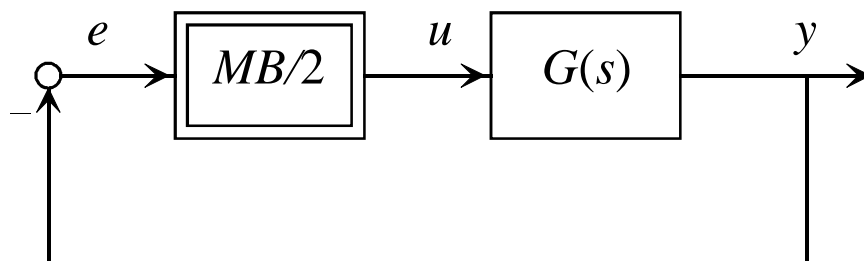
ovvero se e solo se:

$$T \times N < 0$$

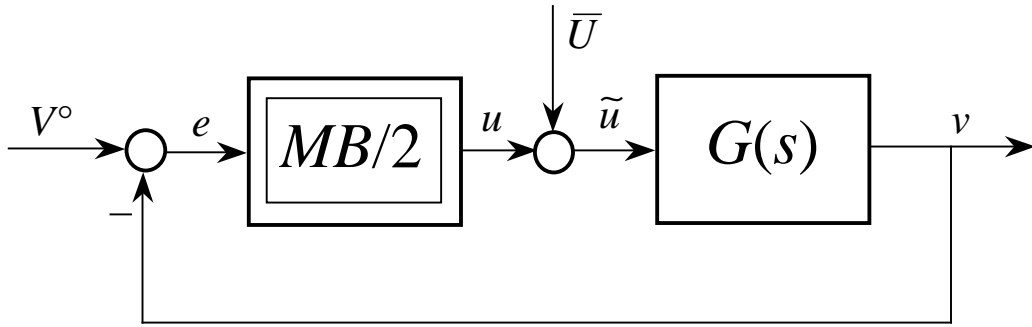
dove con \angle si è indicato l'argomento in radianti e con \times il prodotto scalare.

IL METODO DI ZIPKIN

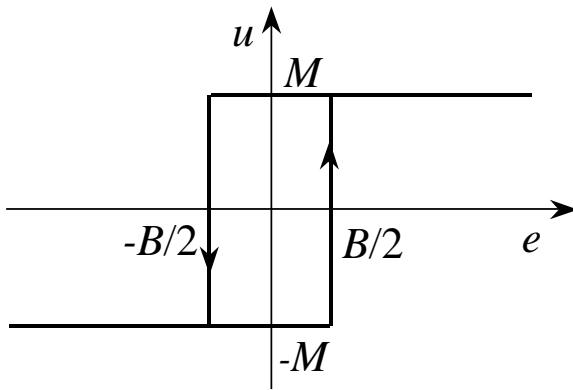
Metodo euristico esatto, per sistemi reazionati con elementi non lineari “da caratteristica” del tipo “a commutazione”. Ci limitiamo qui ad illustrare il metodo in un importante *caso particolare*:



che è equivalente a:



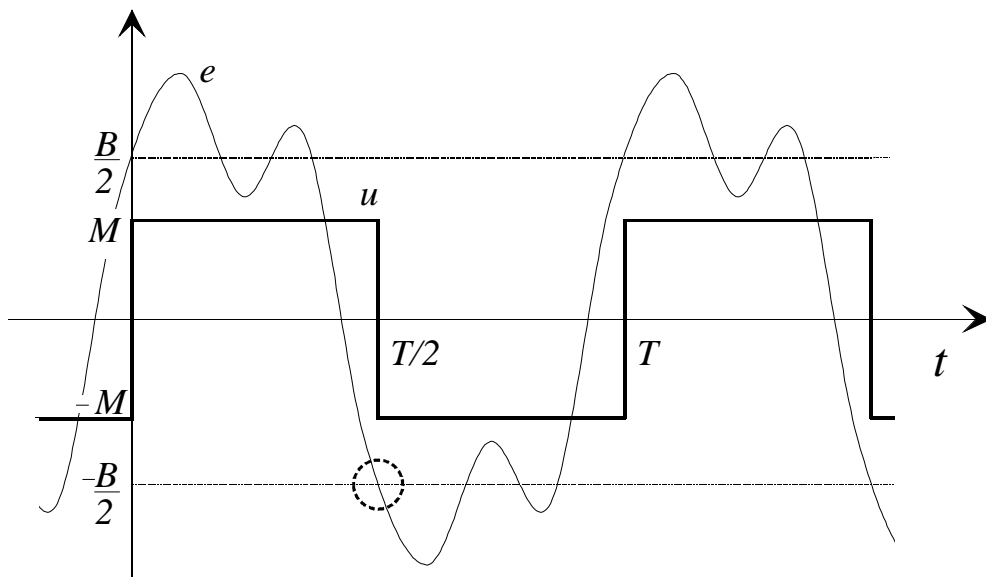
se $\bar{U} = V^o/G(0)$ e si pone: $v(t) - V^o = y(t)$. Ricordando la forma del controllore $MB/2$, è relativamente facile concludere che nel sistema di Lur'e autonomo qui considerato esiste un'oscillazione permanente simmetrica di periodo T solo se:



