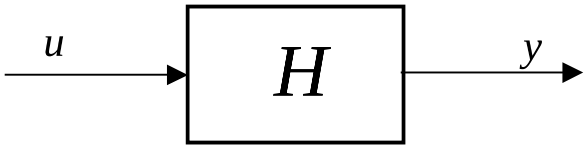
Capitolo 2
Metodi ingresso-uscita

L'idea essenziale è semplice: descrivere ogni sistema orientato S come un *operatore*, dallo spazio U dei segnali d'ingresso allo spazio Y dei segnali d'uscita.

S :



$$u(\cdot) \in \mathsf{U} \quad , \quad y(\cdot) \in \mathsf{Y}$$

$$H : \mathsf{U} \rightarrow \mathsf{Y}$$

Il sistema S può essere indifferentemente dinamico (spesso, ma non necessariamente, a dimensioni finite) o non dinamico:

$$S_{nd} \ : \qquad y(t) = g(u(t))$$

$$S_d \ : \qquad \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) & , \qquad x(0) = x_0 \\ y(t) = g(x(t), u(t)) & . \end{cases}$$

Se S è dinamico, un aspetto immediatamente colpisce: ***lo stato*** del sistema, così carico di significato e d'importanza, ***è scomparso*** dal quadro. I concetti di stabilità "alla Liapunov", che affondano le loro radici nella nozione di "stato", dovranno essere abbandonati.

In particolare, in un sistema dinamico, il legame fra segnale d'ingresso e corrispondente segnale d'uscita dipende dallo ***stato iniziale***. In questo capitolo, dovremo dunque abituarci a considerare lo stato iniziale come fissato. O, quanto meno, come un parametro dell'operatore ingresso-uscita che, in questo modo, equivale in realtà ad una famiglia di operatori: uno per ogni valore dello stato iniziale.

Gli spazi funzionali d'ingresso e d'uscita

- Considereremo essenzialmente spazi funzionali costituiti da segnali a tempo continuo (analogici) definiti su $\mathbf{R}^+$ ($u(\cdot), y(\cdot) : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$) e *continui a tratti*; caratterizzati, cioè, nel caso peggiore, da un insieme numerabile di discontinuità, tutte di prima specie ("salti"). Inoltre, faremo sistematicamente, per semplicità, l'ipotesi che lo spazio dei segnali d'uscita sia uguale a quello dei segnali d'ingresso ($\mathsf{Y} = \mathsf{U}$).

- Gli spazi funzionali ai quali faremo prevalentemente riferimento saranno spazi lineari normati (o loro estensioni).
  - Uno spazio è *lineare* se è chiuso rispetto alle operazioni di somma e di prodotto per uno scalare.
  - Uno spazio V è *normato* se è definita una funzione:

    $$\|\cdot\| : \mathsf{V} \to \mathbf{R}^+$$

    con le seguenti proprietà:

    1) $\|v(\cdot)\| = 0 \;\Rightarrow\; v(\cdot) \equiv 0$
    2) $\|\alpha\, v(\cdot)\| = |\alpha|\, \|v(\cdot)\|$, per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$ e $v(\cdot) \in \mathsf{V}$
    3) $\|v_a(\cdot) + v_b(\cdot)\| \le \|v_a(\cdot)\| + \|v_b(\cdot)\|$, per ogni $v_a(\cdot), v_b(\cdot) \in \mathsf{V}$

- Con rare eccezioni, dettate dall'eventuale esigenza di contrastare possibili ambiguità, d'ora in avanti, nell'indicazione dei segnali d'ingresso o d'uscita, il puntino verrà omesso. Ad esempio, se M è lo spazio funzionale dei segnali d'ingresso e d'uscita del sistema *S*, vale a dire il dominio e il co-dominio dell'operatore *H* che lo rappresenta, scriveremo:

$$y = H(u) \in \mathsf{M} \quad , \quad \forall u \in \mathsf{M} .$$

Spazi di Lebesgue ($\boldsymbol{L_p}$)

Fissiamo innanzitutto l'attenzione sugli spazi $\boldsymbol{L_p}$ dei segnali a tempo continuo $v(\cdot)$: $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ tali che $\|v(\cdot)\|_p < \infty$ (spazi di Lebesgue), dove, per ogni p reale positivo:

$$\|v(\cdot)\|_p := \begin{cases} \left[\int_0^\infty |v(t)|^p \, dt \right]^{1/p} & , \quad p < \infty \ , \\ \sup_{t \in \mathbf{R}^+} |v(t)| & , \quad p = \infty \ . \end{cases}$$

- $\sup_{t \in \mathbf{R}^+} |v(t)|$

  è da intendersi qui come il più piccolo numero reale maggiore o uguale a $|v(t)|$ quasi ovunque su $\mathbf{R}^+$; cioè, su un insieme ottenibile da $\mathbf{R}^+$ eliminandone al più un sottoinsieme di misura nulla (estremo superiore essenziale). La precisazione è "inutile" se, come faremo nel seguito, ci si limita a considerare segnali continui a tratti.

- Benché p possa essere, in linea di principio, un qualunque numero reale positivo, i casi di maggiore interesse sono relativamente pochi: p=1 (segnali *assolutamente integrabili*), p=2 (segnali *a energia finita*), p=∞ (segnali *uniformemente limitati*).

- Nel seguito, indicheremo con L un generico spazio $\boldsymbol{L_p}$. [$\mathsf{L} \in \{\boldsymbol{L_p}, p>0\}$]

Osservazione

Gli spazi $\boldsymbol{L_p}$ sono costituiti, per definizione, da segnali limitati in norma. Descrivere un sistema mediante un operatore da $\boldsymbol{L_p}$ a $\boldsymbol{L_p}$ sarebbe dunque possibile solo se si escludessero a priori segnali d'ingresso illimitati o sistemi (dinamici) a risposta illimitata. Per aggirare questa inaccettabile restrizione, occorre estendere la definizione di spazio di Lebesgue.

Spazi di Lebesgue estesi

Per ogni $v(\cdot)$: $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ e ogni $\tau > 0$, sia :

$$v_\tau(t) := \begin{cases} v(t) & , \quad t \in [0, \tau] \\ 0 & , \quad t > \tau \quad . \end{cases}$$

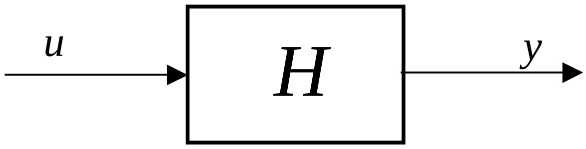
il *troncamento a* τ di $v(\cdot)$. Allora,

$$\mathsf{L}_e := \{v(\cdot) : v_\tau(\cdot) \in \mathsf{L} \,,\ \forall \tau \in \mathbf{R}^+\}$$

- $\|v_\tau(\cdot)\|$ è una funzione non decrescente di τ ;
- $v(\cdot) \in \mathsf{L}$ se e solo se esiste M tale che: $\|v_\tau(\cdot)\| \leq M$, per ogni $\tau \geq 0$.

Sistemi (operatori) causali

S :



$$H : \mathsf{L}_e \to \mathsf{L}_e$$

$$u \in \mathsf{L}_e \qquad \Rightarrow \qquad y = H(u) \in \mathsf{L}_e$$

Il sistema S (l'operatore H) è *causale* se, per ogni $\tau \in \mathbf{R}^+$, l'andamento di y fino a τ (compreso) non dipende dall'andamento di u da τ (escluso) in poi:

$$H(u)_\tau = H(u_\tau)_\tau \qquad , \qquad \forall\, u \in \mathsf{L}_e \ \text{ e } \ \forall \tau \in \mathbf{R}^+ .$$

Nel seguito, considereremo esclusivamente sistemi (operatori) causali.

$$S: \quad \xrightarrow{\;u\;} \boxed{\;H\;} \xrightarrow{\;y\;}$$

$$H : \mathcal{L}_e \to \mathcal{L}_e \qquad , \qquad y = H(u)$$

Polarizzazione, norma indotta e guadagno

L'elemento nullo $u = 0$ di $\mathcal{L}_e$ è il segnale identicamente nullo su $\mathbf{R}^+$ (o qualsiasi segnale che differisca da questo su un insieme di misura nulla; segnali che differiscano su un insieme di misura nulla sono indistinguibili in $\mathcal{L}_e$: la loro distanza è nulla; ovviamente, questa precisazione è "inutile" se l'attenzione è ristretta ai segnali continui a tratti).

In generale, l'operatore H è *polarizzato* (anche se S è non dinamico); cioè:

$$H(0) = y_0 \neq 0 \,.$$

Coerentemente, H è detto *non polarizzato* se $H(0) = 0$.

Se H è polarizzato, si può sempre porre: $G(u) := H(u) - H(0)$, sicché:

$$H(u) = G(u) + y_0 \,.$$

L'*operatore non polarizzato G associato ad H* è causale se e solo se H è causale.

La ***norma indotta*** di un operatore causale non polarizzato $G : \mathcal{L}_e \to \mathcal{L}_e$ è data da:

$$\|G\| := \sup_{u \in \mathcal{L} - \{0\}} \frac{\|G(u)\|}{\|u\|} \,.$$

Osservazione

La definizione di norma indotta fa riferimento a L non a L_e. In effetti, una definizione apparentemente più appropriata sarebbe:

$$\|G\|_e := \sup_{\substack{u \in \mathsf{L}_e - \{0\} \\ \tau \in \mathbf{R}^+}} \frac{\|G(u)_\tau\|}{\|u_\tau\|} ;$$

ma, grazie alla causalità di G, è facile riconoscere che $\|G\|_e = \|G\|$.

*********   *********   *********

♣ Se $\|G\| < \infty$, si dice che l'operatore G è ***limitato***; la sua norma indotta è anche detta *guadagno di G a polarizzazione nulla*:

$$\gamma°(G) := \|G\| = \sup_{u \in \mathsf{L} - \{0\}} \frac{\|G(u)\|}{\|u\|} .$$

Ovviamente,

$$\|G(u)\| \leq \gamma°(G)\, \|u\| \quad , \quad \forall u \in \mathsf{L} \quad ,$$

e anche:

$$\|G(u)_\tau\| \leq \gamma°(G)\, \|u_\tau\| \quad , \quad \forall (u, \tau) \in \mathsf{L}_e \times \mathbf{R}^+.$$

- Si noti che $\|G\| < \infty$ non implica affatto $\|G(u)\| < \infty$. In realtà, non è G, ma la sua norma indotta ad essere limitata.

- E' interessante estendere ora la nozione di guadagno ("finite gain") a qualsiasi operatore causale, anche polarizzato.

➔

***Definizione* 1** (*Operatore causale* (*debolmente*) *limitato*)

Un operatore causale $H : \mathcal{L}_e \to \mathcal{L}_e$ è

- *limitato* se $\|y_0\| = \|H(0)\| := \beta < \infty$ e $G(\cdot) = H(\cdot) - y_0$ è limitato; in tal caso,

$$\|H(u)\| = \|G(u) + y_0\| \leq \|G(u)\| + \|y_0\| \leq \gamma^\circ(G)\ \|u\| + \beta$$

- *debolmente limitato* (o *a guadagno finito*) se esistono $\hat{\gamma}, \hat{\beta} \in \mathbf{R}^+$ tali che:

$$\|H(u)\| \leq \hat{\gamma}\ \|u\| + \hat{\beta} \quad , \quad \forall u \in \mathcal{L} \quad .$$

N.B.: Se H è limitato, è anche debolmente limitato.

***Definizione* 2** (*Guadagno di un operatore causale H debolmente limitato*)

$$\gamma(H) := inf\ \{\hat{\gamma} \in \mathbf{R}^+ \mid \exists \hat{\beta} \in \mathbf{R}^+ :\ \|H(u)\| \leq \hat{\gamma}\ \|u\| + \hat{\beta}\ ,\ \forall u \in \mathcal{L}\ \}$$

$\Rightarrow$ Se H è un operatore causale debolmente limitato esiste il guadagno $\gamma(H)$ e, per ogni $\gamma \geq \gamma(H)$, esiste $\beta \in \mathbf{R}^+$ tale che: $\|H(u)\| \leq \gamma\ \|u\| + \beta\ ,\ \forall u \in \mathcal{L}$.

Gli ***esempi*** che seguono, importanti in sé, oltre allo scopo d'illustrare le precedenti definizioni hanno quello di mostrare che:

- tanto la "limitatezza o meno" quanto il "valore del guadagno" di un operatore $H : \mathcal{L}_e \to \mathcal{L}_e$, con $\mathcal{L} = \boldsymbol{L_p}$ e $p \in (0, \infty]$, dipendono da p;
- anche un operatore non limitato può essere debolmente limitato e avere un guadagno (finito);
- il guadagno di un operatore non polarizzato può differire dalla sua norma indotta, vale a dire dal suo "guadagno a polarizzazione nulla"; più precisamente: $\gamma(G) \leq \gamma^\circ(G)$.

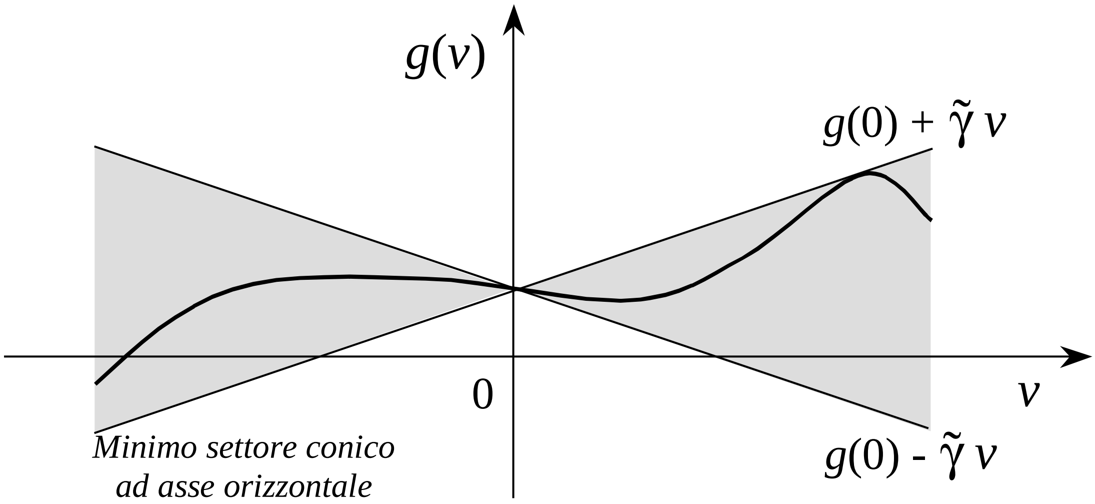
E S E M P I

***Esempio* 1** (*Sistema non dinamico*)

S : $$y(t) = g(u(t)) \quad , \quad \forall t \in \mathbf{R}^+$$

con g(·) continua a tratti. Sia poi :

$$\tilde{g}(v) := g(v) - g(0) \quad , \quad \tilde{\gamma} := inf\,\{k \in \mathbf{R}^+ : |\tilde{g}(v)| \le k\,|v|, \forall v \in \mathbf{R}\}$$



S : $$y = H(u) \in \mathsf{L}_e \quad , \quad \forall u \in \mathsf{L}_e$$

$$H(u) = G(u) + y_0$$

$$G(u) = \tilde{y} \quad ; \quad \tilde{y}(t) = \tilde{g}(u(t)) \;,\; \forall t \in \mathbf{R}^+ \quad ; \quad y_0(t) = g(0) \;.$$

Caso $\mathsf{L} = \boldsymbol{L}_\infty$

- $\|y_0\|_\infty = |g(0)| := \beta < \infty$
- $u \in \boldsymbol{L}_\infty \quad \Rightarrow \quad \|u\|_\infty = \sup_{t \in \mathbf{R}^+} |u(t)| := U < \infty$

$$\|u\|_\infty = U$$

$$\|G(u)\|_\infty = \sup_{t \in \mathbf{R}^+} |\tilde{g}(u(t))| = \sup_{|v| \le U} |\tilde{g}(v)| \le \tilde{\gamma}\, U$$

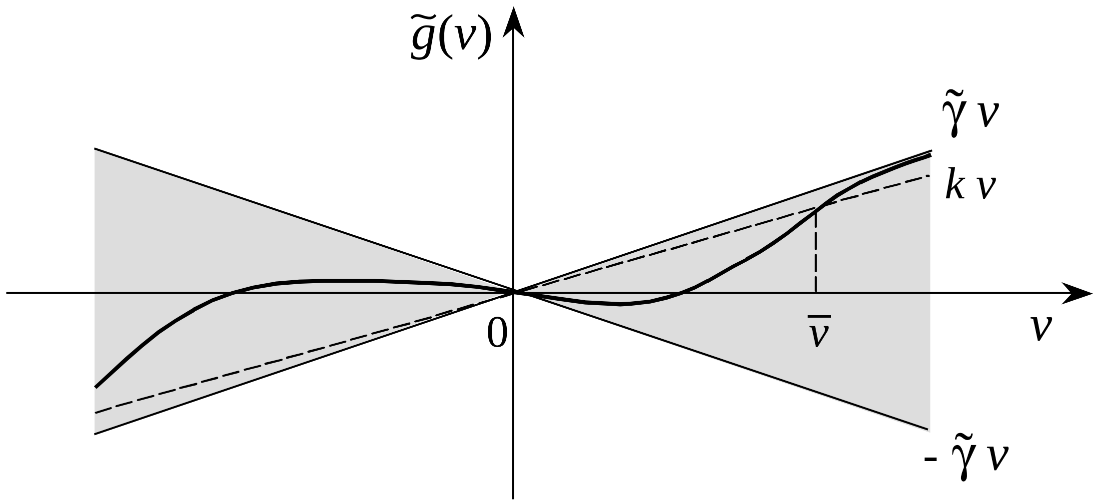
quindi:

$$\frac{\|G(u)\|_\infty}{\|u\|_\infty} \le \tilde{\gamma} \;.$$

In vista della definizione di $\tilde{\gamma}$, per ogni $\varepsilon>0$ esistono:

$$k \in (\tilde{\gamma} - \varepsilon, \tilde{\gamma}) \qquad \text{e} \qquad \bar{v}$$

tali che: $|\tilde{g}(\bar{v})| = k\,|\bar{v}|$.



