

POLITECNICO DI MILANO

Appunti dalle lezioni di

# CONTROLLO NON LINEARE

Ad uso esclusivo degli allievi iscritti al corso  
tenuto dal Prof. Guido Guardabassi nell'anno accademico 2011-2012

Corso di laurea magistrale in Ingegneria dell'Automazione

# CONTROLLO NON LINEARE

(40-45 ore di lezione ed esercitazione)

## **Parte I: *Analisi di sistemi reazionati non lineari***

1. Il problema di Lur'e: stabilità assoluta
2. Stabilità ingresso-uscita: piccolo guadagno, elementi passivi
3. Esistenza e stabilità di movimenti periodici

## **Parte II: *Controllo di sistemi non lineari***

4. Controllo a struttura variabile
5. Linearizzazione

[6\*. Progetto basato sul metodo di Liapunov

## **Parte III: *Controllo ottimo* ]**

\*\*\*\*\*      \*\*\*\*\*      \*\*\*\*\*

*Pagina personale:*      <http://home.dei.polimi.it/guardaba/>

*Posta elettronica:*      [guardaba@elet.polimi.it](mailto:guardaba@elet.polimi.it)  
                                 [Guido.Guardabassi@polimi.it](mailto:Guido.Guardabassi@polimi.it)

*Telefono:*                      (02-2399-)3542

*Materiale didattico*

*Modalità d'esame*

## CARATTERE DEL CORSO

Il corso di *Controllo non lineare* riguarda problemi e metodi atti a comprendere aspetti del comportamento non lineare di sistemi di controllo.

- Natura eterogenea dei problemi considerati e dei metodi atti a risolverli (anche approssimativamente)
- Il sogno di un'unica teoria generale dei sistemi non lineari, capace d'incorporare tutte le problematiche esistenti e di connettere organicamente tutti gli strumenti matematici effettivamente o potenzialmente utili ad illuminarle, è destinato a restare tale a lungo, se non per sempre
- Ovviamente parziale, limitata e senza alcuna pretesa di completezza è quindi, a maggior ragione, anche la trattazione svolta in questo corso [l'ultimo, per altro, svolto da me (il primo, nel 1967!)]