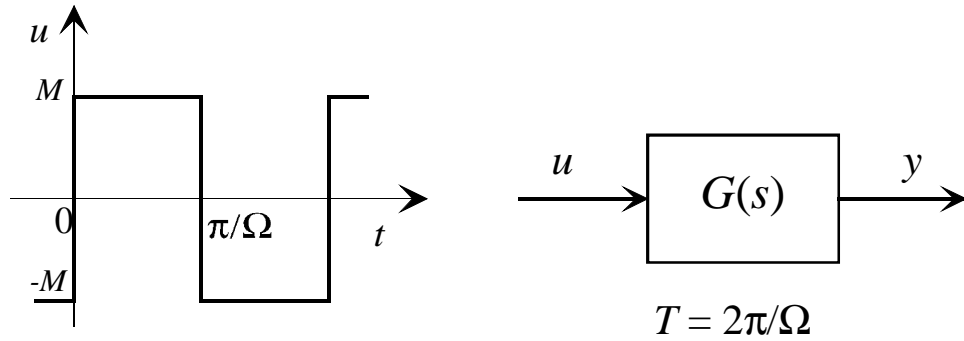
$$e(T/2) = -B/2 \quad , \quad \dot{e}(T/2) < 0$$

e che tale oscillazione comporta non più di due commutazioni per periodo se (*ipotesi euristica*) è verificata la condizione:

$$e(t) > -B/2, \quad \forall t \in (0, T/2) .$$



Se dunque una cosiffatta oscillazione esiste, il segnale $u(\cdot)$ non potrà che essere un'onda rettangolare dispari, di periodo T e ampiezza M .



Sviluppando $u(\cdot)$ in serie di Fourier, si ottiene:

$$u(t) = \frac{4M}{\pi} \sum_{k \in \mathbf{D}^+} \frac{\sin(k \Omega t)}{k}, \quad \mathbf{D}^+ := \{\text{interi positivi dispari}\}$$

corrispondentemente, la risposta periodica del sistema lineare descritto da $G(s)$ è data da:

$$y(t) = \frac{4M}{\pi} \sum_{k \in \mathbf{D}^+} \frac{G_k \sin(k \Omega t + \gamma_k)}{k}; \quad G_k := |G(jk\Omega)|, \quad \gamma_k := \angle G(jk\Omega).$$

Ora osserviamo che le condizioni: $e(T/2) = -B/2$, $\dot{e}(T/2) < 0$ sono equivalenti a:

$$a) \quad \frac{\pi}{4M} e(\pi/\Omega) = \frac{-\pi B}{8M}$$

$$b) \quad \frac{\pi}{4M\Omega} \dot{e}(\pi/\Omega) < 0$$

e che $e(t) = -y(t)$. Per altro,

$$\frac{-\pi}{4M} y(\pi/\Omega) = - \sum_{k \in \mathbf{D}^+} \frac{G_k \sin(k \pi + \gamma_k)}{k} = \sum_{k \in \mathbf{D}^+} \frac{G_k \sin(\gamma_k)}{k}$$

$$\frac{-\pi}{4M\Omega} \dot{y}(\pi/\Omega) = \frac{-1}{\Omega} \sum_{k \in \mathbf{D}^+} \frac{G_k k \Omega \cos(k \pi + \gamma_k)}{k} = \sum_{k \in \mathbf{D}^+} G_k \cos(\gamma_k)$$