Sia quindi: $\bar{u}(t) := \bar{v}, \forall t \in \mathbf{R}^+$. E' evidente che:

$$\frac{\|G(\bar{u})\|_\infty}{\|\bar{u}\|_\infty} = k \;.$$

Pertanto:

$$\gamma_\infty^\circ(G) := \|G\|_\infty := \sup_{u \in \boldsymbol{L}_\infty - \{0\}} \frac{\|G(u)\|_\infty}{\|u\|_\infty} = \tilde{\gamma} \,.$$

$$\left.\begin{array}{l} \|y_0\|_\infty = \beta < \infty \\ \\ \|G\|_\infty = \tilde{\gamma} < \infty \end{array}\right\} \quad H \text{ è un operatore } \boldsymbol{limitato} \text{ in } \boldsymbol{L}_\infty.$$

Ora, sappiamo che:

$$\|H(u)\|_\infty = \|G(u) + y_0\|_\infty \leq \|G(u)\|_\infty + \|y_0\|_\infty \leq \|G\|_\infty \, \|u\|_\infty + \|y_0\|_\infty =$$

$$= \tilde{\gamma} \, \|u\|_\infty + \beta$$

quindi, come già osservato, ogni operatore limitato è anche *debolmente limitato*. Non è detto, però, che il guadagno di H, o anche di G, coincida con il guadagno di G a polarizzazione nulla.

Infatti, se ad esempio la caratteristica ingresso-uscita di S fin qui considerata è anche limitata, cioè se:

$$\sup_{v \in \mathbf{R}} |g(v)| = \beta^* < \infty$$

si ha:

$$\|H(u)\|_\infty = \sup_{t \in \mathbf{R}^+} |y(t)| = \sup_{t \in \mathbf{R}^+} |g(u(t))| \leq \beta^* \quad , \quad \forall u \in \boldsymbol{L}_\infty .$$

Quindi, $\gamma_\infty(H) = 0$. Se inoltre $g(0) = 0$, si ha: $H = G$,

$$\gamma_\infty(G) = 0 < \gamma^{\circ}_\infty(G) = \tilde{\gamma} .$$

Osservazione
Se $\mathcal{L} = \boldsymbol{L_p}$, $p < \infty$, e $g(0) \neq 0$, l'operatore H non è limitato, neppure debolmente ($y_0 \notin \boldsymbol{L_p}$).

"*Compito a casa*": Supponendo che sia: $g(v) = sgn(v)$ e $\mathcal{L} = \boldsymbol{L}_\infty$, dimostrare che il guadagno a polarizzazione nulla di G (in tal caso uguale ad H) non esiste, mentre il guadagno di G esiste ed è nullo.

Esempio 2 (*Sistema lineare, tempo-invariante, dinamico in senso proprio, asintoticamente stabile*)

$$S: \quad \begin{cases} \dot{x} = A\,x + B\,u \quad , \qquad x(0) = x_0 \in \mathbf{R}^n \\ y = C\,x \end{cases}$$

$$Re[\lambda_i(A)] < 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots , n \ .$$

$$y(t) = C\,e^{At}\,x_0 + C\int_0^t e^{A(t-\tau)}\,B\,u(\tau)\,d\tau = y_0(t) + \int_0^t g(t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau \quad , \forall u \in \mathsf{L}_e$$

$$S: \qquad y = H(u) = G(u) + y_0 \in \mathsf{L}_e \quad , \quad \forall u \in \mathsf{L}_e$$

$$G(u) := g * u \quad (\textit{prodotto di convoluzione}) \quad ; \quad g(t) = C\,e^{At}B \ \Rightarrow \ g \in \boldsymbol{L}_1$$

Poniamo:

$$k_1 := \|g\|_1 = \int_0^\infty |g(t)|\,dt \ < \infty$$

$$\beta := \|y_0\|_\infty = \sup_{t \in \mathbf{R}^+} |y_0(t)| \ < \infty$$

Norma indotta di G

$$\|G\| := \sup_{u \in \mathsf{L} - \{0\}} \frac{\|G(u)\|}{\|u\|} \underset{\uparrow}{=} \sup_{\|u\| = 1} \|G(u)\|$$

per la linearità di G

***Caso* L *=* $\boldsymbol{L}_\infty$**

$$\|G\|_\infty = \sup_{\|u\|_\infty = 1} \|G(u)\|_\infty = \sup_{\|u\|_\infty = 1} \sup_{t \geq 0} \left| \int_0^t g(t - \tau)\, u(\tau)\, d\tau \right| \leq$$

$$\leq \sup_{\|u\|_\infty = 1} \sup_{t \geq 0} \int_0^t |g(t - \tau)|\, |u(\tau)|\, d\tau \leq \sup_{t \geq 0} \int_0^t |g(t - \tau)|\, d\tau =$$

$$= \sup_{t \geq 0} \int_0^t |g(\tau)|\, d\tau = \int_0^\infty |g(\tau)|\, d\tau = k_1$$

Ora, per concludere che in realtà $\|G\|_\infty = k_1$, basta trovare una successione d'ingressi u_m, con $\|u_m\|_\infty = 1$, tali che

$$\lim_{m \to \infty} \|G(u_m)\|_\infty = k_1 \ .$$

⌈ Sia:

$$u_m(\tau) := sgn(g(m - \tau)) \qquad [u_m(\tau) = 0 \text{ per } \tau \geq m]$$

allora

$$\|G(u_m)\|_\infty = \sup_{t \geq 0} \left| \int_0^t g(t - \tau)\, u_m(\tau)\, d\tau \right| = \sup_{t \in [0, m]} \int_0^t |g(t - \tau)|\, d\tau =$$

$$= \int_0^m |g(\sigma)|\, d\sigma \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{m \to \infty} \|G(u_m)\|_\infty = k_1 \ . \qquad ⌋$$

Dunque, G è un operatore limitato in $\boldsymbol{L}_{\infty e}$ con $\gamma_\infty^\circ(G) = k_1 < \infty$.

Poiché è anche: $\|y_0\|_\infty = \beta < \infty$, anche H è un operatore limitato in $\boldsymbol{L}_{\infty e}$.

Caso $\mathsf{L} = \boldsymbol{L}_2$

Consideriamo innanzitutto l'operatore G (prodotto di convoluzione):

$$z = G(u) \quad \leftrightarrow \quad Z(j\omega) = G(j\omega)\, U(j\omega) \qquad , \qquad \forall u \in \boldsymbol{L}_2$$

Per il teorema di Parseval,

$$\|z\|_2^2 := \int_0^{\infty} z^2(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |Z(j\omega)|^2\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega)|^2\, |U(j\omega)|^2\, d\omega \le$$

$$\le G_{max}^2\, \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |U(j\omega)|^2\, d\omega = G_{max}^2 \int_0^{\infty} u^2(t)\, dt = G_{max}^2\, \|u\|_2^2$$

$$G_{max} := |G(j\Omega)| \ge |G(j\omega)| \quad , \quad \forall \omega \in \mathbf{R}^+ .$$

$$\|G\|_2 := \sup_{\|u\|_2 = 1} \|G(u)\|_2 = \sup_{\|u\|_2 = 1} \|z\|_2 \le G_{max}$$

Ancora una volta, per giungere alla conclusione che $\|G\|_2 = G_{max}$ basta individuare una successione di segnali d'ingresso a norma unitaria in $\boldsymbol{L}_2$ tali che la norma $\boldsymbol{L}_2$ delle uscite corrispondenti tenda a G_{max} .

⌈ Una successione con questi connotati è data da:

$$u_\alpha(t) = M(\alpha)\; e^{-\alpha t^2} cos(\Omega t) \quad , \quad M(\alpha) := \left(\int_0^{\infty} \left(e^{-\alpha t^2} cos(\Omega t)\right)^2 dt \right)^{-1/2}$$

infatti,

$$\lim_{\alpha \to 0} \|G(u_\alpha)\|_2 = \ \dots = G_{max} \ .$$ ⌋

Operatori causali affini

Un operatore causale $H : \mathrm{L}_e \to \mathrm{L}_e$ è detto *affine* se l'operatore non polarizzato ad esso associato è lineare; cioè se: $H(\cdot) = G(\cdot) + y_0$ e G è un operatore lineare.

***Teorema* 1**

Un operatore causale affine debolmente limitato è limitato e

$$\gamma(H) = \gamma^{\circ}(G) .$$

$\triangle$

La dimostrazione fa uso di un risultato enunciato qui come Lemma 1.

***Lemma* 1**

Se H è un operatore causale affine debolmente limitato

$$\gamma(H) \geq \frac{\|G(u)\|}{\|u\|} \quad , \quad \forall u \in \mathrm{L} - \{0\} .$$

Prova. Se H è un operatore causale affine debolmente limitato, esistono $\gamma(H), \beta \in \mathbf{R}^+$ tali che

$$\|H(u)\| \leq \gamma(H)\, \|u\| + \beta \quad , \quad \forall u \in \mathrm{L} .$$

In particolare, $\|H(0)\| \leq \beta < \infty$. Inoltre, per ogni $u \in \mathrm{L} - \{0\}$ e $\alpha > 0$,

$$\lim_{\alpha \to \infty} \frac{\|H(\alpha\, u)\|}{\|\alpha\, u\|} \leq \lim_{\alpha \to \infty} \frac{\gamma(H)\, \|\alpha\, u\| + \beta}{\|\alpha\, u\|} = \gamma(H) + \lim_{\alpha \to \infty} \frac{\beta}{\alpha\, \|u\|} =$$

$$= \gamma(H) .$$

Memo: $a, b \in \mathrm{L}$, $c = a + b \;\Rightarrow\; \|a\| - \|b\| \leq \|c\| \leq \|a\| + \|b\|$
$(a = c - b \;\Rightarrow\; \|a\| \leq \|c\| + \|b\|)$

Partendo dal centro, si noti che:

$$\frac{\|G(u)\|}{\|u\|} - \frac{\|y_0\|}{\|\alpha\, u\|} = \frac{\|G(\alpha\, u)\| - \|y_0\|}{\|\alpha\, u\|} \leq$$

$$\leq \frac{\|H(\alpha\, u)\|}{\|\alpha\, u\|} \leq$$

$$\leq \frac{\|G(\alpha\, u)\| + \|y_0\|}{\|\alpha\, u\|} = \frac{\|G(u)\|}{\|u\|} + \frac{\|y_0\|}{\|\alpha\, u\|}$$

quindi, per α che tende all'infinito, si ottiene:

$$\frac{\|G(u)\|}{\|u\|} \leq \lim_{\alpha \to \infty} \frac{\|H(\alpha\, u)\|}{\|\alpha\, u\|} \leq \frac{\|G(u)\|}{\|u\|} .$$

Prova del Teorema 1. Se H è un operatore causale affine debolmente limitato, dal Lemma 1 segue che:

$$\gamma(H) \geq \frac{\|G(u)\|}{\|u\|} \quad , \quad \forall u \in \mathrm{L} - \{0\} ;$$

quindi, G è limitato e $\gamma(H) \geq \gamma°(G) := \|G\|$.

D'altronde, $H(u) = G(u) + y_0$ implica:

$$\|H(u)\| \leq \|G(u)\| + \|y_0\| \leq \gamma°(G)\, \|u\| + \|y_0\| \quad , \quad \forall u \in \mathrm{L}$$

quindi, per la definizione di guadagno, $\gamma(H) \leq \gamma°(G)$. La conclusione non può che essere: $\gamma(H) = \gamma°(G)$.

Stabilità ingresso-uscita (*stabilità* $\mathcal{L}$)

- E' essenzialmente "di sistema"
- Riguarda sistemi dinamici e non
- Dipende da $\mathcal{L}$ (se $\mathcal{L} = \boldsymbol{L}_p$, dipende da p)

Definizione (*Stabilità* $\mathcal{L}$)

Un operatore causale $H : \mathcal{L}_e \to \mathcal{L}_e$ è $\mathcal{L}$-stabile se $H(\mathcal{L}) \subseteq \mathcal{L}$; cioè se:

$$H(u) \in \mathcal{L} \quad , \quad \forall u \in \mathcal{L} .$$

- $\mathcal{L} = \boldsymbol{L}_\infty \Rightarrow$ stabilità "*bibo*"

Il teorema che segue mette in luce una proprietà equivalente, che alcuni autori amano adottare come definizione.

***Teorema* 2**

Un operatore causale $H : \mathcal{L}_e \to \mathcal{L}_e$ è $\mathcal{L}$-stabile se e solo se esistono una funzione continua e crescente $\sigma(\cdot) : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$, con $\sigma(0) = 0$, e una costante $\beta \in \mathbf{R}^+$ tali che:

$$\|H(u)\| \leq \sigma(\|u\|) + \beta \quad , \quad \forall u \in \mathcal{L} .$$

Prova. $\Leftarrow$ Immediata.

$\Rightarrow$ Se H è $\mathcal{L}$-stabile, per ogni $\nu \in \mathbf{R}^+$ sia:

$$\zeta(\nu) := \sup_{\substack{\|u\| \leq \nu \\ u \in \mathcal{L}}} \|H(u)\| .$$

Poiché $\zeta(\cdot)$ è una funzione non negativa e non decrescente su $\mathbf{R}^+$, è sempre possibile trovare una costante $\beta \in \mathbf{R}^+$ e una funzione continua e crescente $\sigma(\cdot) : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$, con $\sigma(0) = 0$, tale che:

$$\zeta(\nu) \le \sigma(\nu) + \beta \quad , \quad \forall \nu \in \mathbf{R}^+$$

pertanto:

$$\|H(u)\| \le \zeta(\|u\|) \le \sigma(\|u\|) + \beta \quad , \quad \forall u \in \mathsf{L} \ .$$

Corollario del Teorema 2 (*Stabilità degli operatori limitati*)

Un operatore causale $H : \mathsf{L}_e \to \mathsf{L}_e$ debolmente limitato è L-stabile.

Osservazione. Non è vero il contrario.

Alla stabilità ingresso-uscita è possibile dare un significato ***locale***, più debole ma di più facile soddisfacimento.

Definizione (L*-stabilità "in piccolo"*)

Un operatore causale $H : \mathsf{L}_e \to \mathsf{L}_e$ è b-L*-stabile*, con $b > 0$, se

$$H(u) \in \mathsf{L} \quad , \quad \forall u \in \mathsf{L}_b := \{u \in \mathsf{L} : \|u\|_\infty \le b\} \ .$$

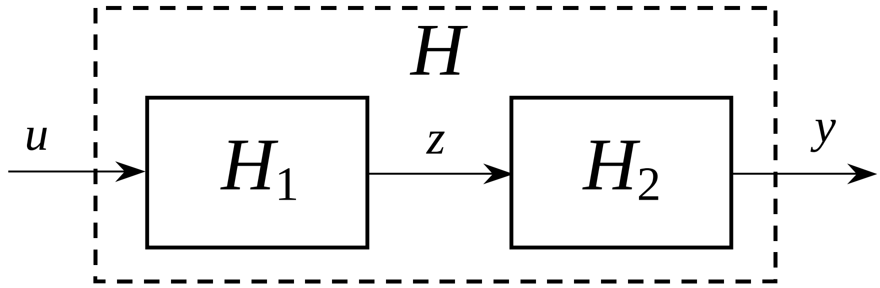
Stabilità ingresso-uscita e stabilità alla Liapunov

Un problema che è stato ed è oggetto di molti studi consiste nello stabilire connessioni tra (forme di) stabilità ingresso-uscita e (forme di) stabilità alla Liapunov. Risultati scarsi. Eccezione: *sistemi lineari tempo-invarianti*.

- Se un sistema dinamico S lineare e tempo-invariante è asintoticamente stabile, l'operatore H ad esso associato è $\boldsymbol{L_p}$-stabile per ogni p (finito o infinito).
- Viceversa, se H è $\boldsymbol{L_p}$-stabile, con $p > 0$ finito o infinito, allora S è asintoticamente stabile se e solo se è *stabilizzabile*.