***Capitolo 1***  
***Il problema di Lur'e***

## 1. Introduzione: i sistemi di Lur'e

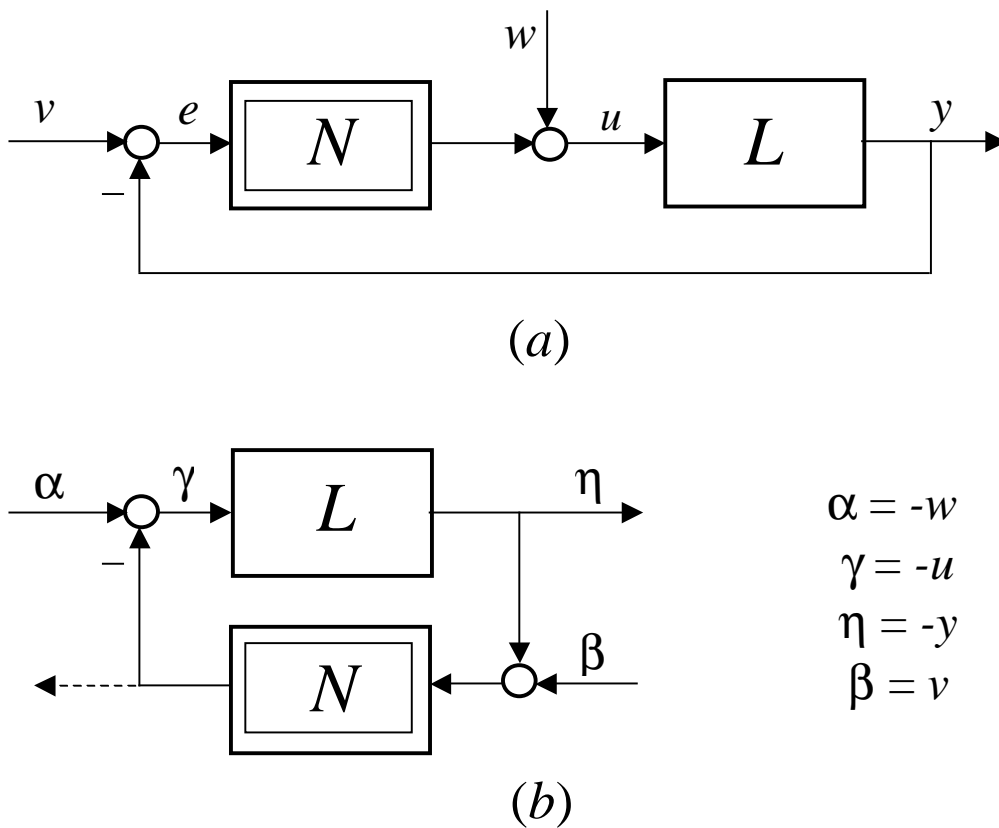


Fig. 1 : Forme equivalenti di un sistema di Lur'e.

Che problemi pongono? Perché sono importanti?

La forma di Lur'e è quasi sempre il risultato di un'opportuna riformulazione del problema iniziale

→ *esempio*

[Richiami 1]

## 2. Un esempio significativo

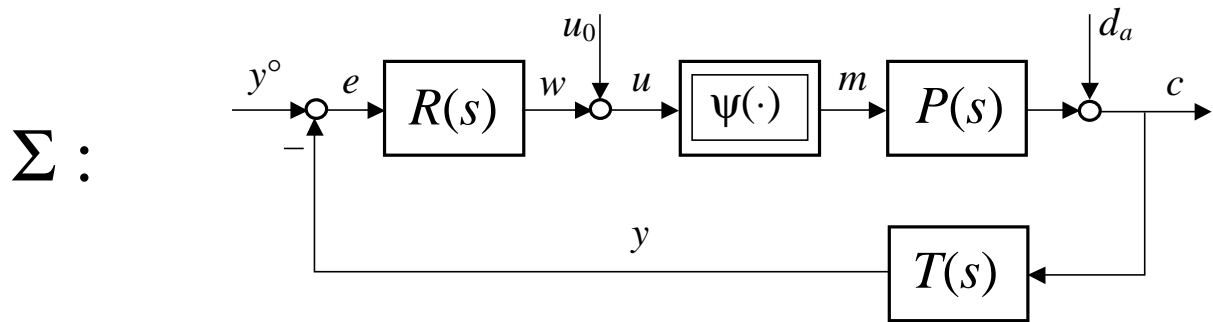


Fig. 2 : Un sistema di controllo.