Definendo allora una nuova funzione Z nel modo seguente:

$$Re[Z(\Omega)] := \sum_{k \in D^+} G_k \cos(\gamma_k) = \sum_{k \in D^+} Re[G(jk\Omega)]$$

$$Im[Z(\Omega)] := \sum_{k \in D^+} \frac{G_k \sin(\gamma_k)}{k} = \sum_{k \in D^+} \frac{Im[G(jk\Omega)]}{k}$$

le condizioni:

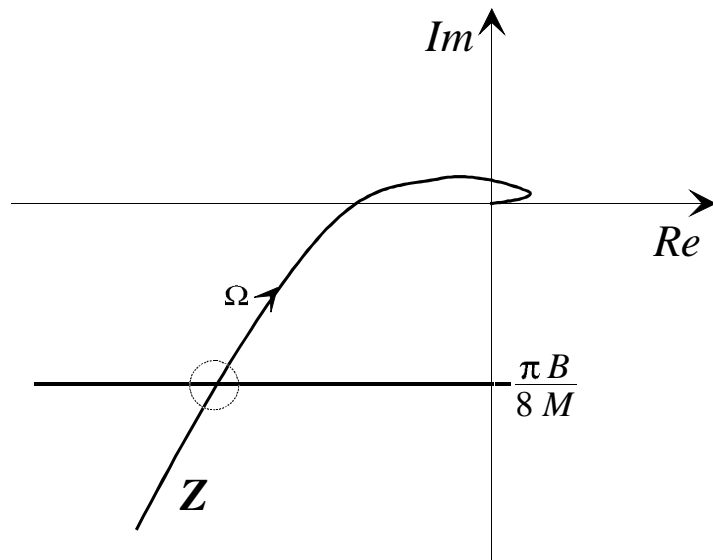
$$a) \quad \frac{\pi}{4M} e(\pi/\Omega) = \frac{-\pi B}{8M}$$

$$b) \quad \frac{\pi}{4M\Omega} \dot{e}(\pi/\Omega) < 0$$

diventano:

$$Im[Z(\Omega)] = -\frac{\pi B}{8M}$$

$$Re[Z(\Omega)] < 0$$



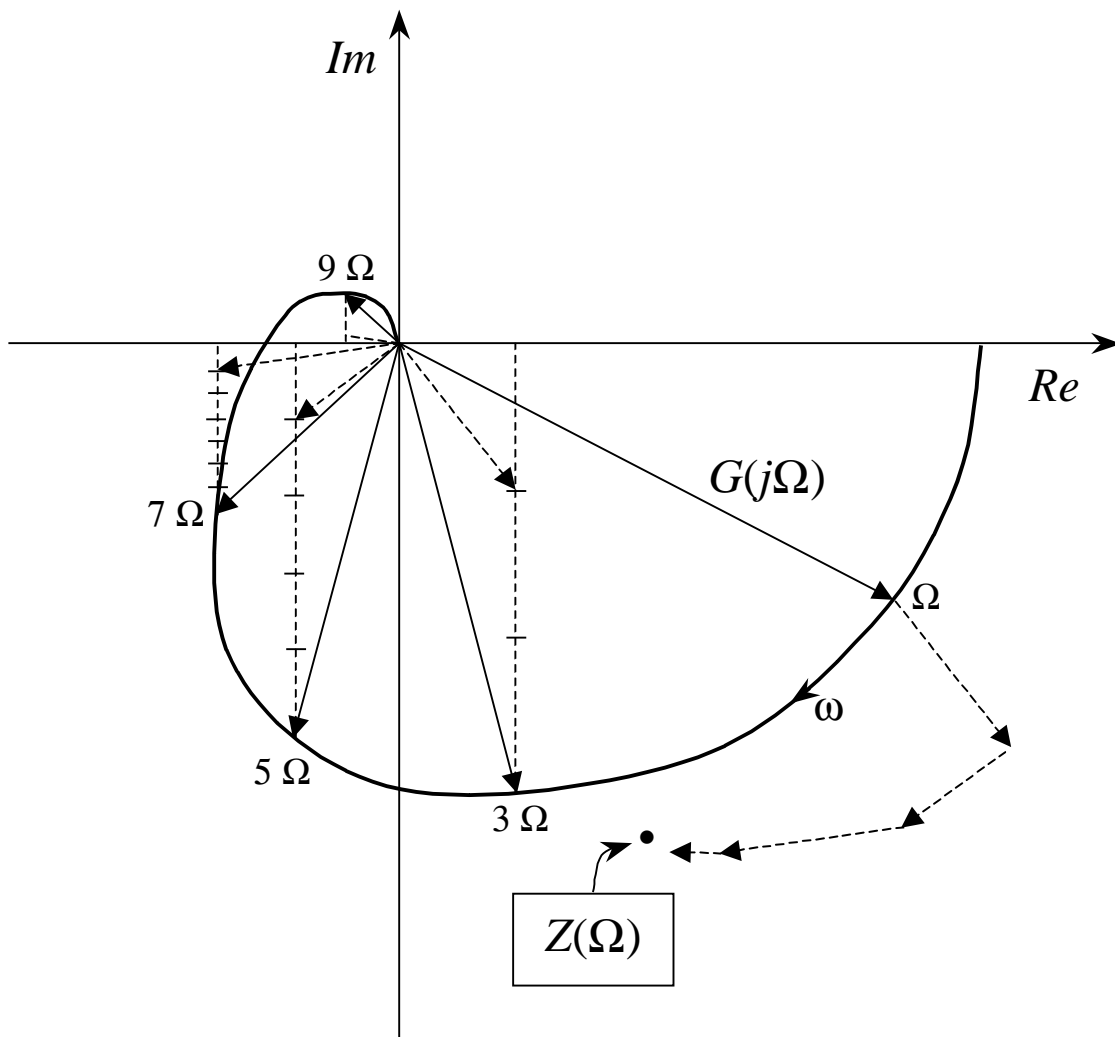
Stabilità delle oscillazioni:

↑ SI

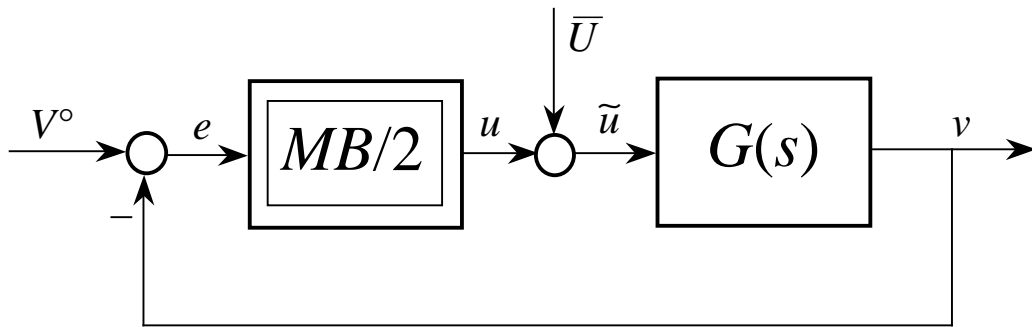
↓ NO

Costruzione del luogo di Zipkin $\{Z(\Omega), \Omega \geq 0\}$

$$Re[Z(\Omega)] := \sum_{k \in D^+} Re[G(jk\Omega)] \quad , \quad Im[Z(\Omega)] := \sum_{k \in D^+} \frac{Im[G(jk\Omega)]}{k}$$