Stabilità di sistemi interconnessi: serie, parallelo, retroazione

1) *Connessione in serie* (*o in cascata*)



$$H_i : \mathcal{L}_e \rightarrow \mathcal{L}_e \quad , \quad i = 1, 2$$

***Teorema* 3**

Due operatori H_1 e H_2 causali e debolmente limitati, connessi in serie danno luogo ad un operatore causale e debolmente limitato

$$H := H_2 \otimes H_1 \qquad \leftrightarrow \qquad y = H(u) = H_2(H_1(u))$$

$$\gamma(H) \leq \gamma(H_1)\, \gamma(H_2) \,.$$

In particolare, se:

$$\|H_i(v)\| \leq \gamma_i \|v\| + \beta_i \quad , \quad \forall v \in \mathcal{L} \quad ; \quad i = 1, 2; \quad \gamma_i, \beta_i \in \mathbf{R}^+ \;\; ;$$

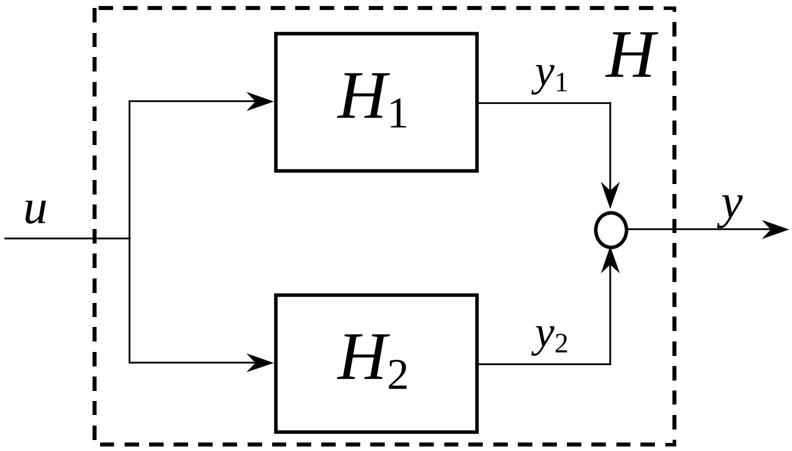
allora:

$$\|H(v)\| \leq \gamma \|v\| + \beta \quad , \quad \forall v \in \mathcal{L} \quad ,$$

dove: $\gamma = \gamma_1 \gamma_2$, $\beta = \gamma_2 \beta_1 + \beta_2$.

<u>*Esempio*</u>. Sistemi lineari tempo-inv. as. st., $\mathcal{L} = \boldsymbol{L}_2$, $\mathcal{G}_{max} \leq \mathcal{G}_{1max}\, \mathcal{G}_{2max}$

2) *Connessione in parallelo*



$$H_i : \mathsf{L}_e \rightarrow \mathsf{L}_e \quad , \quad i = 1, 2$$

***Teorema* 4**

Due operatori H_1 e H_2 causali e debolmente limitati, connessi in parallelo danno luogo ad un operatore causale e debolmente limitato

$$H := H_1 \oplus H_2 \qquad \leftrightarrow \qquad y = H(u) = H_1(u) + H_2(u)$$

$$\gamma(H) \leq \gamma(H_1) + \gamma(H_2)$$

In particolare, se:

$$\|H_i(v)\| \leq \gamma_i \, \|v\| + \beta_i \quad , \quad \forall v \in \mathsf{L} \quad ; \quad i = 1, 2; \quad \gamma_i, \beta_i \in \mathbf{R}^+ \ ;$$

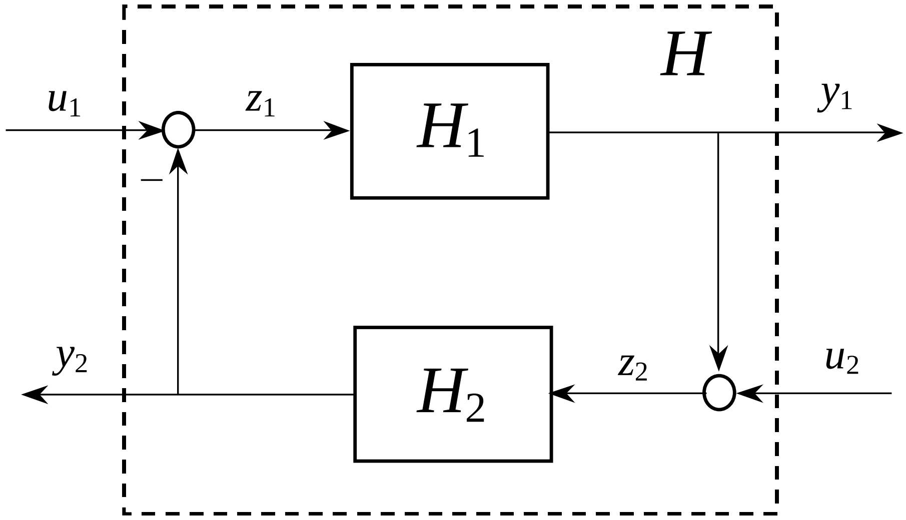
allora:

$$\|H(v)\| \leq \gamma \, \|v\| + \beta \quad , \quad \forall v \in \mathsf{L} \quad ,$$

dove: $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, $\beta = \beta_1 + \beta_2$.

La *dimostrazione* dei Teoremi 3 e 4 è suggerita al lettore come esercizio.

2) *Connessione in retroazione*



$$H_i : \mathsf{L}_e \rightarrow \mathsf{L}_e \quad , \quad i = 1, 2$$

♣ Una questione non banale: H è *ben posto*?

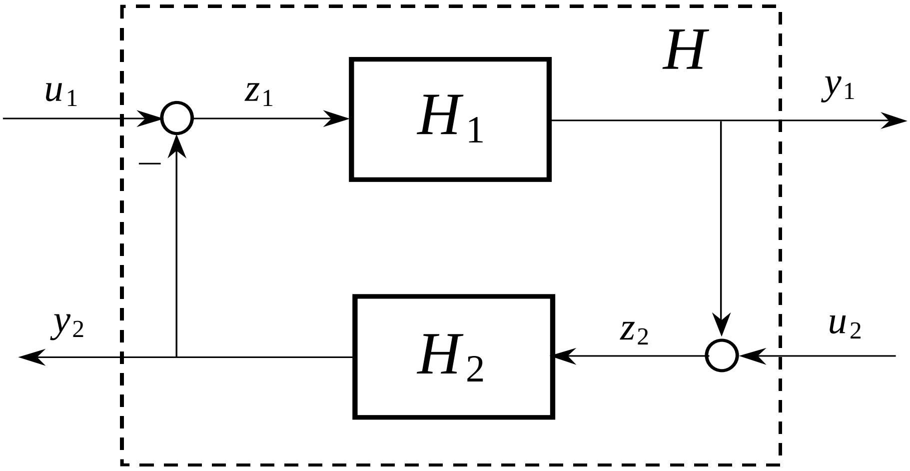
La coppia (y_1, y_2) esiste ed è unica per ogni $(u_1, u_2) \in \mathsf{L}_e \times \mathsf{L}_e$?

- Sappiamo che se i due operatori sono causali e uno dei due corrisponde a un sistema dinamico in senso proprio, H è ben posto e causale.

♣ Finora abbiamo considerato sistemi (operatori) a un ingresso e un'uscita. L'operatore H ha due ingressi e due uscite. Possiamo avvalerci di quanto fatto fin qui, senza procedere a (per altro concettualmente semplici) generalizzazioni formali, fissando l'attenzione sulle relazioni esistenti fra ogni ingresso e ogni uscita. Più precisamente, sugli operatori

$$H_{ij} \quad \text{da} \quad u_j \quad \text{a} \quad y_i \quad , \quad i, j = 1, 2 \ ,$$

che compongono H.



$$H_i : \mathsf{L}_e \rightarrow \mathsf{L}_e \quad , \quad i = 1, 2$$

***Teorema* 5** *Teorema del piccolo guadagno*

Sia H un operatore causale ben posto risultante dalla connessione in retroazione di due operatori H_1 e H_2 causali e debolmente limitati. Se

$$\lambda := \gamma(H_1)\,\gamma(H_2) < 1$$

allora H è debolmente limitato; esistono, cioè, $\hat{\gamma}_{i1}, \hat{\gamma}_{i2}, \hat{\beta}_i \in \mathbf{R}^+$, $i = 1, 2$, tali che:

$$\|y_i\| \le \hat{\gamma}_{i1}\,\|u_1\| + \hat{\gamma}_{i2}\,\|u_2\| + \hat{\beta}_i$$

per ogni $u_1, u_2 \in \mathsf{L}$. Inoltre:

$$\gamma(H_{11}) \le \frac{\gamma(H_1)}{1-\lambda} \quad , \quad \gamma(H_{22}) \le \frac{\gamma(H_2)}{1-\lambda} \quad , \quad \gamma(H_{12}), \gamma(H_{21}) \le \frac{\lambda}{1-\lambda} \ .$$

In particolare, se $\gamma_i, \beta_i \in \mathbf{R}^+$ sono tali che:

$$\|y_i\| = \|H_i(z_i)\| \le \gamma_i\,\|z_i\| + \beta_i \quad , \quad \forall z_i \in \mathsf{L} \quad ; \quad i = 1, 2;$$

e $\gamma_1\,\gamma_2 < 1$, allora:

$$\|y_1\| \le \frac{1}{1-\gamma_1\,\gamma_2}\left(\gamma_1\,\|u_1\| + \gamma_1\,\gamma_2\,\|u_2\| + \beta_1 + \gamma_1\,\beta_2\right)$$

$$\|y_2\| \leq \frac{1}{1-\gamma_1\gamma_2}\left(\gamma_1\,\gamma_2\,\|u_1\| + \gamma_2\,\|u_2\| + \gamma_2\,\beta_1 + \beta_2\right)$$

per ogni $u_1, u_2 \in \mathrm{L}$.

Prova. Se H_1 e H_2 sono operatori causali (debolmente) limitati e H è un operatore ben posto, allora, per ogni $u_1, u_2, z_1, z_2 \in \mathrm{L}_e$ ed ogni $\tau \in \mathbf{R}^+$, si ha:

$$\|y_{1\tau}\| \leq \gamma_1\,\|z_{1\tau}\| + \beta_1 \leq \gamma_1\,(\|u_{1\tau}\| + \|y_{2\tau}\|) + \beta_1 \leq$$

$$\leq \gamma_1\,\|u_{1\tau}\| + \gamma_1\,(\gamma_2\,\|z_{2\tau}\| + \beta_2) + \beta_1 \leq$$

$$\leq \gamma_1\,\|u_{1\tau}\| + \gamma_1\,\gamma_2\,(\|u_{2\tau}\| + \|y_{1\tau}\|) + \gamma_1\,\beta_2 + \beta_1 \,.$$

Pertanto, se $\gamma_1\,\gamma_2 < 1$ e $u_1, u_2 \in \mathrm{L}$, si può concludere che:

$$\|y_1\| \leq \frac{1}{1-\gamma_1\gamma_2}\left(\gamma_1\,\|u_1\| + \gamma_1\,\gamma_2\,\|u_2\| + \beta_1 + \gamma_1\,\beta_2\right),$$

e, simmetricamente:

$$\|y_2\| \leq \frac{1}{1-\gamma_1\gamma_2}\left(\gamma_1\,\gamma_2\,\|u_1\| + \gamma_2\,\|u_2\| + \gamma_2\,\beta_1 + \beta_2\right).$$

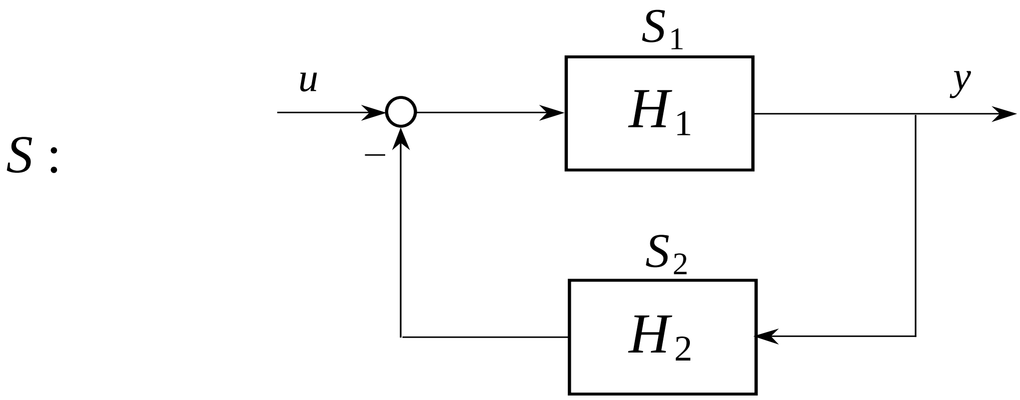
Sia ora:

$$f_1(\gamma_1, \gamma_2) := \frac{\gamma_1}{1-\gamma_1\gamma_2} \quad , \quad f_2(\gamma_1, \gamma_2) := \frac{\gamma_2}{1-\gamma_1\gamma_2} \quad , \quad f_{12}(\gamma_1, \gamma_2) := \frac{\gamma_1\gamma_2}{1-\gamma_1\gamma_2}\,.$$

Poiché in ogni punto della regione in cui $\gamma_1\,\gamma_2 < 1$ queste sono funzioni crescenti tanto rispetto a γ_1 quanto rispetto a γ_2 , si può affermare che:

$$\gamma(H_{11}) \leq \frac{\gamma(H_1)}{1-\lambda} \quad , \quad \gamma(H_{22}) \leq \frac{\gamma(H_2)}{1-\lambda} \quad , \quad \gamma(H_{12}), \gamma(H_{21}) \leq \frac{\lambda}{1-\lambda}\,.$$

Esempio* 3: *Sistema di Lur'e



S_1 : Sistema lineare, tempo-invariante, asintoticamente stabile, dinamico in senso proprio, con funzione di trasferimento $G(s)$.

$$\gamma(H_1) = \gamma^\circ(G_1) = \begin{cases} \max\limits_{\omega \geq 0} |G(j\omega)| := G_{max} & , \quad \text{se} \quad \mathsf{L} = \boldsymbol{L}_2 \\ \int_0^\infty |g(t)|\, dt := k_1 & , \quad \text{se} \quad \mathsf{L} = \boldsymbol{L}_\infty \end{cases}$$

S_2 : Sistema non dinamico con caratteristica $\varphi(\cdot)$ nel settore $[-k, k]$:

$$|\varphi(v)| \leq k\,|v| \quad \Leftrightarrow \quad \varphi^2(v) \leq k^2 v^2 \quad , \quad \forall v \in \mathbf{R}$$

Se $\mathsf{L} = \boldsymbol{L}_\infty$, $\gamma(H_2) \leq k$ (*Esempio* 1: $\gamma(H_2) \leq \gamma^\circ(H_2) = \tilde{\gamma} \leq k$)

Se $\mathsf{L} = \boldsymbol{L}_2$,

$$\|H_2(u)\|_2^2 := \int_0^\infty \varphi^2(u(t))\, dt \leq \int_0^\infty k^2 u^2(t)\, dt = k^2 \|u\|_2^2 \quad , \quad \forall u \in \boldsymbol{L}_2 \,;$$

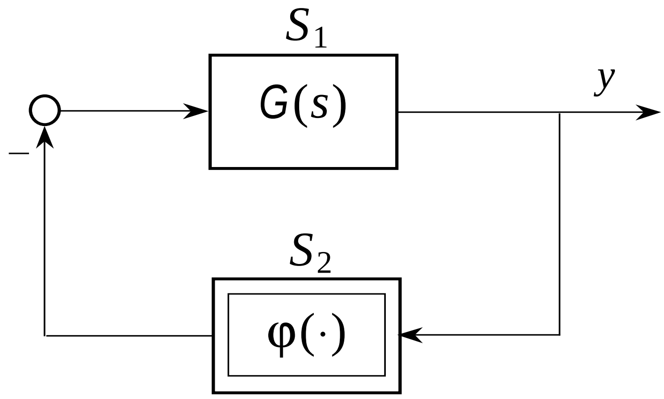
quindi: $\gamma(H_2) \leq k$ anche per $\mathsf{L} = \boldsymbol{L}_2$

(in generale è così per $\mathsf{L} = \boldsymbol{L}_p$).