$H_p:$   $g_R = 1, \quad g_P = g_T = 0$

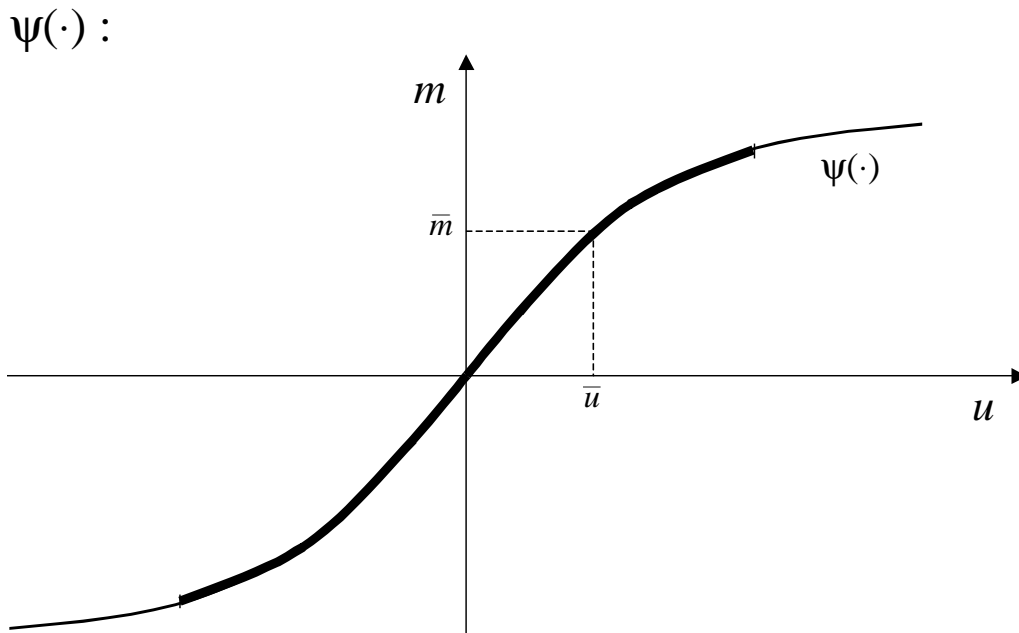


Fig. 3 : Caratteristica dell'attuatore.

- Dati:  $\bar{y}^o, \bar{d}_a$  e  $u_0$

qual è la corrispondente *condizione di equilibrio* di  $\Sigma$ ?

$$g_R = 1 \implies \bar{e} = 0, \text{ quindi: } \bar{y} = \bar{y}^\circ, \quad \bar{c} = \bar{y}/\mu_T = \bar{y}^\circ/\mu_T.$$

$$\text{Ma } \bar{c} = \mu_P \bar{m} + \bar{d}_a, \text{ quindi}$$

$$\frac{\bar{y}^\circ}{\mu_T} = \mu_P \bar{m} + \bar{d}_a \quad \text{pertanto}$$

$$\bar{m} = \frac{1}{\mu_P} \left( \frac{\bar{y}^\circ}{\mu_T} - \bar{d}_a \right) \quad \text{e infine: } \bar{u} = \psi^{-1}(\bar{m}), \quad \bar{w} = \bar{u} - u_0.$$

- **Progetto:** progetto “lineare” + analisi non lineare (simulazione?)

Progetto “lineare”

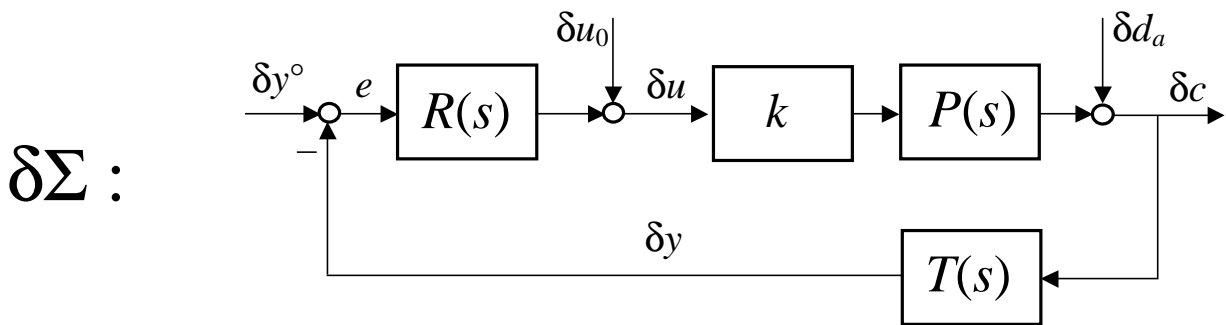


Fig. 4 : Sistema lineare tangente a  $\Sigma$  in uno stato di equilibrio.

$$k := \frac{\partial \psi}{\partial u}(\bar{u}) \in [k_{min}, k_{max}].$$

Se il progetto “lineare” si è concluso con successo, è certo che in  $\delta\Sigma$  ogni stato di equilibrio, corrispondente a valori costanti degli ingressi, è *globalmente stabile*.