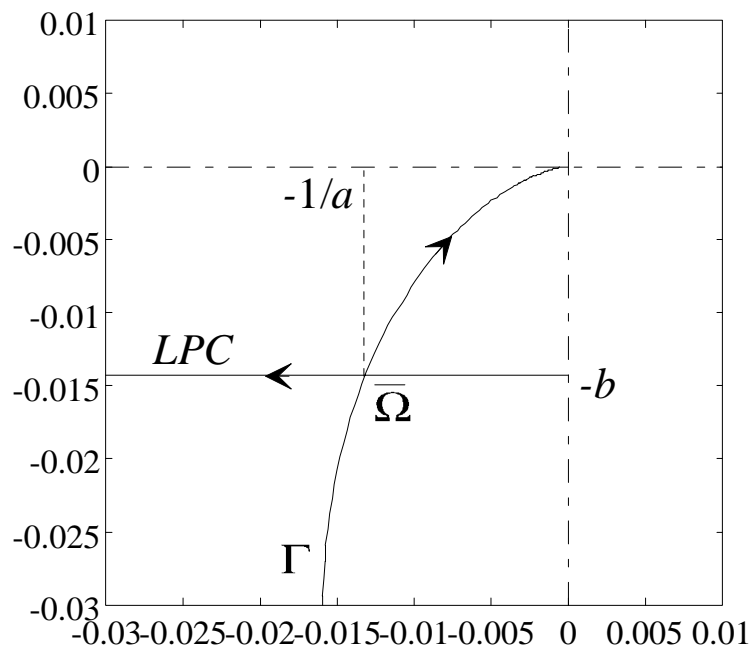
ESEMPIO



$$G(s) = \frac{1}{(s+5)(s+1)} \quad , \quad V^\circ = 22 \quad , \quad \bar{U} = 110$$

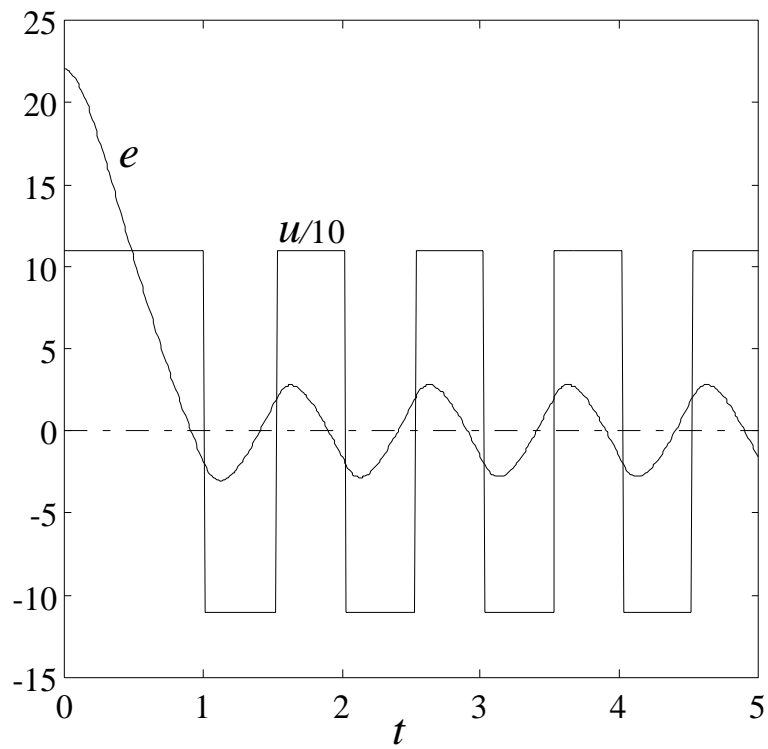
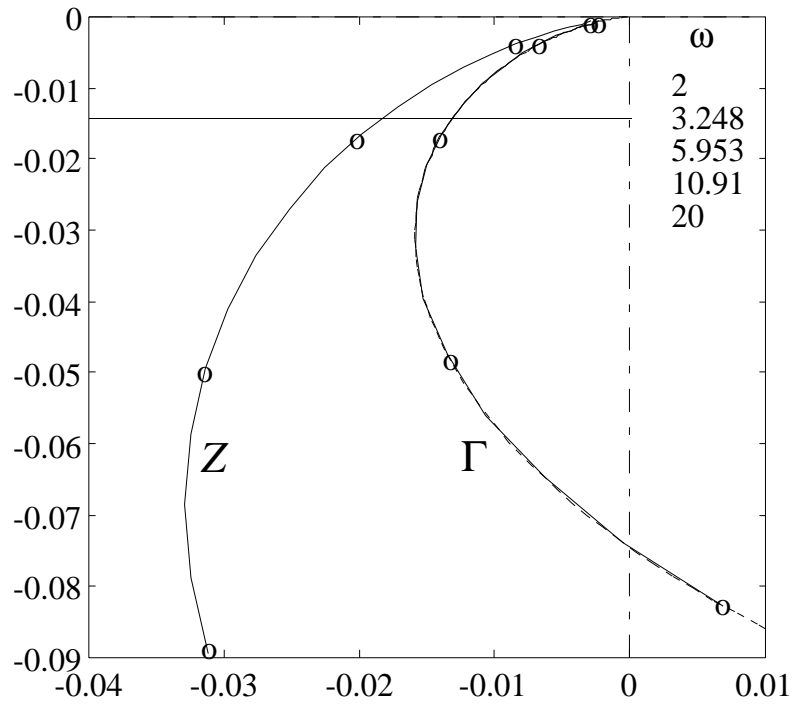
$$M = 110 \quad , \quad B = 4$$