Criterio del cerchio (in forma di Liapunov) (Cap.1)

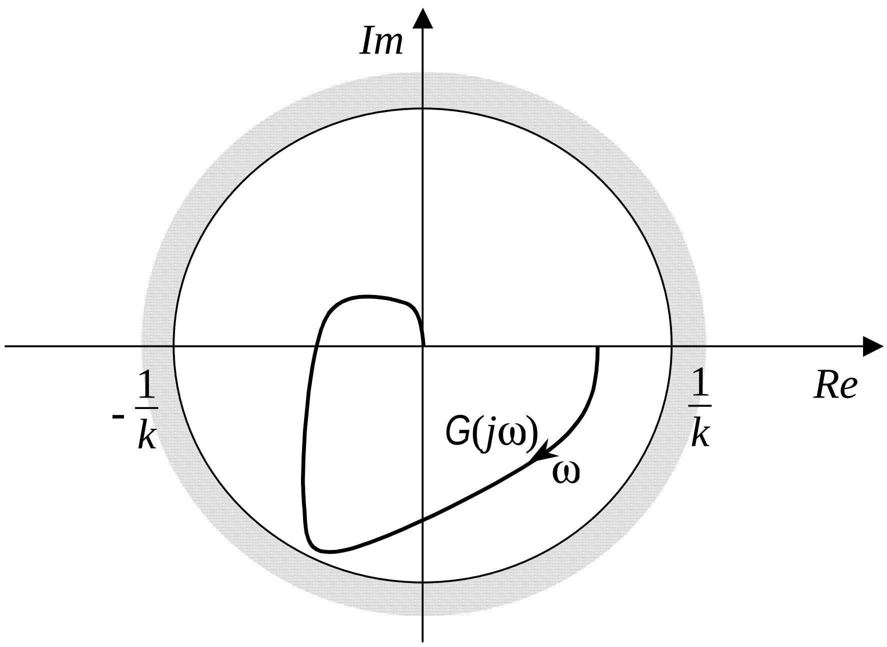
***a*) *Sistema di Lur'e autonomo*:** Assoluta stabilità nel settore [-*k*, *k*]

S :



Condizione necessaria $\Rightarrow$ S_1 asintoticamente stabile

Condizione sufficiente (*criterio del cerchio*)

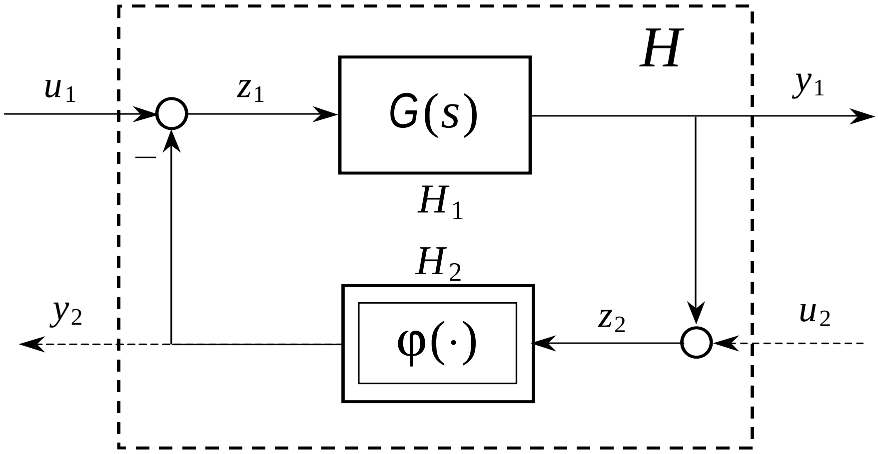


♣ S è assolutamente stabile nel settore [-*k*, *k*] se:

$$G_{max} < 1/k \quad \Leftrightarrow \quad k\, G_{max} < 1$$

Sistema di Lur'e: *Teorema del piccolo guadagno*

S_e :



- Il sistema S_e (l'operatore H) è $\boldsymbol{L}_2$-stabile ($u_1, u_2 \in \boldsymbol{L}_2 \Rightarrow y_1, y_2 \in \boldsymbol{L}_2$) qualunque sia la caratteristica $\varphi(\cdot)$ nel settore $[-k, k]$ se

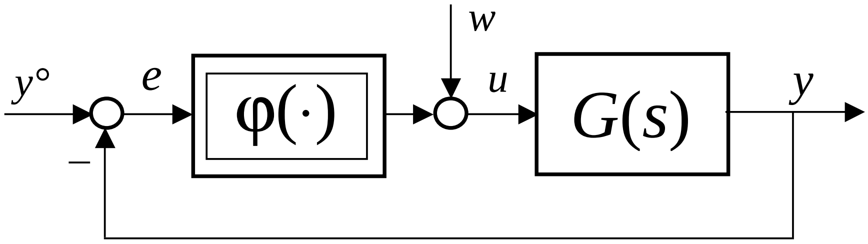
$$k\, G_{max} < 1.$$

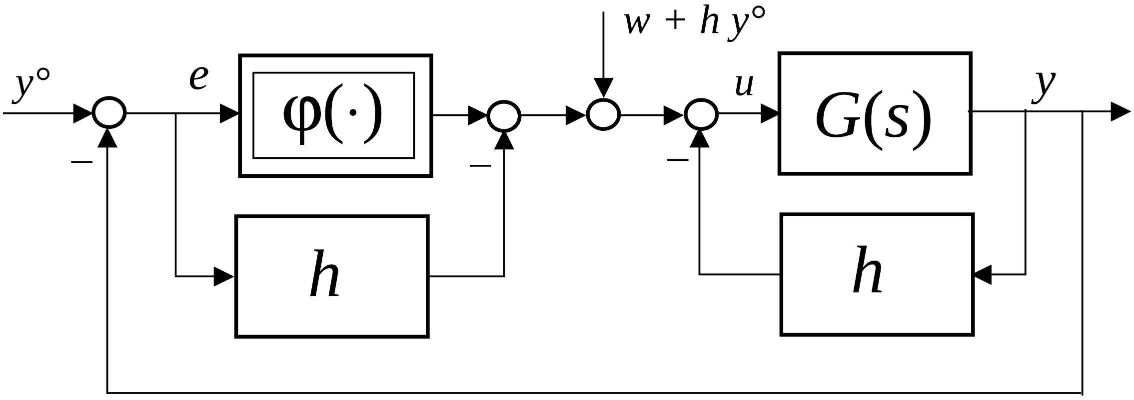
- Il sistema S_e (l'operatore H) è $\boldsymbol{L}_\infty$-stabile ("bibo-stabile") se

$$k\, k_1 < 1 \qquad \left(k_1 := \|g(\cdot)\|_1 \right).$$

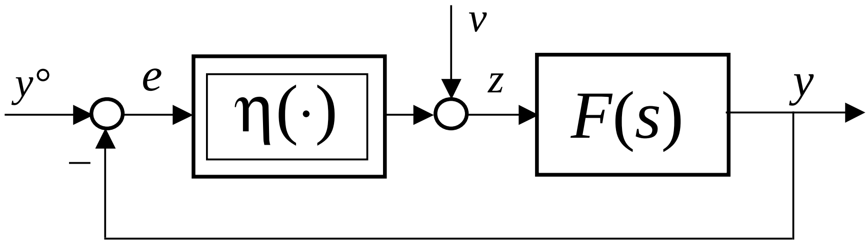
***Stabilità** L_2 **nel settore** $[k_1, k_2]$*

S :





S^* :



$$\eta(e) := \varphi(e) - h\,e \quad , \quad F(s) := \frac{G(s)}{1 + h\,G(s)}$$

$$h := \frac{k_1 + k_2}{2} \quad , \quad k := \frac{k_2 - k_1}{2}$$

$$\boxed{\varphi(\cdot) \in \Phi_{[k_1,\, k_2]} \quad \Leftrightarrow \quad \eta(\cdot) \in \Phi_{[-k,\, k]}}$$

Conclusione “intermedia”. Il sistema S è $\boldsymbol{L}_2$-stabile per ogni $\varphi(\cdot)$ nel settore $[k_1, k_2]$ se e solo se il sistema S^* è $\boldsymbol{L}_2$-stabile per ogni $\eta(\cdot)$ nel settore $[-k, k]$.

MEMO:

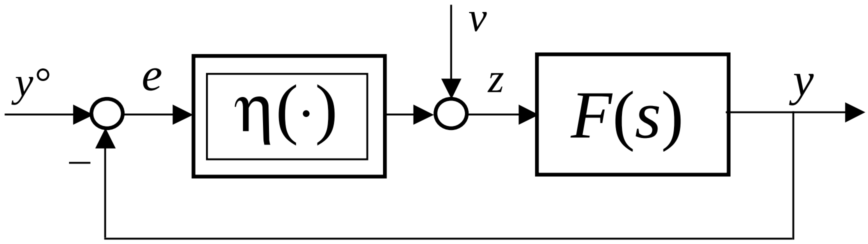
Il ***Teorema del piccolo guadagno***

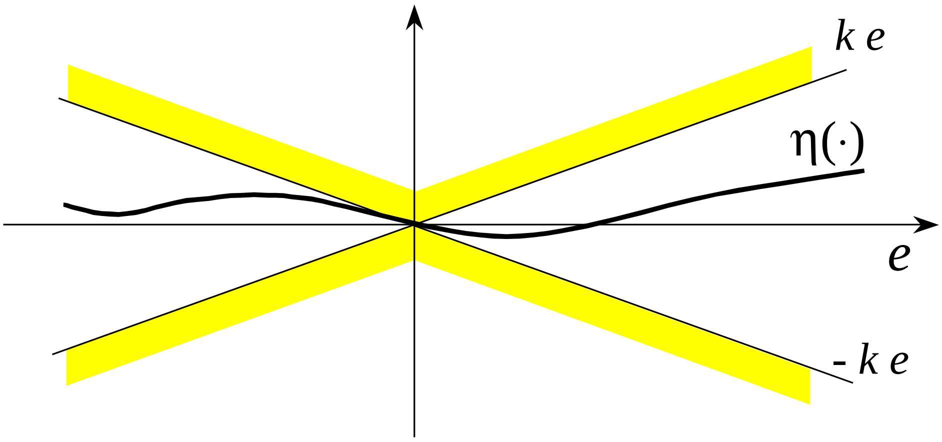
applicato al ***sistema di Lur'e***,

nel caso $\mathcal{L} = \boldsymbol{L}_2$,

ci aveva portato a trarre la seguente ***conclusione*****:**

S^* :



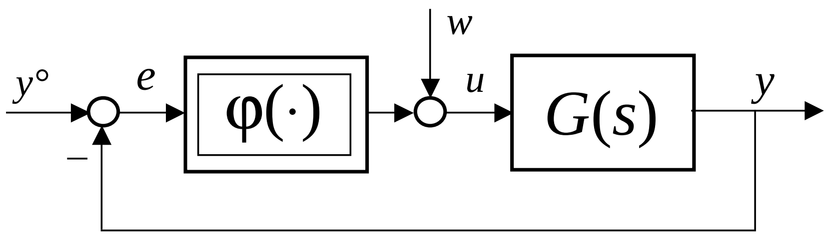


Il sistema S^* è $\boldsymbol{L}_2$-stabile per ogni $\eta(\cdot)$ nel settore $[-k, k]$ se $F(s)$ descrive un sistema asintoticamente stabile e

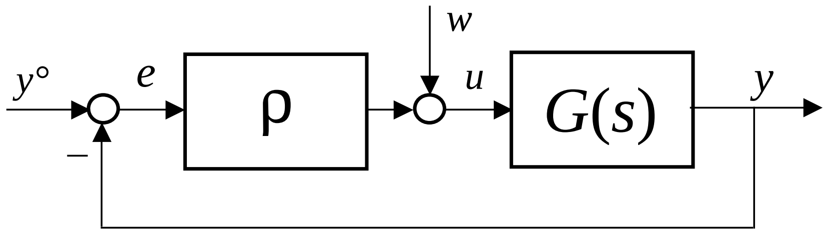
$$F_{max} < \frac{1}{k}\,.$$

Tornando ora al sistema S …

$S:$



$S_L:$



Condizione necessaria

Se S è $\boldsymbol{L}_2$-stabile per ogni $\varphi(\cdot) \in \Phi_{[k_1,\ k_2]}$, allora S_L è $\boldsymbol{L}_2$-stabile (asintoticamente stabile) per ogni $\rho \in [k_1, k_2]$; quindi il diagramma di Nyquist di $G(s)$ compie tanti giri attorno al segmento $[-1/k_1, -1/k_2]$ quanti sono i poli di $G(s)$ con parte reale positiva.

Osservazione. Se S soddisfa la condizione necessaria, i poli di $F(s)$ in S^* hanno parte reale negativa. Infatti, $h = (k_1 + k_2)/2 \in [k_1, k_2]$.

***Teorema* 6 (*Criterio del cerchio per la stabilità* L_2 *del sistema di Lur'e*)**

Il sistema S è $\boldsymbol{L}_2$-stabile per ogni $\varphi(\cdot) \in \Phi_{[k_1,\ k_2]}$ se il numero di giri che il diagramma di Nyquist di $G(s)$ compie attorno a $O_{[k_1,\ k_2]}$ (cerchio con centro sull'asse reale passante per i punti $-1/k_1$ e $-1/k_2$) è uguale al numero di poli di $G(s)$ con parte reale positiva.

Prova. Se il numero di giri che il diagramma di Nyquist di $G(s)$ compie attorno a $O_{[k_1,\ k_2]}$ è uguale al numero di poli di $G(s)$ con parte reale positiva, è soddisfatta la condizione necessaria; quindi, i poli di $F(s)$ in S^* hanno parte reale negativa. In particolare, se il diagramma di Nyquist di $G(s)$ è esterno a $O_{[k_1,\ k_2]}$, allora, in vista della trasformazione $F = G/(1 + h\,G)$ con $h := (k_1 + k_2)/2$, il diagramma di Nyquist di $F(s)$ è interno alla circonferenza di raggio $1/k$, con $k := (k_2 - k_1)/2$, e centro l'origine. Per il teorema del piccolo guadagno, S^* è $\boldsymbol{L}_2$-stabile per ogni $\eta(\cdot) \in \Phi_{[-k,\ k]}$ e quindi S è $\boldsymbol{L}_2$-stabile per ogni $\varphi(\cdot) \in \Phi_{[k_1,\ k_2]}$.

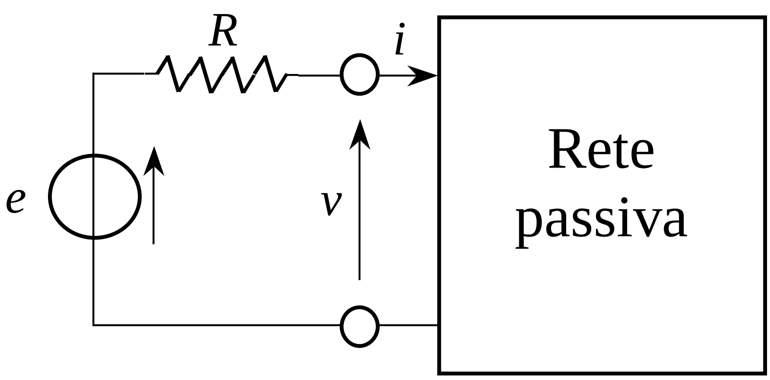
SISTEMI E OPERATORI PASSIVI

Introduzione

In fisica, sono *passivi* i sistemi privi di elementi che emettono energia.

I sistemi fisicamente passivi hanno comportamenti spesso assimilabili ad una qualche forma di "stabilità"; inoltre, connettendo sistemi fisicamente passivi si ottengono sistemi fisicamente passivi.

Un esempio

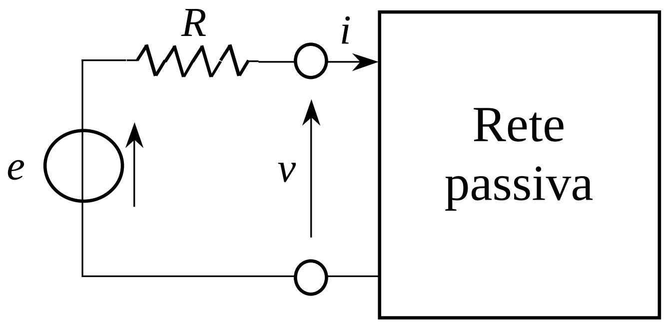


Supponiamo che la rete passiva sia "inizialmente scarica"; sia nulla, cioè, nell'istante $t = 0$, l'energia presente (nei condensatori e negli induttori).

Consideriamo la f.e.m. e come ingresso del sistema, la corrente i o la tensione v o entrambe come uscita ($u = e$, $y = i$ oppure $y = v$ oppure ancora $y = [v \quad i]'$).

Qualunque sia l'andamento $e(\cdot)$: $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, è evidente che, in ogni intervallo $[0,\ t)$, l'energia complessivamente assorbita dalla rete non potrà essere negativa (la rete non può cedere un'energia che non ha):

$$\mathsf{E}(t) := \int_0^t v(t)\, i(t)\, dt \ \geq 0 \quad , \quad \forall t \geq 0 \ .$$



$$\boxed{\int_0^t v(t)\, i(t)\, dt \ \geq 0 \quad , \forall t \geq 0}$$

In particolare, se $e(\cdot) \in \boldsymbol{L}_2$, si può fare ***un'osservazione interessante***.

$$\infty > \|e\|_2^2 := \int_0^\infty e^2(t)\, dt = \int_0^\infty [v(t) + R\, i(t)]^2\, dt =$$

$$= \int_0^\infty [v^2(t) + R^2\, i^2(t) + 2\, R\, v(t)\, i(t)]\, dt =$$

$$= \|v\|_2^2 + R^2\, \|i\|_2^2 + 2\, R \int_0^\infty v(t)\, i(t)\, dt \ \geq \ \|v\|_2^2 + R^2\, \|i\|_2^2 \ .$$

Quindi: $u := e \in \boldsymbol{L}_2 \Rightarrow i, v \in \boldsymbol{L}_2$ (se $y = i$, oppure $y = v$, il sistema è descritto da un operatore limitato e quindi $\boldsymbol{L}_2$-stabile: $\|y\|_2^2 \leq \gamma^2\, \|u\|_2^2$, $\gamma = 1/R$ o $\gamma = 1$).