$\implies$  Arbitrarie variazioni a scalino delle variabili d’ingresso produrranno transitori adeguati.

- Possiamo essere altrettanto certi che la stessa cosa accada in  $\Sigma$  ?

Per rispondere affermativamente occorrerebbe garantire che, anche nel sistema  $\Sigma$  non lineare, *tutti* gli stati di equilibrio corrispondenti ad ammissibili valori costanti degli ingressi siano *globalmente* stabili.

Al fine di esplorare la possibilità di perseguire questo obiettivo, torniamo a considerare la condizione di equilibrio di  $\Sigma$  corrispondente agli ingressi:  $\bar{y}^\circ$ ,  $\bar{d}_a$  e  $u_0$  e introduciamo un *cambiamento di variabili*:

$$\begin{aligned} \Delta e(t) &:= e(t) - \bar{e} & , & & \Delta w(t) &:= w(t) - \bar{w} & , & & \Delta u(t) &:= u(t) - \bar{u} \\ \Delta m(t) &:= m(t) - \bar{m} & , & & \Delta c(t) &:= c(t) - \bar{c} & , & & \Delta y(t) &:= y(t) - \bar{y} . \end{aligned}$$

$$\Delta x(t) := x(t) - \bar{x} = [x'_P(t) \ x'_T(t) \ x'_R(t)]' - [\bar{x}'_P \ \bar{x}'_T \ \bar{x}'_R]'$$

Poiché gli ingressi (costanti) sono rimasti invariati, si ha :

$$\begin{aligned} \Delta y^\circ(t) &:= y^\circ(t) - \bar{y}^\circ = 0 \\ \Delta u_0 &:= u_0(t) - u_0 = 0 \\ \Delta d_a(t) &:= d_a(t) - \bar{d}_a = 0 . \end{aligned}$$

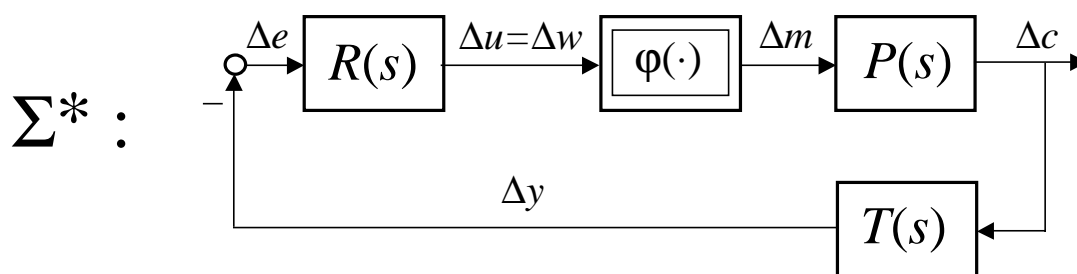


Fig. 5 : Rappresentazione equivalente di  $\Sigma$ .

Infatti:  $\Delta S_L = \delta S_L = S_L$  (v. *Richiami 1*)