$$G(0) \bar{U} = \frac{110}{5} = 22 = V^\circ \quad \Rightarrow \quad \text{система libero equivalente}$$

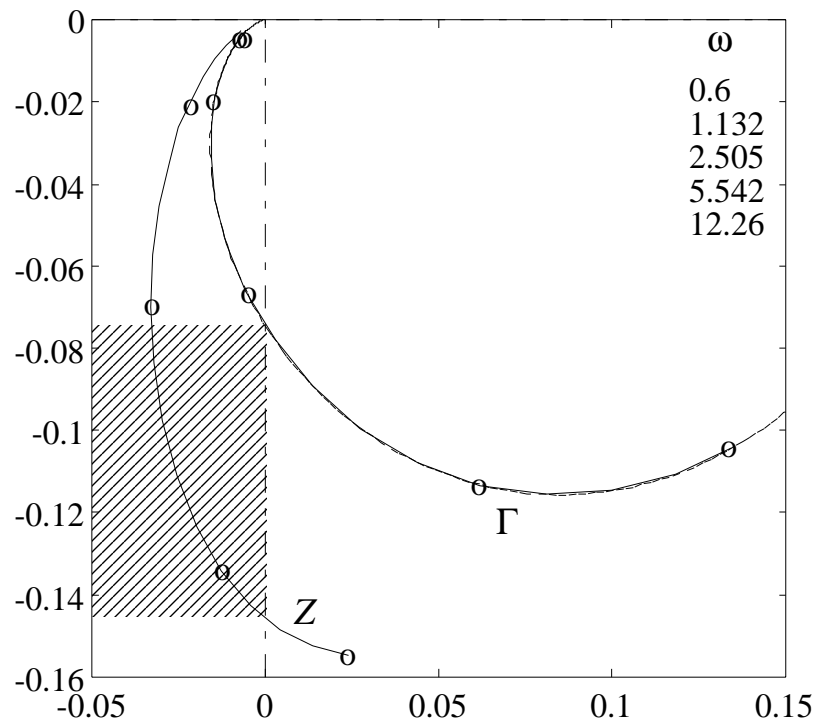


$$b = 0.0143 \quad , \quad \bar{\Omega} \approx 6.3 \quad , \quad a = 77.3913 \quad , \quad \bar{E} = 2.6972$$