Più in generale, se $y := [v \quad i]'$, si ha:

$\|y\|_2^2 := \|v\|_2^2 + \|i\|_2^2$;

$$\|v\|_2^2 + R^2\, \|i\|_2^2 = \begin{cases} \|v\|_2^2 + \|i\|_2^2 + (R^2 - 1)\, \|i\|_2^2 \geq \|y\|_2^2 & , \text{se } R \geq 1 \\ R^2\, [\|v\|_2^2 + \|i\|_2^2] + (1 - R^2)\, \|v\|_2^2 \geq R^2 \|y\|_2^2 & , \text{se } R < 1 \end{cases}$$

pertanto (ricordando che $u := e$, e ponendo $\gamma := max(1, 1/R)$):

$$\|y\|_2^2 \leq \gamma^2\, [\|v\|_2^2 + R^2\, \|i\|_2^2] \leq \gamma^2\, \|e\|_2^2 := \gamma^2\, \|u\|_2^2 \quad , \quad \forall u \in \boldsymbol{L}_2$$

$$\boxed{\|y\|_2 \leq \gamma\, \|u\|_2 \quad , \quad \forall u \in \boldsymbol{L}_2}$$

L'operatore da u a $y := [v \quad i]'$ è limitato (e quindi $\boldsymbol{L}_2$-stabile).

Sistemi e operatori passivi

La nozione di passività può essere riferita sia ai sistemi, sia agli operatori ingresso-uscita che li rappresentano.

Cominciamo a considerare sistemi S^* descritti da:

$$S^*: \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) & , \quad x(0) = x_0 \in \mathbf{R}^n \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases}$$

- $n = 0 \leftrightarrow$ *sistema non dinamico*: $y(t) = g(u(t))$
- $f(0, 0) = 0 \;,\; g(0, 0) = 0$

Definizione (*Sistema dinamico passivo*)

Il sistema S^*, con $n \geq 1$, è *passivo* se esiste una funzione $V(\cdot)$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ semidefinita positiva e continuamente differenziabile, detta *funzione di accumulo* ("*storage function*"), tale che:

$$u\, y \geq \frac{\partial V}{\partial x}(x)\, f(x, u) + \varepsilon\, u^2 + \delta\, y^2 + \rho\, \psi(x) \quad , \quad \forall (x, u) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$$

con $\varepsilon, \delta, \rho \in \mathbf{R}^+$ e $\psi(\cdot)$ definita positiva.

In particolare, il sistema S^* è detto:

- *conservativo,* se $\varepsilon = \delta = \rho = 0$ e vale il segno di uguaglianza :

$$u\, y = \frac{\partial V}{\partial x}(x)\, f(x, u) \quad , \quad \forall (x, u) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$$

- *strettamente passivo relativamente all'ingresso,* se $\varepsilon > 0$
- *strettamente passivo relativamente all'uscita,* se $\delta > 0$
- *strettamente passivo relativamente allo stato,* se $\rho > 0$

Definizione (*Osservabilità nell'origine*)

Il sistema S^*, con $n \geq 1$, è detto *osservabile nell'origine* se $x(\cdot) = 0$ è l'unico movimento libero di S^* compatibile con uscita nulla; in altri termini, se: $(u(\cdot) = 0,\ y(\cdot) = 0) \Rightarrow x(\cdot) = 0$.

Definizione (*Sistema non dinamico passivo*)

Il sistema S^*, con $n = 0$ (vale a dire: $y(t) = g(u(t))$, per ogni $t \in \mathbf{R}^+$), è *passivo* se:

$$u\, y \geq \varepsilon\, u^2 + \delta\, y^2 \quad , \quad \forall u \in \mathbf{R}$$

con $\varepsilon, \delta \in \mathbf{R}^+$.

***Esempio* 1** (*Sistema non dinamico*)

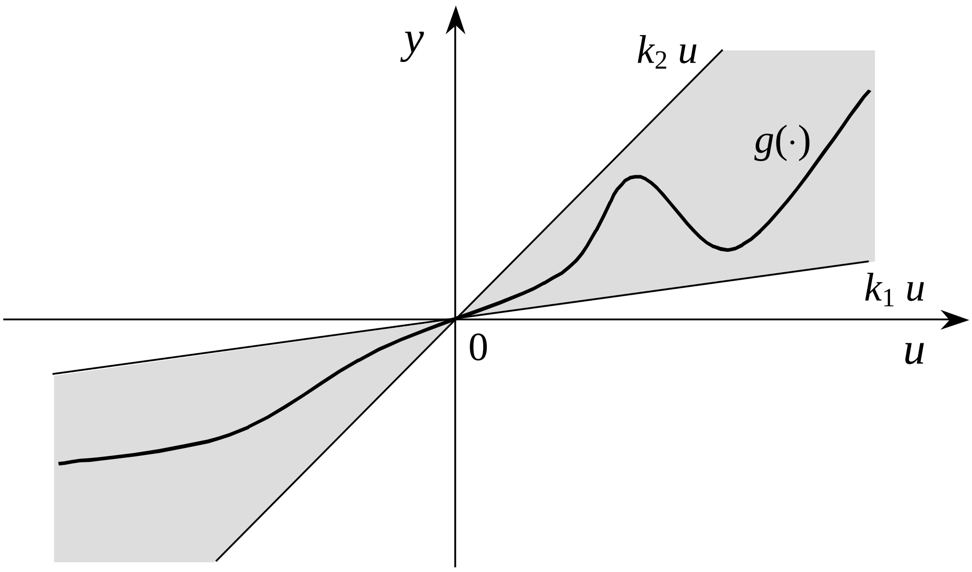
E' facile riconoscere che, pur di porre:

$$\varepsilon = \frac{k_1\, k_2}{k_1 + k_2} \quad , \quad \delta = \frac{1}{k_1 + k_2} \quad ,$$

l'esistenza di $\varepsilon, \delta \in \mathbf{R}^+$ tali che: $u\, y \geq \varepsilon\, u^2 + \delta\, y^2$, $\forall u \in \mathbf{R}$, è *equivalente* all'esistenza di k_1 e k_2, $0 \leq k_1 \leq k_2 \leq \infty$, tali che:

$$(y - k_1\, u)\,(k_2\, u - y) \geq 0 \quad , \quad \forall u \in \mathbf{R}\,.$$

Ma questo equivale a dire: $g(\cdot) \in \Phi_{[k_1,\, k_2]}$.



In particolare, il sistema non dinamico S^* è detto:

- *strettamente passivo relativamente all'ingresso* se: $0 < k_1$ $(\varepsilon > 0)$
- *strettamente passivo relativamente all'uscita* se: $k_2 < \infty$ $(\delta > 0)$

***Esempio* 2** (*Sistema dinamico lineare tempo-invariante asintoticamente stabile*)

S^* : $f(x, u) = A\,x + B\,u$, $g(x, u) = C\,x + D\,u$, $n \geq 1$;

$$(A, B) \textit{ raggiungibile} \quad , \quad (A, C) \textit{ osservabile}$$

$$Re[\lambda_i(A)] < 0 \qquad , \qquad G(s) = C\,(s\,I - A)^{-1}\,B + D \ .$$

***Proposizione* 1.** S^* è strettamente passivo relativamente allo stato se:

$$Re[G(j\omega)] \geq \alpha > 0 \quad , \quad \forall \omega \geq 0 \ ,$$

e quindi $G(\cdot)$ è strettamente reale positiva.

La prova si basa sul *Lemma di Kalman-Yakubovic-Popov* (v. Cap.1) secondo il quale $G(\cdot)$ è strettamente reale positiva se e solo se esistono: una matrice $P \in \mathbf{R}^{n \times n}$ simmetrica e definita positiva, un vettore $L \in \mathbf{R}^n$, una costante $w \in \mathbf{R}$ e una costante positiva $\varepsilon > 0$ tali che:

$$\begin{aligned} &P\,A + A'\,P = -L\,L' - \varepsilon\,P \\ &P\,B = C' - w\,L' \\ &2\,D = w^2 \quad . \end{aligned}$$

Se $G(\cdot)$ è strettamente reale positiva, prendiamo dunque come possibile funzione d'accumulo:

$$V(x) = \frac{1}{2}\,x'\,P\,x$$

allora →

$$\boxed{\begin{array}{l} P\,A + A'\,P = -L\,L' - \varepsilon\,P \\ P\,B = C' - w\,L' \\ 2\,D = w^2 \end{array}}$$

$$u\,y - \frac{\partial V}{\partial x}(x)\,f(x, u) = u\,(C\,x + D\,u) - x'\,P\,(A\,x + B\,u) =$$

$$= u\,C\,x + D\,u^2 - \frac{1}{2}\,x'(P\,A + A'\,P)\,x - x'\,P\,B\,u =$$

$$= u\,(B'\,P + w\,L')\,x + \frac{1}{2}\,(w^2\,u^2 + x'L\,L'\,x + \varepsilon\,x'P\,x) - u\,B'P\,x =$$

$$= \frac{1}{2}\,[(L'\,x + w\,u)^2 + \varepsilon\,x'P\,x] \geq \frac{1}{2}\,\varepsilon\,x'P\,x \quad , \quad \forall (x, u) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}\,.$$

***Esempio* 3** (*Sistema dinamico affine nel controllo*)

***S** :** $\quad f(x, u) = \alpha(x) + \beta(x)\,u \quad , \quad g(x, u) = \gamma(x) \quad , \quad n \geq 1\,;$

***Proposizione* 2.** Se è possibile trovare una funzione $V(\cdot)$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ semidefinita positiva e continuamente differenziabile tale che:

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)\,\alpha(x) \leq 0 \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial x}(x)\,\beta(x) = \gamma(x) \quad , \quad \forall x \in \mathbf{R}^n$$

allora S^* è un sistema passivo.

In tal caso infatti:

$$u\,y - \frac{\partial V}{\partial x}(x)\,f(x, u) = u\,y - \frac{\partial V}{\partial x}(x)\,[\alpha(x) + \beta(x)\,u] =$$

$$= u\,\gamma(x) - \frac{\partial V}{\partial x}(x)\,\alpha(x) - \gamma(x)\,u = -\frac{\partial V}{\partial x}(x)\,\alpha(x) \geq 0$$

Se poi $V(\cdot)$ fosse tale che

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)\,\alpha(x) \leq -k\,\gamma^2(x) \ , \ k > 0 \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial x}(x)\,\beta(x) = \gamma(x) \quad , \quad \forall x \in \mathbf{R}^n$$

il sistema S^* sarebbe strettamente passivo relativamente all'uscita.

La dimostrazione è suggerita come esercizio.

***Teorema* 7** (*Passività e stabilità*)

Se il sistema S^*

- è passivo con funzione d'accumulo definita positiva, l'origine x=0 è uno stato di equilibrio stabile (nel senso di Liapunov) del sistema libero ($u(\cdot) = 0$);
- è strettamente passivo relativamente all'uscita ($\delta > 0$), l'operatore ad esso associato H: $\boldsymbol{L}_{2e} \to \boldsymbol{L}_{2e}$ è debolmente limitato e quindi $\boldsymbol{L}_2$-stabile; in particolare, se $x_0 = 0$, $\gamma_2°(H) \leq 1/\delta$;
- è strettamente passivo relativamente all'uscita e osservabile nell'origine, oppure è strettamente passivo relativamente allo stato, in ogni caso con funzione d'accumulo definita positiva, allora l'origine x=0 è uno stato di equilibrio asintoticamente stabile (nel senso di Liapunov) del sistema libero ($u(\cdot) = 0$); se la funzione d'accumulo è anche radialmente illimitata, l'origine è uno stato di equilibrio globalmente stabile del sistema libero.

Prova

- Se S^* è passivo e $u = 0$, $\dot{V}(\cdot)$ è semidefinita negativa; infatti:

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x}(x)\, f(x, 0) \leq -\,\delta\, y^2 - \rho\, \psi(x)\ ;$$

- se S^* è strettamente passivo relativamente all'uscita, allora:

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x}(x)\, f(x, u) \ \leq\ u\, y - \varepsilon\, u^2 - \delta\, y^2 - \rho\, \psi(x) \ \leq\ u\, y - \delta\, y^2 \ =$$

$$= \ -\frac{(u - \delta\, y)^2}{2\,\delta} + \frac{u^2}{2\,\delta} - \frac{\delta\, y^2}{2} \ \leq\ \frac{u^2}{2\,\delta} - \frac{\delta\, y^2}{2}\ ;$$

integrando da 0 a τ si ottiene :

$$V(x(\tau)) - V(x(0)) \ \leq\ \frac{1}{2\,\delta} \int_0^\tau u^2\, dt - \frac{\delta}{2} \int_0^\tau y^2\, dt$$

Poiché $V(\cdot)$ è semidefinita positiva, si ha:

$$\int_0^\tau y^2\, dt \;\le\; \frac{1}{\delta^2} \int_0^\tau u^2\, dt - \frac{2}{\delta}\,[V(x(\tau)) - V(x(0))] \le$$

$$\le \frac{1}{\delta^2} \int_0^\tau u^2\, dt + \frac{2}{\delta}\; V(x(0))$$

cioè:

$$\|y_\tau\|_2 \;\le\; \sqrt{\frac{1}{\delta^2} \int_0^\tau u^2\, dt + \frac{2}{\delta}\; V(x(0))}\ ;$$

ma $(a, b \ge 0) \;\Rightarrow (\sqrt{a^2 + b^2} \le a + b)$; quindi:

$$\|y_\tau\|_2 \le \frac{1}{\delta}\sqrt{\int_0^\tau u^2\, dt} + \sqrt{\frac{2}{\delta}\; V(x(0))} := \gamma\, \|u_\tau\|_2 + \beta\ ,$$

per ogni $(u, \tau) \in \boldsymbol{L}_{2e} \times \mathbf{R}^+$. Pertanto:

$$\|y\|_2 \;\le\; \gamma\, \|u\|_2 + \beta \quad , \quad \forall u \in \boldsymbol{L}_2\ .$$

- L'ultima parte della dimostrazione è suggerita come esercizio.

Operatori passivi

Considerazioni preliminari

- *Prodotto scalare*

$$\forall (v, w) \in \boldsymbol{L}_2 \quad , \quad < v, w > := \int_0^\infty v(t)\, w(t)\, dt \qquad \to \ \textit{estensione a } \boldsymbol{L}_{2e}$$

$$\forall (v, w) \in \boldsymbol{L}_{2e} \quad , \quad < v, w >_\tau := \int_0^\tau v(t)\, w(t)\, dt = < v_\tau, w > = < v, w_\tau >$$

Osservazione

In base alla definizione, il sistema S^* è passivo se esiste una funzione $V(\cdot)$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ semidefinita positiva e continuamente differenziabile tale che

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x}(x)\, f(x, u) \le u\, y - \varepsilon\, u^2 - \delta\, y^2 \quad , \quad \forall (x, u) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}\,.$$

Integrando entrambi i membri, si ottiene:

$$V(x(\tau)) - V(x(0)) \;\le\; \int_0^\tau (u\, y - \varepsilon\, u^2 - \delta\, y^2)\, dt \quad , \quad \forall u \in \boldsymbol{L}_{2e}\,,$$

condizione che, con la notazione appena introdotta, può essere riformulata nel modo seguente:

$$< u, y >_\tau \;+\; V(x(0)) - V(x(\tau)) \;\ge\; \varepsilon < u, u >_\tau \;+\; \delta < y, y >_\tau\,, \qquad \forall (u, \tau) \in \boldsymbol{L}_{2e} \times \mathbf{R}^+$$

Definizione (*Operatore passivo*)

Un operatore H^*: $\boldsymbol{L}_{2e} \to \boldsymbol{L}_{2e}$ è passivo se esistono $\beta, \varepsilon, \delta \in \mathbf{R}^+$ tali che

$$< u, y >_\tau + \beta \;\ge\; \varepsilon < u, u >_\tau + \delta < y, y >_\tau \quad , \quad \forall (u, \tau) \in \boldsymbol{L}_{2e} \times \mathbf{R}^+\,;$$

In particolare, H^* è strettamente passivo relativamente all'ingresso se $\varepsilon > 0$ ed è strettamente passivo relativamente all'uscita se $\delta > 0$.

- Nel caso di ***sistemi non dinamici***, questa definizione potrebbe apparire più ampia di quella che limita la caratteristica $g(\cdot)$ a un settore $\Phi_{[k_1,\, k_2]}$, con k_1 e k_2 in $\mathbf{R}^+$, ammettendo anche una polarizzazione β. Ma non è così. Infatti, se per un $v \in \mathbf{R}$ si avesse $w := g(v)$ nel secondo o nel quarto quadrante, sarebbe: $v\, w < 0$. Allora, con $u(t) := v$, si ha: $y(t) = w$, $< u, y >_\tau = v\, w\, \tau$, $< u, u >_\tau = v^2\, \tau$, $< y, y >_\tau = w^2\, \tau$, e la condizione di passività non potrebbe essere soddisfatta per τ indefinitamente grande.