e inoltre



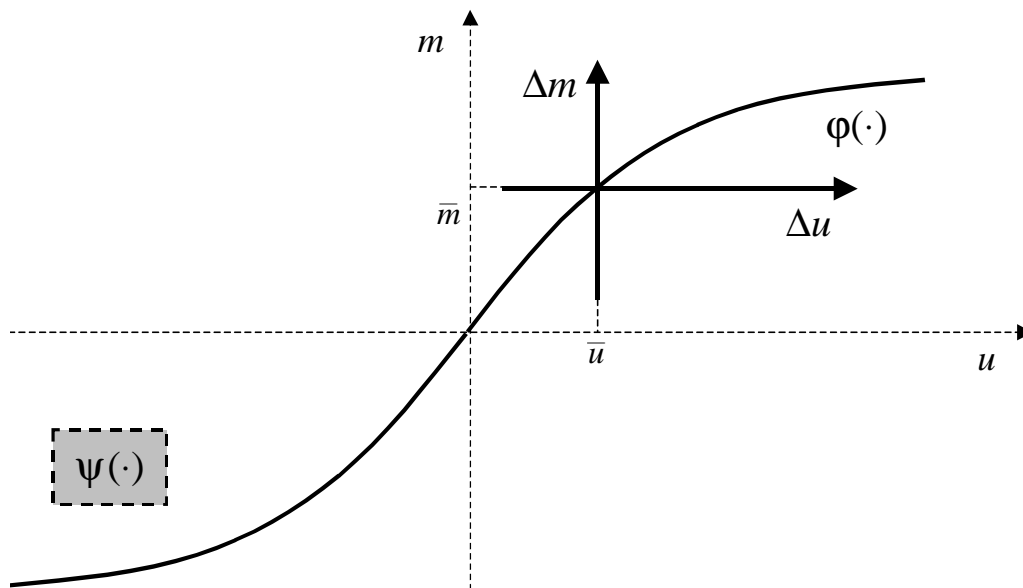


Fig. 6 : La funzione caratteristica  $\varphi(\cdot)$ .

**Attenzione.** Si noti che, allo stato di equilibrio  $\bar{x}$  di  $\Sigma$ ,  $x := |x_P' \ x_T' \ x_R'|'$ , corrisponde lo stato  $\Delta x := x - \bar{x} = 0$  di  $\Sigma^*$ .

Al variare dello stato di equilibrio  $\bar{x}$ , cambia il punto di lavoro su  $\psi(\cdot)$  e quindi la funzione  $\varphi(\cdot)$  assume andamenti diversi:

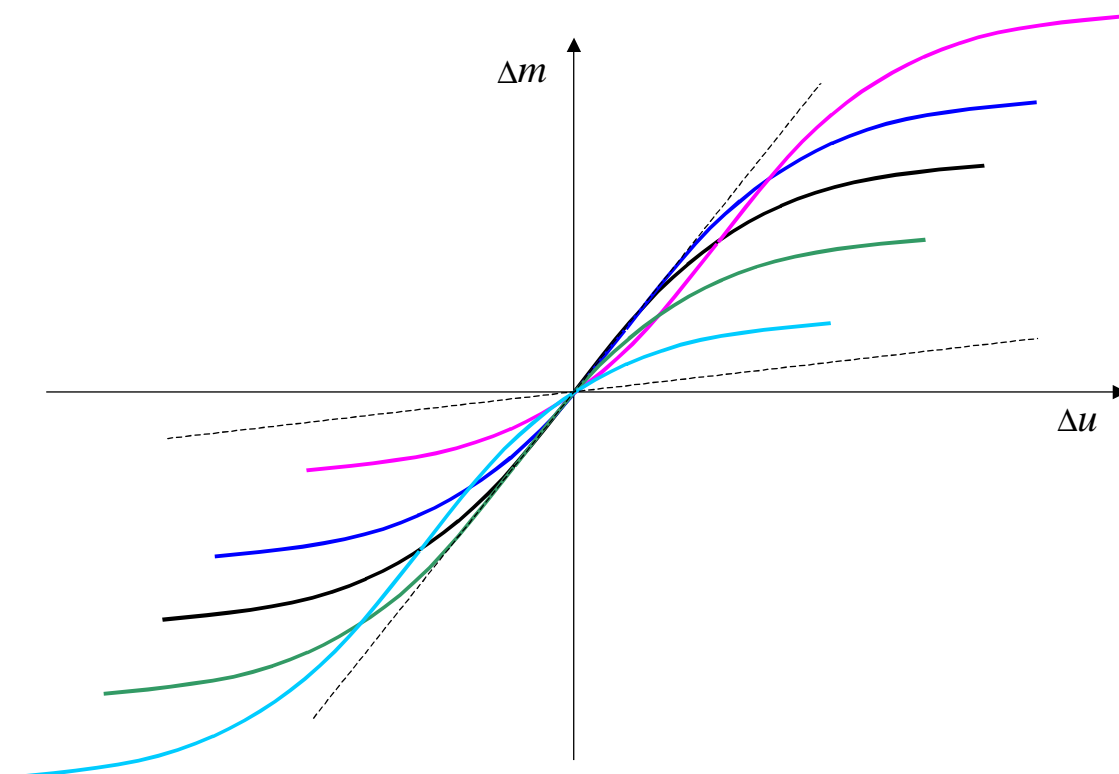


Fig. 7 : Possibili andamenti della caratteristica  $\varphi(\cdot)$ .

Il sistema  $\Sigma^*$  può essere ulteriormente compattato:

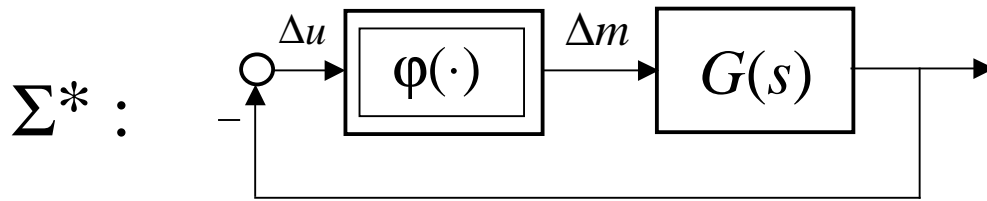


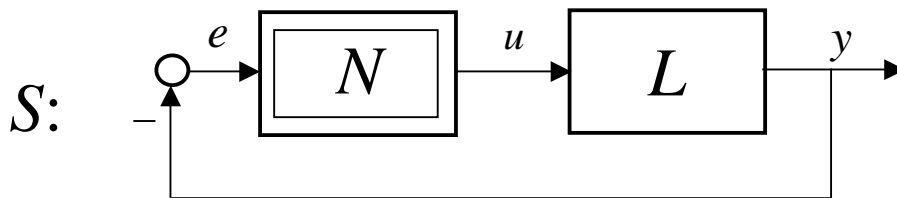
Fig. 8 : Il sistema  $\Sigma^*$  in forma standard (sistema di Lur'e autonomo).

$$G(s) := P(s) T(s) R(s)$$

### Osservazione conclusiva

Tutti gli stati di equilibrio di  $\Sigma$  sono *globalmente stabili* se  $\Delta x = 0$  è uno stato di equilibrio globalmente stabile di  $\Sigma^*$  qualunque sia la caratteristica  $\varphi(\cdot)$ , nell'insieme dei suoi possibili andamenti.

### 3. Sistema di Lur'e autonomo

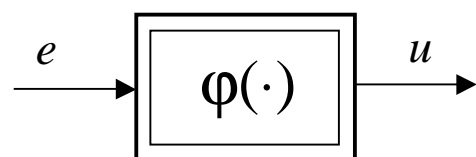


- $L : \begin{cases} \dot{x} = A x + B u \in \mathbf{R}^n \\ y = C x \end{cases}$

$(A, B, C)$  stabilizzabile  
 $\Rightarrow$  Hp:  $(A, B)$  ragg. ,  $(A, C)$  osserv.

$$G(s) = C(s I - A)^{-1} B$$

- $N : u(t) = \varphi(e(t))$   
 $\varphi(\cdot) : \text{caratteristica continua a tratti}$