Metodo di Zipkin

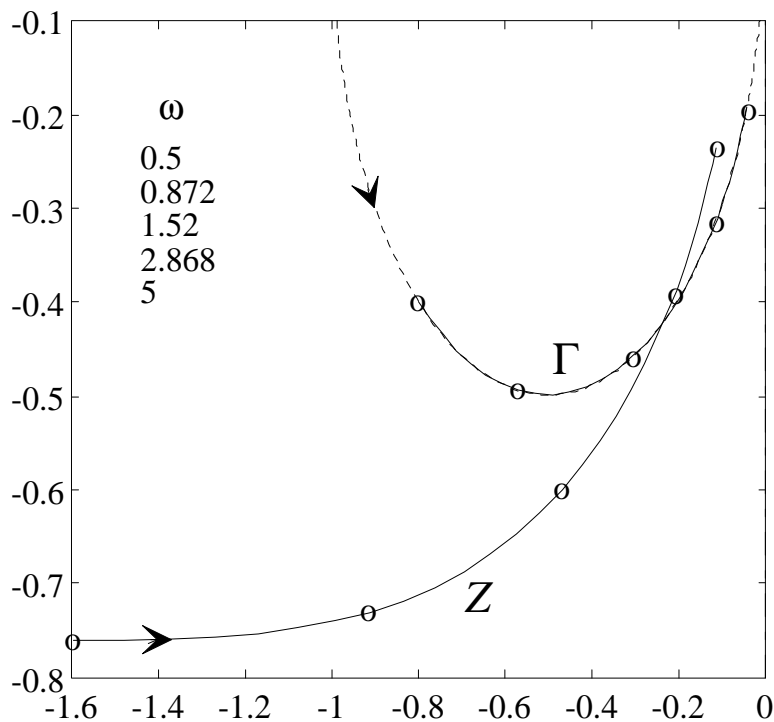


Per $M \in (10, 20.94)$, esiste una oscillazione, rivelata dal metodo di Zipkin, ma **non** dal metodo della funzione descrittiva.



Un *caso patologico*: in questo caso, il metodo della funzione descrittiva fornisce un'analisi comunque (parzialmente) sbagliata.

$$G(s) = \frac{-1}{(1-s)(1+0.03s)}$$

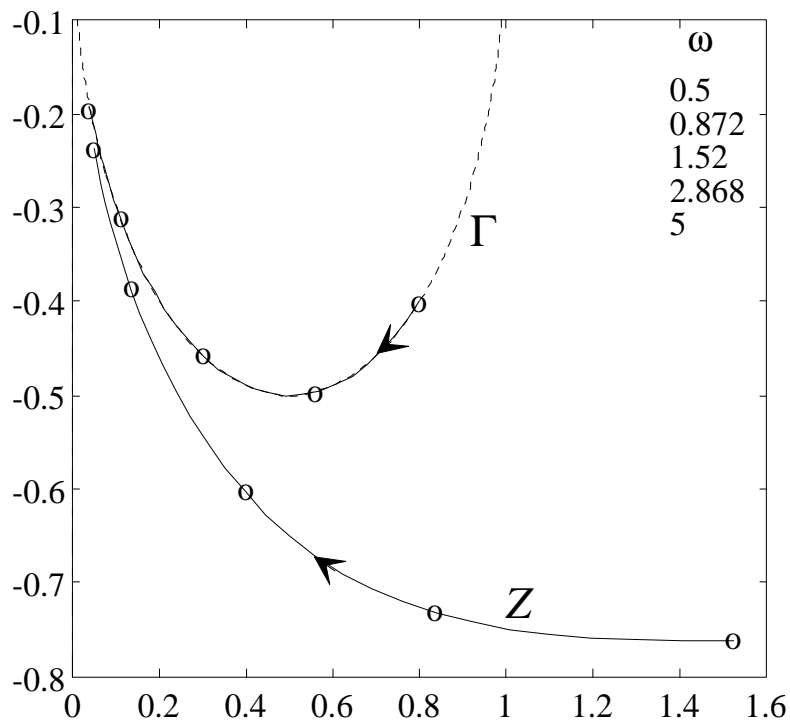


Se $\pi B/(8 M)$ è minore di circa 0.5, il metodo della funzione descrittiva prevede l'esistenza di due oscillazioni: una stabile e una no. L'oscillazione instabile, in realtà non esiste. Nel caso invece in cui $\pi B/(8 M)$ sia maggiore di circa 0.5 lo stesso metodo manca (in un certo senso, più gravemente) di rivelare l'esistenza di un'oscillazione stabile.

Un *contro-esempio apparente* (soprattutto, per il metodo di Zipkin)

$$G(s) = \frac{1}{(1+s)} \quad (B=2, M>1, \Rightarrow \frac{\pi B}{8M} < 0.7854)$$

E' facile riscontrare per analisi diretta, o per simulazione, che in questo caso esiste un'oscillazione permanente stabile. Ma nessun metodo la rivela!



Nel metodo di Zipkin, la condizione

$$Re[Z(\Omega)] < 0 \quad \left[\frac{\pi}{4M\Omega} \dot{e}(\pi/\Omega) < 0 \right]$$

sussiste solo se $\exists \dot{e}(\pi/\Omega)$, cioè se:

$$grel(G) \geq 2$$

Un caso "curioso"

$$G(s) = \frac{64}{(s + 1)(s^2 + 0.8s + 16)(s + 4)}$$