- Nel caso di ***sistemi dinamici lineari tempo-invarianti asintoticamente stabili***, con funzione di trasferimento:

$$G(s) = C\,(s\,I - A)^{-1}\,B + D\,,$$

e *stato iniziale nullo*, mostriamo che il corrispondente *operatore non polarizzato* H^* è strettamente passivo relativamente all'ingresso e all'uscita se

$$Re[G(j\omega)] \geq \alpha > 0 \quad , \quad \forall \omega \geq 0 \quad ,$$

e quindi $G(s)$ è strettamente reale positiva.

Ricordiamo innanzitutto che, se v e w sono segnali a energia finita (definiti su $\mathbf{R}^+$), per il Teorema di Parseval si ha:

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(t)\,w(t)\,dt \;=\; \int_{0}^{\infty} v(t)\,w(t)\,dt \;=\; \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(j\omega)\,\overline{W}(j\omega)\,d\omega$$

dove V e W sono, rispettivamente, le trasformate di Fourier di v e w, mentre $\overline{W}$ è il coniugato di W.

Nel caso dell'operatore H^* associato al sistema in esame, per ogni $(u, \tau) \in \boldsymbol{L}_{2e} \times \mathbf{R}^+$, si ha:

$$< u, y >_\tau \;=\; < u_\tau, y > \;=\; \int_{0}^{\tau} u_\tau(t)\,y(t)\,dt \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} u_\tau(t)\,y(t)\,dt \;\;.$$

Si noti che l'ultimo integrale dipende soltanto da y_τ, vale a dire dall'andamento di y nell'intervallo $[0, \tau]$; ma, per la causalità di H^*, risulta: $y_\tau = H^*(u)_\tau = H^*(u_\tau)_\tau := y^{\#}{}_\tau$; inoltre, $y^{\#} \in \boldsymbol{L}_2$ e, indicando con $U(j\omega; \tau)$ la trasformata di Fourier di u_τ, $Y^{\#}(j\omega) = G(j\omega)\; U(j\omega; \tau)$. Pertanto, si ha:

$$< u, y >_\tau \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} u_\tau(t)\,y(t)\,dt \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} u_\tau(t)\,y^{\#}(t)\,dt \;=$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(j\omega;\tau)\ \overline{G}(j\omega)\ \overline{U}(j\omega;\tau)\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |U(j\omega;\tau)|^2\ \overline{G}(j\omega)\, d\omega\ .$$

Ora, ricordando che $\overline{G}(-j\omega) = G(j\omega)$, si ottiene:

$$< u, y >_\tau\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |U(j\omega;\tau)|^2\ \overline{G}(j\omega)\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\infty} |U(j\omega;\tau)|^2\ [\overline{G}(j\omega) + G(j\omega)]\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} |U(j\omega;\tau)|^2\ Re[G(j\omega)]\, d\omega\ .$$

Se $G(s)$ è strettamente reale positiva ($Re[G(j\omega)] \geq \alpha > 0,\ \forall\omega \geq 0$),

$$< u, y >_\tau\ = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} |U(j\omega;\tau)|^2\ Re[G(j\omega)]\, d\omega \geq \frac{\alpha}{\pi} \int_{0}^{\infty} |U(j\omega;\tau)|^2\, d\omega =$$

$$= 2\,\alpha\ \|u_\tau\|_2^{\,2} = 2\,\alpha < u, u >_\tau$$

quindi H^* è strettamente passivo relativamente all'ingresso. Per altro, in virtù delle ipotesi fatte, la norma indotta di H^* in $\boldsymbol{L}_2$ è G_{max}, quindi:

$$\|y^\#\|_2^{\,2} \leq G_{max}^{\,2}\ \|u_\tau\|_2^{\,2}$$

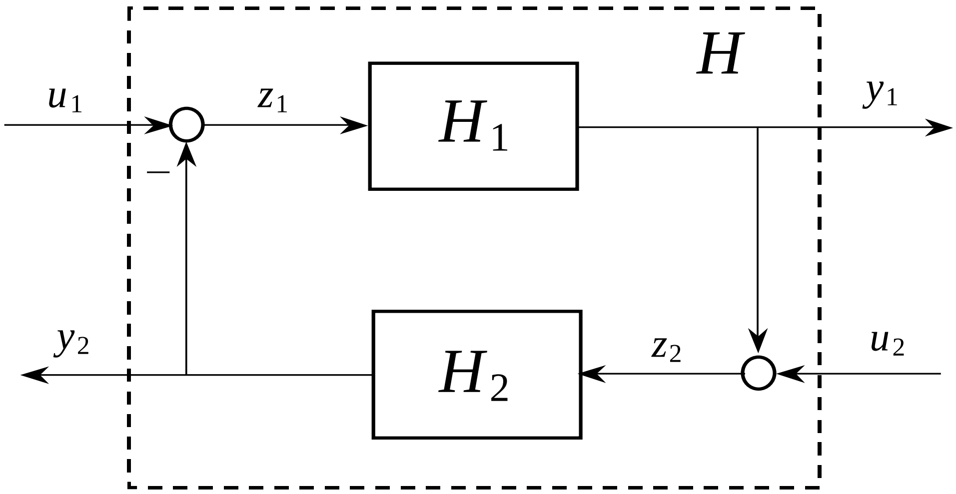
e ponendo: $\varepsilon := \alpha,\ \ \delta := \alpha/G_{max}^{\,2}$ è immediato concludere che:

$$< u, y >_\tau\ \geq\ 2\,\alpha < u, u >_\tau\ \geq\ \varepsilon < u, u >_\tau\ +\ \delta < y^\#, y^\# >\ \geq$$

$$\geq\ \varepsilon < u, u >_\tau\ +\ \delta < y, y >_\tau \quad , \quad \forall (u, \tau) \in \boldsymbol{L}_{2e} \times \mathbf{R}^+\ .$$

Stabilità di sistemi reazionati a componenti passivi

S :



***Teorema* 8**

Supponiamo che il sistema reazionato S sia descritto da un operatore H ben posto e che gli operatori H_i, i = 1, 2, siano passivi; sia cioè:

$$< z_i, y_i >_\tau + \beta_i \;\geq\; \varepsilon_i < z_i, z_i >_\tau + \delta_i < y_i, y_i >_\tau \quad , \quad \forall (z_i, \tau) \in \boldsymbol{L}_{2e} \times \mathbf{R}^+$$

con β_i, ε_i, $\delta_i \in \mathbf{R}^+$. Allora, l'operatore H è debolmente limitato, e quindi $\boldsymbol{L}_2$-stabile, se:

$$\delta_1 + \varepsilon_2 > 0 \qquad , \qquad \delta_2 + \varepsilon_1 > 0 \ .$$

Se inoltre: $\beta := \beta_1 + \beta_2 = 0$, allora H è limitato.

Prova

- Cominciamo ad osservare che (per la passività dei sottosistemi):

$$< z_1, y_1 >_\tau + < z_2, y_2 >_\tau \;\geq\; \varepsilon_1 \, \|z_{1\tau}\|_2^{\,2} + \delta_1 \, \|y_{1\tau}\|_2^{\,2} + \varepsilon_2 \, \|z_{2\tau}\|_2^{\,2} + \delta_2 \, \|y_{2\tau}\|_2^{\,2} - \beta$$

$$[< z_1, y_1 >_\tau + < z_2, y_2 >_\tau \ \geq \ \varepsilon_1 \|z_{1\tau}\|_2^2 + \delta_1 \|y_{1\tau}\|_2^2 + \varepsilon_2 \|z_{2\tau}\|_2^2 + \delta_2 \|y_{2\tau}\|_2^2 - \beta]$$

- D'altro canto (per la struttura del sistema):

a) $< z_1, y_1 >_\tau + < z_2, y_2 >_\tau \ = \ < u_1 - y_2, y_1 >_\tau + < u_2 + y_1, y_2 >_\tau \ =$

$$= \ < u_1, y_1 >_\tau + < u_2, y_2 >_\tau$$

b) $\varepsilon_1 \|z_{1\tau}\|_2^2 + \varepsilon_2 \|z_{2\tau}\|_2^2 = \varepsilon_1 <u_1 - y_2, u_1 - y_2>_\tau + \varepsilon_2 <u_2 + y_1, u_2 + y_1>_\tau =$

$$= \ \varepsilon_1 (\|u_{1\tau}\|_2^2 - 2 <u_1, y_2>_\tau + \|y_{2\tau}\|_2^2) +$$

$$+ \varepsilon_2 (\|u_{2\tau}\|_2^2 + 2 <u_2, y_1>_\tau + \|y_{1\tau}\|_2^2) \ .$$

- Sostituendo all'indietro si ottiene:

$$\varepsilon_1 (\|u_{1\tau}\|_2^2 - 2 <u_1, y_2>_\tau + \|y_{2\tau}\|_2^2) + \varepsilon_2 (\|u_{2\tau}\|_2^2 + 2 <u_2, y_1>_\tau + \|y_{1\tau}\|_2^2) +$$

$$+ \delta_1 \|y_{1\tau}\|_2^2 + \delta_2 \|y_{2\tau}\|_2^2 - \beta \ \leq \ < u_1, y_1 >_\tau + < u_2, y_2 >_\tau$$

- Riordinando i termini e considerando il valore assoluto del secondo membro:

$$(\delta_1 + \varepsilon_2) \|y_{1\tau}\|_2^2 + (\delta_2 + \varepsilon_1) \|y_{2\tau}\|_2^2 - \beta \leq$$

$$\leq \ <u_1 - 2\,\varepsilon_2\, u_2, y_1>_\tau + <u_2 + 2\,\varepsilon_1\, u_1, y_2>_\tau - \ \varepsilon_1 \|u_{1\tau}\|_2^2 - \ \varepsilon_2 \|u_{2\tau}\|_2^2 \ \leq$$

$$\leq \ \left| <u_1 - 2\,\varepsilon_2\, u_2, y_1>_\tau + <u_2 + 2\,\varepsilon_1\, u_1, y_2>_\tau - \ \varepsilon_1 \|u_{1\tau}\|_2^2 - \ \varepsilon_2 \|u_{2\tau}\|_2^2 \right| \leq$$

$$\leq \left| <u_1 - 2\,\varepsilon_2\, u_2, y_1>_\tau \right| + \left| <u_2 + 2\,\varepsilon_1\, u_1, y_2>_\tau \right| + \ \varepsilon_1 \|u_{1\tau}\|_2^2 + \ \varepsilon_2 \|u_{2\tau}\|_2^2.$$

- Ma, per la disuguaglianza di Schwarz ($| <a, b> | \ \leq \ \|a\| \, \|b\|$)

$$\left| <u_1 - 2\,\varepsilon_2\, u_2, y_1>_\tau \right| + \left| <u_2 + 2\,\varepsilon_1\, u_1, y_2>_\tau \right| \leq$$

$$\leq \ \|u_{1\tau} - 2\,\varepsilon_2\, u_{2\tau}\| \, \|y_{1\tau}\| + \|u_{2\tau} - 2\,\varepsilon_1\, u_{1\tau}\| \, \|y_{2\tau}\| \leq$$

$$\leq \ (\|u_{1\tau}\| + 2\,\varepsilon_2 \|u_{2\tau}\|) \, \|y_{1\tau}\| + (\|u_{2\tau}\| + 2\,\varepsilon_1 \|u_{1\tau}\|) \, \|y_{2\tau}\| \ .$$

Quindi …

per ogni $\tau \in \mathbf{R}^+$, si ha:

$$(\delta_1 + \varepsilon_2)\, \|y_{1\tau}\|_2^2 + (\delta_2 + \varepsilon_1)\, \|y_{2\tau}\|_2^2 - \beta \leq$$

$$\leq \|u_{1\tau}\|\, \|y_{1\tau}\| + 2\, \varepsilon_2\, \|u_{2\tau}\|\, \|y_{1\tau}\| + \|u_{2\tau}\|\, \|y_{2\tau}\| + 2\, \varepsilon_1\, \|u_{1\tau}\|\, \|y_{2\tau}\| +$$

$$+\ \varepsilon_1\, \|u_{1\tau}\|_2^2 + \varepsilon_2\, \|u_{2\tau}\|_2^2 \qquad (\clubsuit)$$

- Se, a questo punto, si pone:

$$v := \begin{bmatrix} \|u_{1\tau}\| \\ \\ \|u_{2\tau}\| \end{bmatrix} \quad , \quad w := \begin{bmatrix} \|y_{1\tau}\| \\ \\ \|y_{2\tau}\| \end{bmatrix}$$

$$P := \begin{bmatrix} \delta_1 + \varepsilon_2 & 0 \\ \\ 0 & \delta_2 + \varepsilon_1 \end{bmatrix} \quad , \quad Q := \begin{bmatrix} 1 & 2\, \varepsilon_2 \\ \\ 2\, \varepsilon_1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad R := \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ \\ 0 & \varepsilon_2 \end{bmatrix}$$

la disuguaglianza ($\clubsuit$) può essere espressa in forma più compatta:

$$w'\, P\, w \leq w'\, Q\, v + v'\, R\, v + \beta\ . \qquad (*)$$

Ponendo, a sua volta:

$$S := \sqrt{P} = \begin{bmatrix} \sqrt{\delta_1 + \varepsilon_2} & 0 \\ \\ 0 & \sqrt{\delta_2 + \varepsilon_1} \end{bmatrix} , \quad T := S^{-1}\, Q/2\ , \quad M^2 := T'T + R$$

è facile verificare che la (*) può anche essere scritta:

$$(S\, w - T\, v)'\, (S\, w - T\, v) \leq v'\, M^2\, v + \beta$$

cioè, indicando con $\|\cdot\|_E$ la norma euclidea in $\mathbf{R}^2$:

$$\|\, S\, w - T\, v\, \|_E^2 \leq \|M\, v\|_E^2 + \beta\ .$$

Poiché , per ogni $a, b \in \mathbf{R}^+$, si ha $a^2 + b^2 \leq (a + b)^2$, risulta:

$$\|S\, w - T\, v\|_E \leq \|M\, v\|_E + \sqrt{\beta}$$

Ma $\|S\,w - T\,v\|_E \;\geq\; \|S\,w\|_E - \|T\,v\|_E$, quindi:

$\|S\,w\|_E \;\leq\; \|T\,v\|_E \;+\; \|M\,v\|_E \;+\sqrt{\beta} \;\leq\; (\|T\|_E \;+ \|M\|_E)\,\|v\|_E \;+\sqrt{\beta}$.