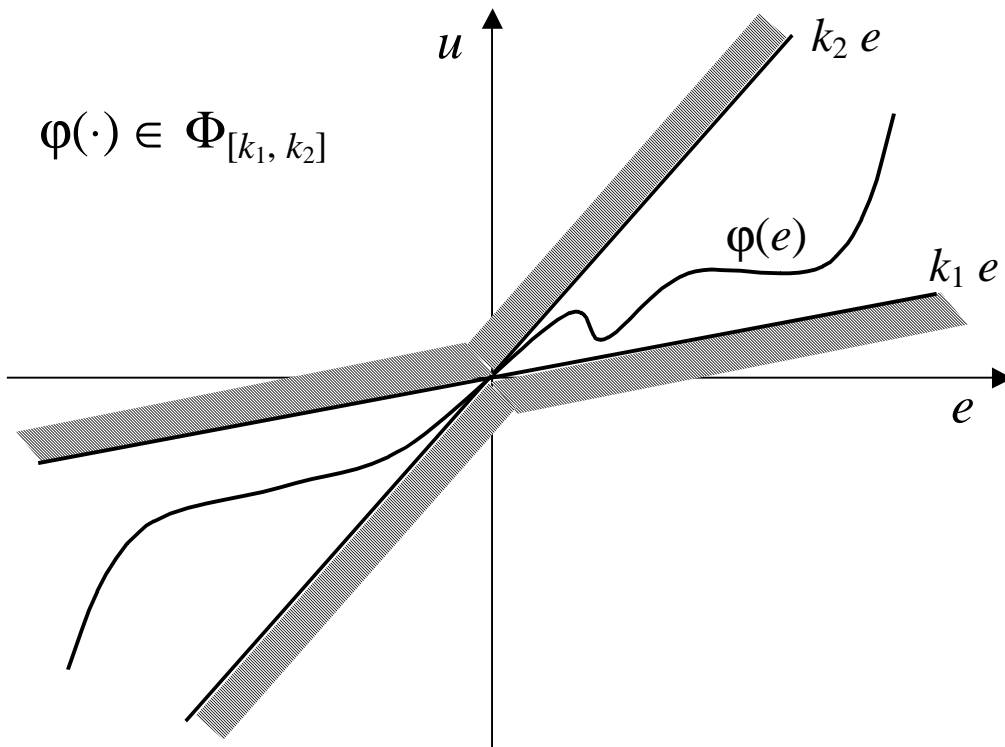


**Definizione 1**

$$\Phi_{[k_1, k_2]} := \left\{ \varphi(\cdot) : \varphi(0) = 0; k_1 \leq \frac{\varphi(e)}{e} \leq k_2, \forall e \neq 0 \right\}, \quad k_2 > k_1$$

$$\underbrace{\hspace{15em}} \\ [k_2 e - \varphi(e)][\varphi(e) - k_1 e] \geq 0, \quad \forall e$$

Ovvero:



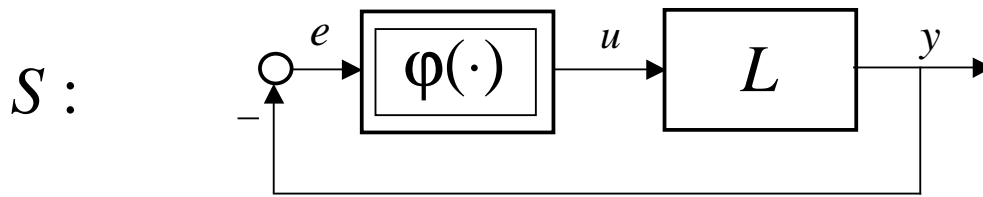
“caratteristica  $\varphi(\cdot)$  nel settore  $[k_1, k_2]$ ”

Analogamente, si possono considerare i settori:

$$(k_1, k_2] \quad , \quad [k_1, k_2) \quad , \quad (k_1, k_2)$$

e gli insiemi:  $\Phi_{(k_1, k_2]}$ , ecc.