- Infine, sia: $\eta := S\,w$ (e ricordiamo che S è non singolare), allora

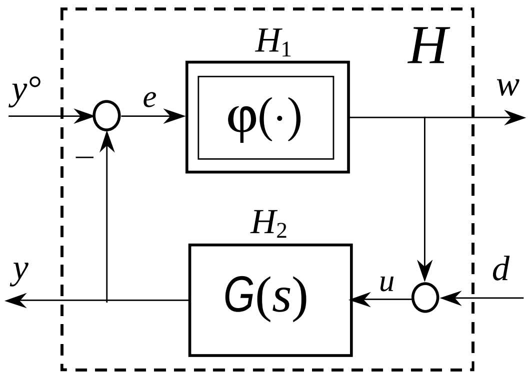
$\|w\|_E \;=\; \|S^{-1}\,\eta\|_E \;\leq\; \|S^{-1}\|_E\;\|\eta\|_E \;=\; \|S^{-1}\|_E\;\|S\,w\|_E \;\leq$

$$\leq\; \|S^{-1}\|_E\,\left[(\|T\|_E \;+ \|M\|_E)\,\|v\|_E \;+\sqrt{\beta}\right] \;:=\; \hat{\gamma}\,\|v\|_E + \hat{\beta}$$

cioè:

$$\|y\|_2 \;\leq\; \hat{\gamma}\,\|u\|_2 + \hat{\beta}\,.$$

Esempio: *Problema di Lur'e*



Stabilità L_2 *nel settore* $[0, k]$

Teorema 9. Supponiamo che:

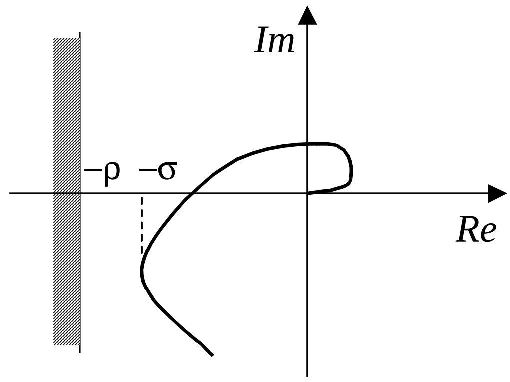
- H_1 corrisponda ad un sistema non dinamico tempo-invariante con caratteristica ingresso-uscita $\varphi(\cdot)$;
- H_2 corrisponda a un sistema dinamico lineare tempo-invariante asintoticamente stabile con funzione di trasferimento

$$G(s) = C\,(s\,I - A)^{-1}\,B$$

e sia:

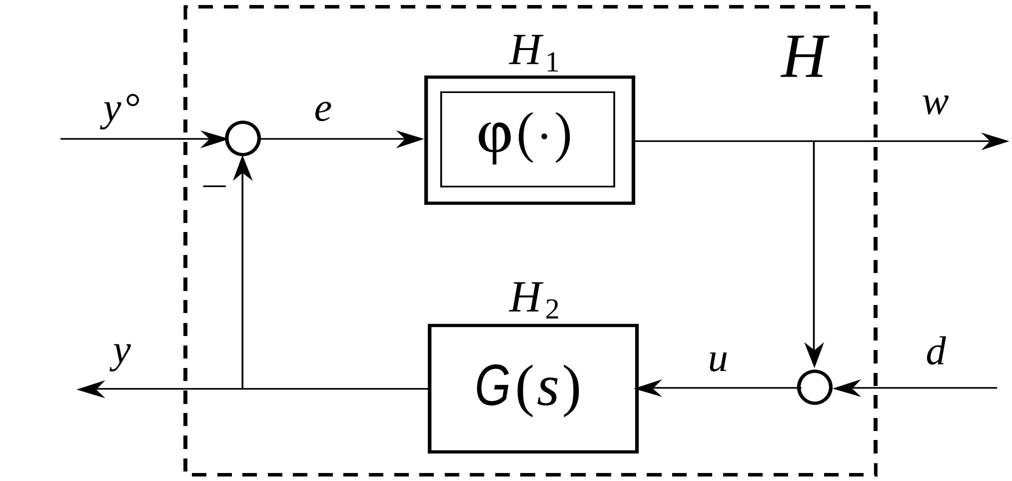
$Re[G(j\omega)] \geq -\sigma > -\rho\,,\;\; \forall\omega \geq 0$,

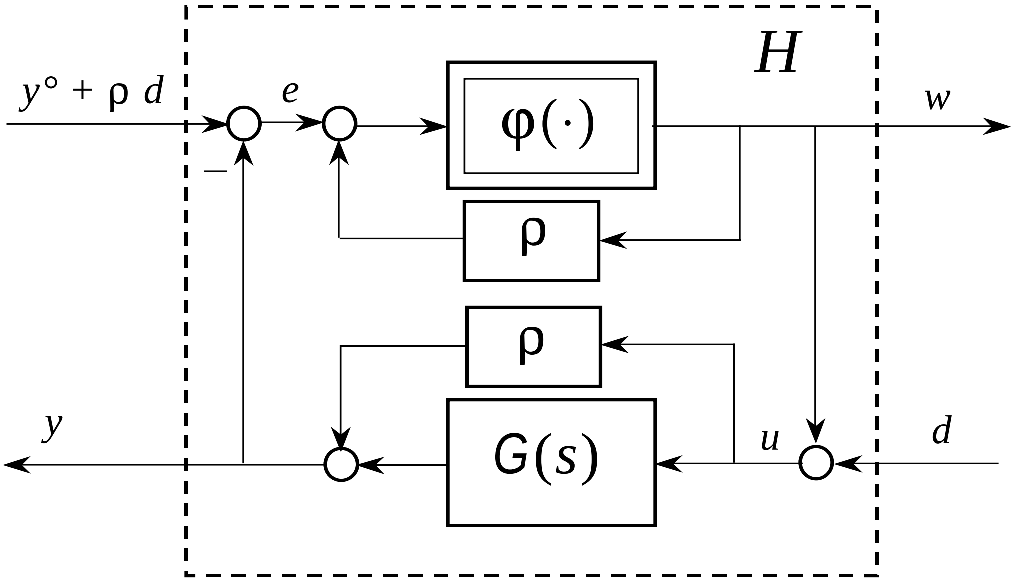
$\alpha := \rho - \sigma > 0$;

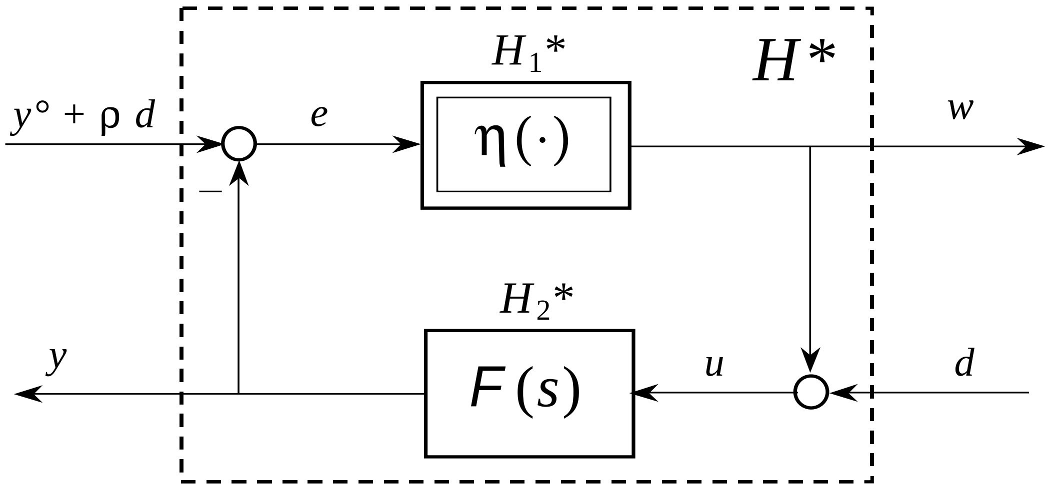


allora, l'operatore H è debolmente limitato, e quindi $\boldsymbol{L}_2$-stabile, per ogni $\varphi(\cdot) \in \Phi_{[0,\,k]}$, con $k := 1/\rho$ (cfr. Criterio di Popov con $q = 0$).

Prova. Una diversa versione di un artificio ormai noto:



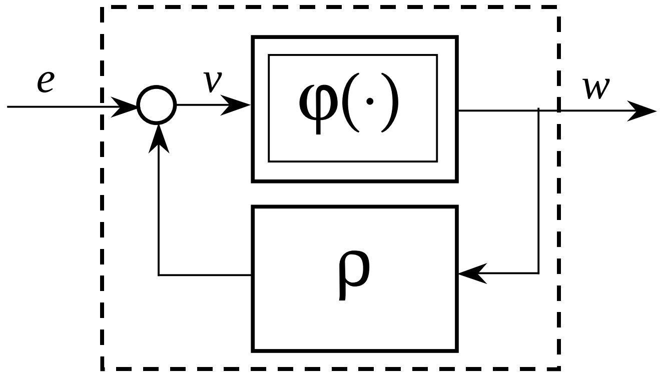




$F(s) := G(s) + \rho \quad ; \quad \eta(e) = w \quad , \quad w : \quad w = \varphi(e + \rho\, w)$

•

$\eta(\cdot)$:



Per ogni $k \le 1/\rho$,

$$\varphi(\cdot) \in \Phi_{[0,\,k]} \quad \Leftrightarrow \quad \eta(\cdot) \in \Phi_{[0,\,K]} \quad , \quad K := \frac{k}{1 - \rho\, k} \quad .$$

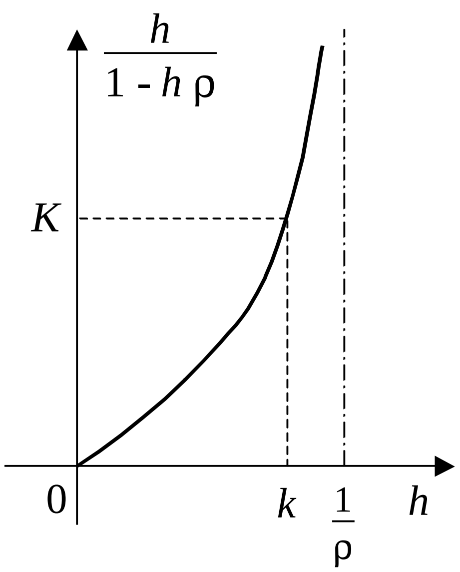
Infatti, in ogni punto $(\overline{v}, \overline{w})$ della caratteristica $\varphi(\cdot)$ sarà:

$$\overline{w} = h\,\overline{v} \quad , \quad h \in [0, k] \ .$$

Il corrispondente valore di e dev'essere tale che: $e + \rho\,\overline{w} = \overline{v}$, cioè:

$$\overline{e} = \frac{1}{h}\overline{w} - \rho\,\overline{w} \quad \Rightarrow \quad \overline{w} = \frac{h}{1 - \rho\, h}\ \overline{e}$$

$$h \in [0, k] \quad \Rightarrow \quad \frac{h}{1 - \rho\, h} \in [0, K] \ .$$



Quando $k = 1/\rho$, si ha $K = \infty$:

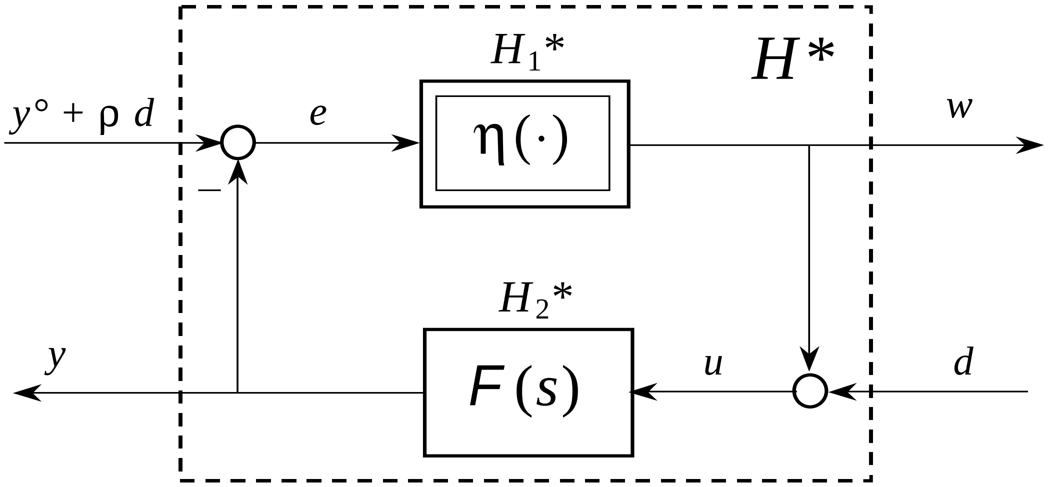
$$\boxed{\varphi(\cdot) \in \Phi_{[0,\,k]} \Leftrightarrow \eta(\cdot) \in \Phi_{[0,\,\infty]}}$$

- La funzione di trasferimento $F(s) := G(s) + \rho$ ha poli con parte reale negativa ed è *strettamente reale positiva*.

  Infatti, poiché per ipotesi $Re[G(j\omega)] \geq -\sigma > -\rho$, $\forall \omega \geq 0$,

$$Re[F(j\omega)] \geq -\sigma + \rho = \alpha > 0 \, , \; \forall \omega \geq 0 \, .$$

Allora, in base a quanto già sappiamo, si può trarre una *prima conclusione*:



♣ H_1* è passivo: $w\, e \geq 0$, $\forall e \in \mathbf{R}$ $(\varepsilon_1 = 0, \delta_1 = 0)$
$(k_1 = 0, k_2 = \infty)$;

♣ Se non è polarizzato (*stato iniziale nullo*), H_2* è strettamente passivo relativamente all'ingresso e all'uscita $(\varepsilon_2 > 0, \delta_2 > 0)$.

Poiché $\delta_1 + \varepsilon_2 > 0$ e $\delta_2 + \varepsilon_1 > 0$, l'operatore H* è debolmente limitato (Teorema 8), e quindi $\boldsymbol{L}_2$-stabile, per ogni $\eta(\cdot) \in \Phi_{[0,\, \infty]}$.

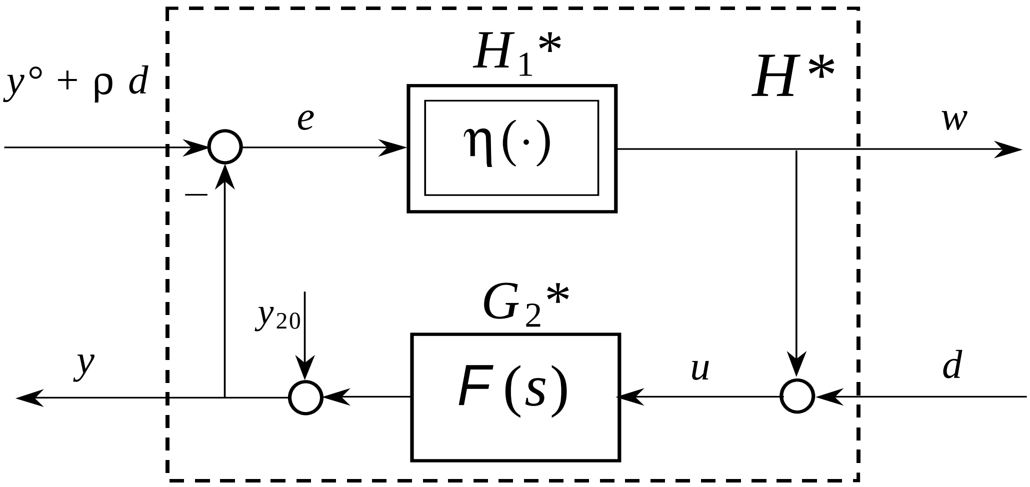
Di conseguenza, l'operatore H è debolmente limitato e $\boldsymbol{L}_2$-stabile, per ogni $\varphi(\cdot) \in \Phi_{[0,\, k]}$, con $k := 1/\rho$.

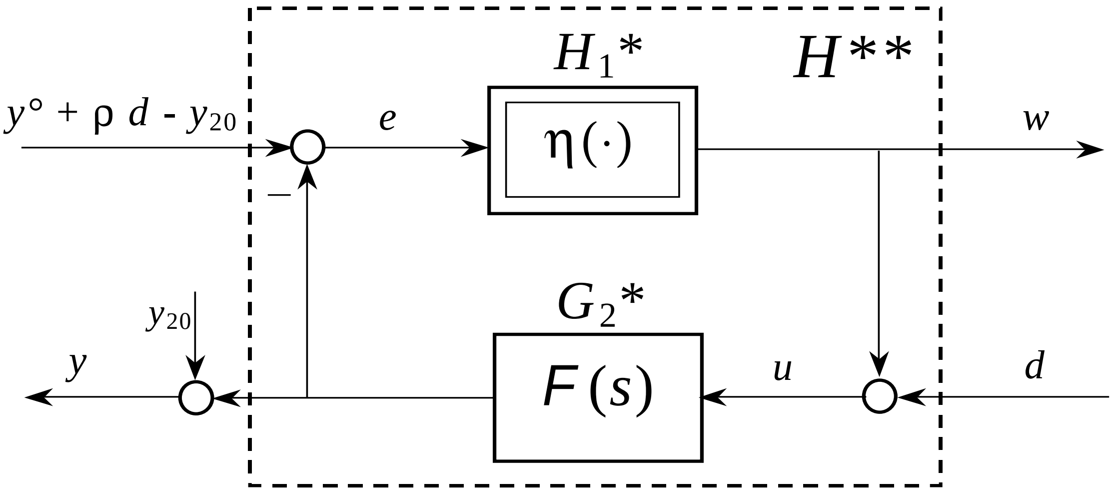
… e se H_2* fosse polarizzato (stato iniziale qualsiasi)? ➔

- Se H_2* è *polarizzato* (stato iniziale qualsiasi), per l'asintotica stabilità del sistema (A, B, C) si ha:

$$H_2^*(u) := G_2^*(u) + y_{20}$$

$$G_2^*(0) = 0 \quad , \quad y_{20}(t) = C\, e^{At}\, x_0 \;\Rightarrow\; y_{20} \in \boldsymbol{L}_2$$





Poiché G_2* è non polarizzato, H** è debolmente limitato e quindi $\boldsymbol{L}_2$-stabile. Pertanto, anche H* e H sono debolmente limitati e $\boldsymbol{L}_2$-stabili. Questa osservazione conclude la prova del Teorema 9.

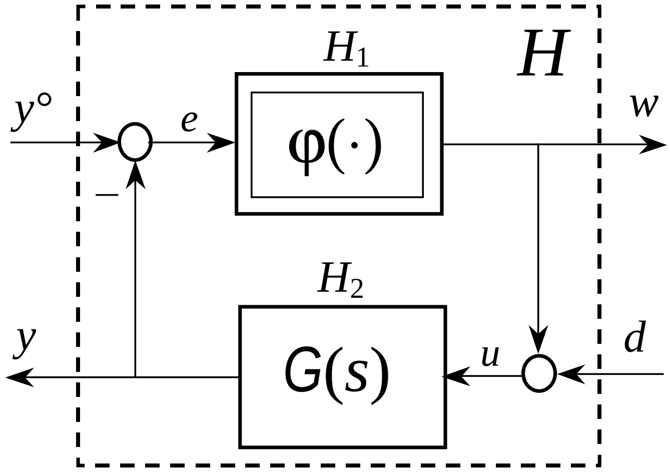
Corollario del Teorema 9. Dal Teorema 9 è facile ricavare, con un artificio ormai familiare, il ***criterio del cerchio*** per la stabilità $\boldsymbol{L}_2$ dell'operatore H nel settore $[k_1, k_2]$, cioè per ogni $\varphi(\cdot) \in \Phi_{[k_1,\, k_2]}$ (Teorema 6).

Definizione. Sia: $\widetilde{\boldsymbol{L}}_2 := \{v : v, \dot{v} \in \boldsymbol{L}_2\}$.

Esempio. Se $y_0(t) = C\, e^{At}\, x_0$, si ha: $\dot{y}_0(t) = C\, A\, e^{At}\, x_0$; quindi:

$$Re[\lambda_i(A)] < 0 \quad \Rightarrow \quad y_0 \in \widetilde{\boldsymbol{L}}_2$$

***Teorema* 10** (*Un criterio alla Popov di stabilità* $\boldsymbol{L}_2$)



Supponiamo che:

- H_1 corrisponda ad un sistema non dinamico tempo-invariante con caratteristica ingresso-uscita $\varphi(\cdot)$;

- H_2 corrisponda a un sistema dinamico lineare tempo-invariante asintoticamente stabile con funzione di trasferimento

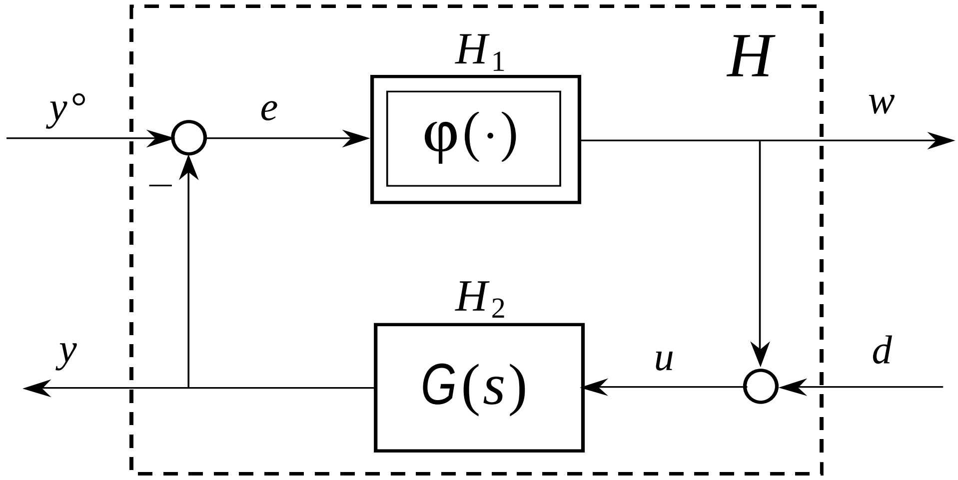
$$G(s) = C\,(s\,I - A)^{-1}\,B\,;$$

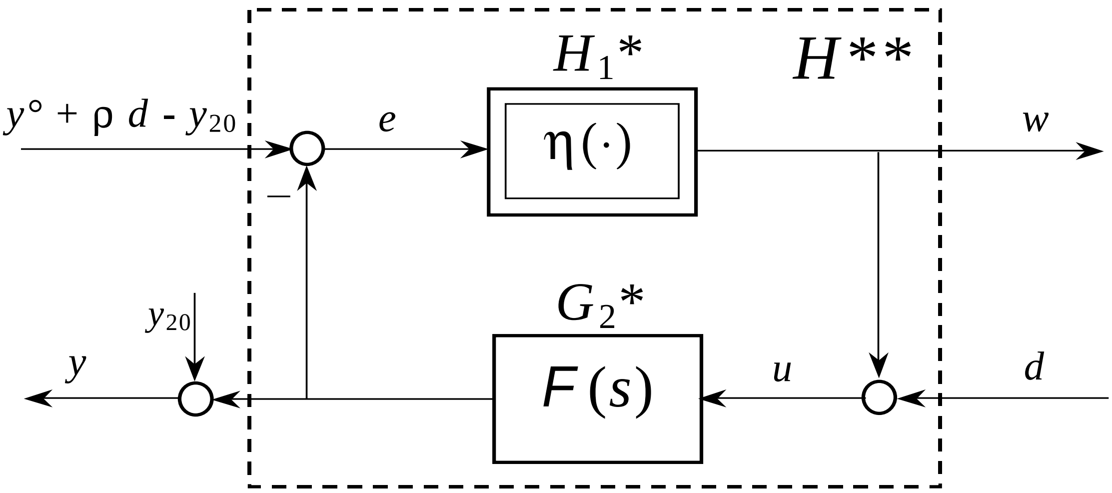
allora, se esiste $\hat{q} \in \mathbf{R}^+$ tale che:

$$\frac{1}{k} + Re[(1 + j\,\omega\,\hat{q})\,G(j\omega)] > 0 \quad , \quad \forall \omega \geq 0$$

si ha: $y, w \in \boldsymbol{L}_2$, per ogni $y°, d \in \widetilde{\boldsymbol{L}}_2$ e per ogni $\varphi(\cdot) \in \Phi_{[0,\,k]}$.

Prova. Posto: $\rho := 1/k$, applichiamo il medesimo artificio già usato nella dimostrazione del Teorema 9.



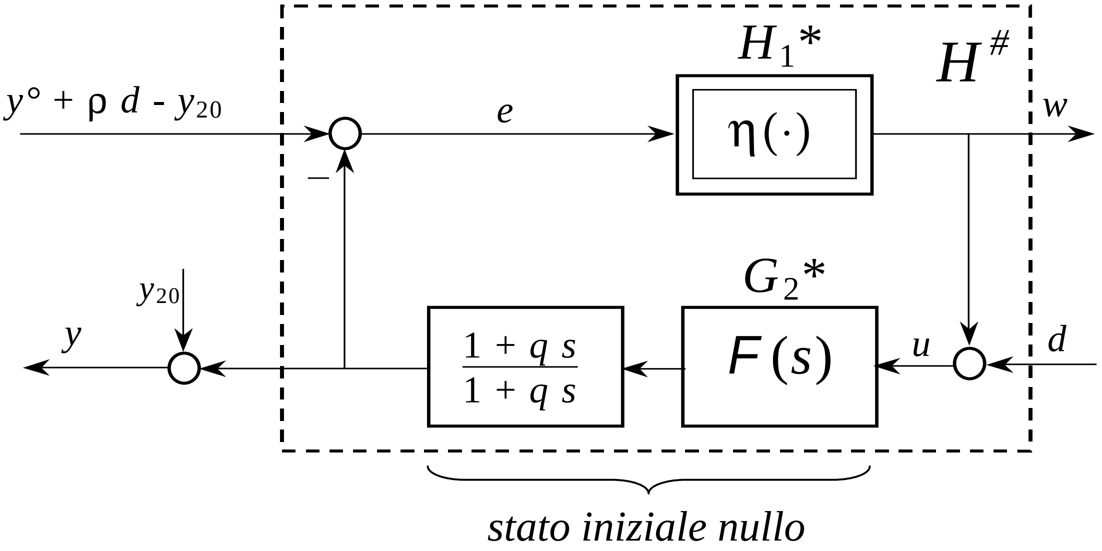


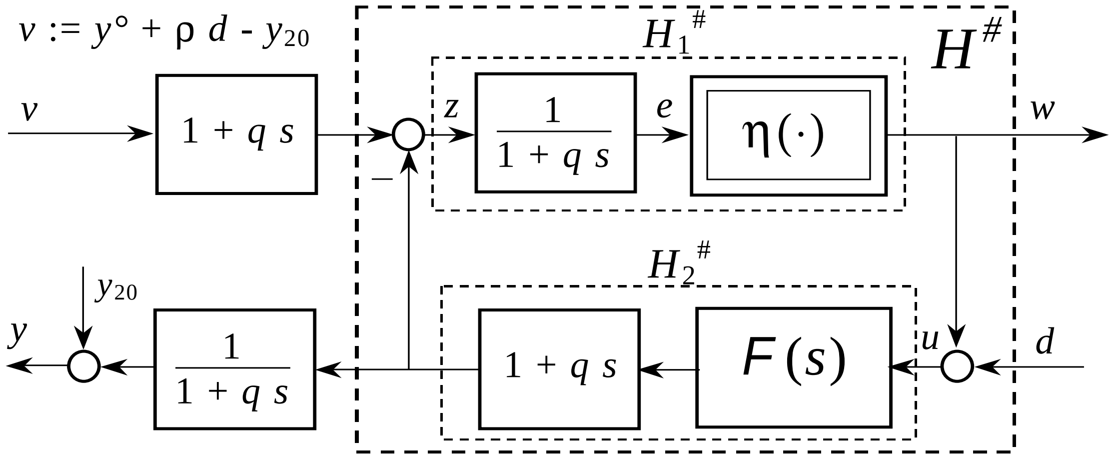
Dalla dimostrazione del Teorema 9, sappiamo che se

$$Re[F(j\omega)] := Re[G(j\omega) + \rho] \geq \alpha > 0 \quad , \quad \forall \omega \geq 0$$

allora H^{**} è $\boldsymbol{L}_2$-stabile per ogni $\eta(\cdot) \in \Phi_{[0,\, \infty]}$ e H è $\boldsymbol{L}_2$-stabile per ogni $\varphi(\cdot) \in \Phi_{[0,\, k]}$, $k := 1/\rho$.

Ma, per ogni $q \geq 0$, H^{**} è palesemente equivalente a $H^{\#}$, dove:





Ci proponiamo ora di dimostrare che, se $\eta(\cdot) \in \Phi_{[0, \infty]}$ e $q > 0$ (il caso $q = 0$ è banale), $H_1^{\#}$ è un operatore passivo. Infatti:

$$w(t) = \eta(e(t)) \quad , \quad q\,\dot{e}(t) + e(t) = z(t) \quad , \quad e(0) = w(0) = 0 \; ;$$

allora,

$$< w, z >_\tau \; = \int_0^\tau \eta(e(t))\, e(t)\, dt + q \int_0^\tau \eta(e(t))\, \dot{e}(t)\, dt \; ;$$

ma, poiché la caratteristica $\eta(\cdot)$ sta nel primo e terzo quadrante, si ha:

$$\int_0^{\tau} \eta(e(t))\, e(t)\, dt \geq 0 \quad , \quad \forall \tau \geq 0$$

$$\int_0^{\tau} \eta(e(t))\, \dot{e}(t)\, dt = \int_0^{e(\tau)} \eta(e)\, de \geq 0 \quad , \quad \forall \tau \geq 0$$

quindi:

$$< w, z >_{\tau} \geq 0 \quad , \quad \forall (z, \tau) \in \boldsymbol{L}_{2e} \times \mathbf{R}^{+} .$$

Pertanto (Teorema 8), l'operatore $H^{\#}$ è debolmente limitato, e quindi $\boldsymbol{L}_2$-stabile, per ogni $\eta(\cdot) \in \Phi_{[0, \infty]}$ se $H^{\#}{}_2$ è strettamente passivo relativamente all'ingresso e all'uscita, ossia se $(1 + q\, s)\, F(s)$ è una funzione strettamente reale positiva, cioè:

$$Re[(1 + q\, j\, \omega)\, F(j\omega)] \geq \alpha > 0 \quad , \quad \forall \omega \geq 0 .$$

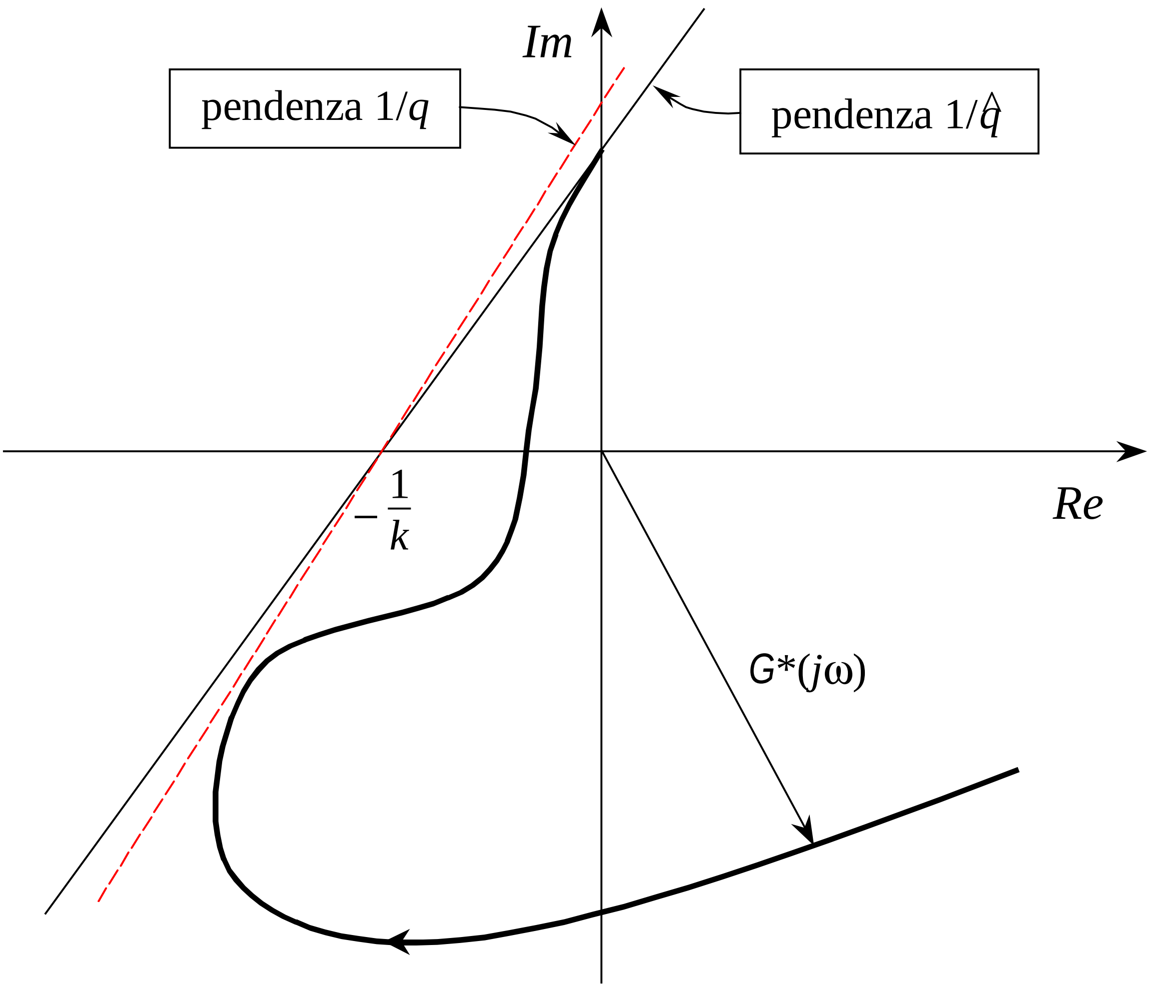
Poiché $F(s) := G(s) + \rho$, con $\rho := 1/k$, quest'ultima condizione diventa:

$$\frac{1}{k} + Re[(1 + q\, j\, \omega)\, G(j\omega)] \geq \alpha > 0 \quad , \quad \forall \omega \geq 0 ;$$

Ma perché essa sia soddisfatta per almeno un valore positivo di q, è sufficiente che esista $\hat{q} > 0$ tale che:

$$\frac{1}{k} + Re[(1 + \hat{q}\, j\, \omega)\, G(j\omega)] > 0 \quad , \quad \forall \omega \geq 0 .$$

In tal caso, infatti, se consideriamo la funzione di Popov $G^*(j\omega) := Re[G(j\omega)] + j\omega\, Im[G(j\omega)]$, è evidente che l'esistenza di una retta con pendenza positiva $1/\hat{q}$, passante per $-1/k$, che lasci alla sua destra il diagramma polare di $G^*(j\omega)$, $\omega \geq 0$, (ma non necessariamente il punto corrispondente al limite di $G^*(j\omega)$ per ω che tende all'infinito) implica l'esistenza di una retta con pendenza positiva $1/q$, sempre passante per il punto $-1/k$, che lasci però *strettamente* alla sua destra il suddetto diagramma polare.



Quindi esistono $q > 0$ e $\alpha > 0$ tali che:

$$\frac{1}{k} + Re[(1 + q\, j\, \omega)\, G(j\omega)] \geq \alpha > 0 \qquad , \qquad \forall \omega \geq 0\,.$$

Se, per ogni $\eta(\cdot) \in \Phi_{[0,\,\infty]}$, $H^{\#}$ è $\boldsymbol{L}_2$-stabile, possiamo di conseguenza affermare che

$$y, w \in \boldsymbol{L}_2 \qquad , \qquad \forall\, y^{\circ}, d \in \tilde{\boldsymbol{L}}_2\,.$$

Infine, osservando che, per costruzione, $\eta(\cdot) \in \Phi_{[0,\,\infty]}$ se e solo se $\varphi(\cdot) \in \Phi_{[0,\,k]}$ la dimostrazione è conclusa.