### Osservazione



$$S : \quad \dot{x} = A x + B \varphi(-C x) := f(x)$$

L'origine  $x=0$  è uno stato di equilibrio di  $S$ , qualunque sia  $\varphi(\cdot)$  nel settore  $[k_1, k_2]$ :

$$f(0) = 0 \quad , \quad \forall \varphi(\cdot) \in \Phi_{[k_1, k_2]} \quad .$$

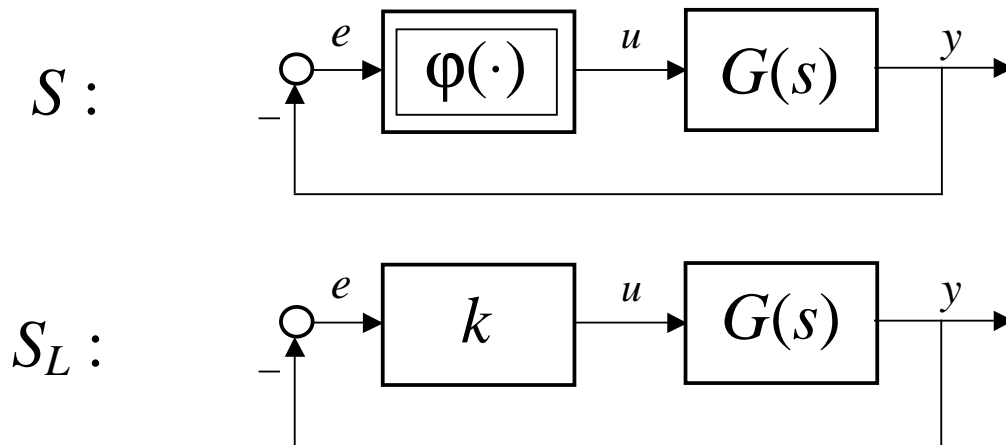
### Definizione 2

Il sistema  $S$  è **assolutamente stabile nel settore**  $[k_1, k_2]$  se  $x=0$  è uno stato di equilibrio globalmente stabile di  $S$ , qualunque sia  $\varphi(\cdot) \in \Phi_{[k_1, k_2]}$ .

### Problema di Lur'e

Trovare condizioni necessarie e/o sufficienti per l'assoluta stabilità di  $S$  nel settore  $[k_1, k_2]$ .

## UNA CONDIZIONE NECESSARIA

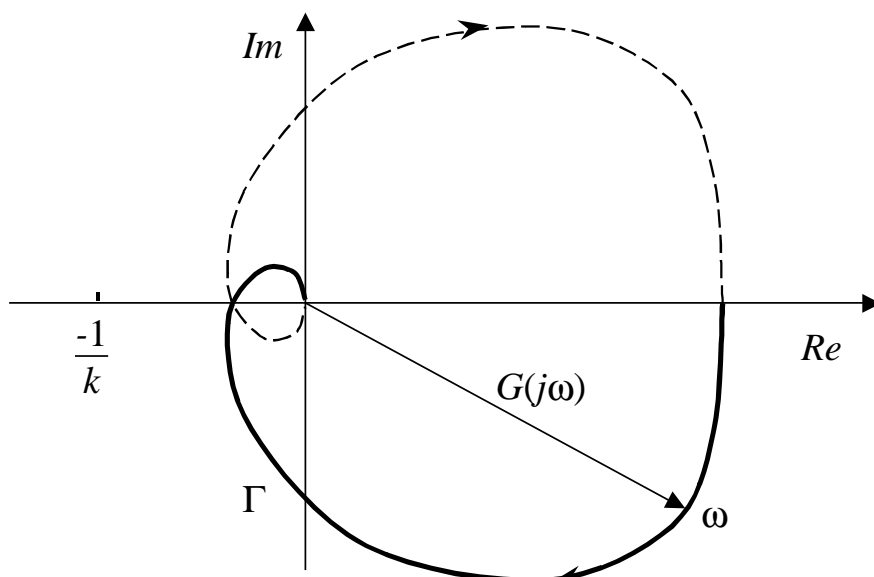


- Se  $S$  è assolutamente stabile nel settore  $[k_1, k_2]$ ,  $S_L$  non può che essere asintoticamente stabile per ogni  $k \in [k_1, k_2]$ .

Questa banale affermazione assume maggiore risalto alla luce delle osservazioni che seguono.

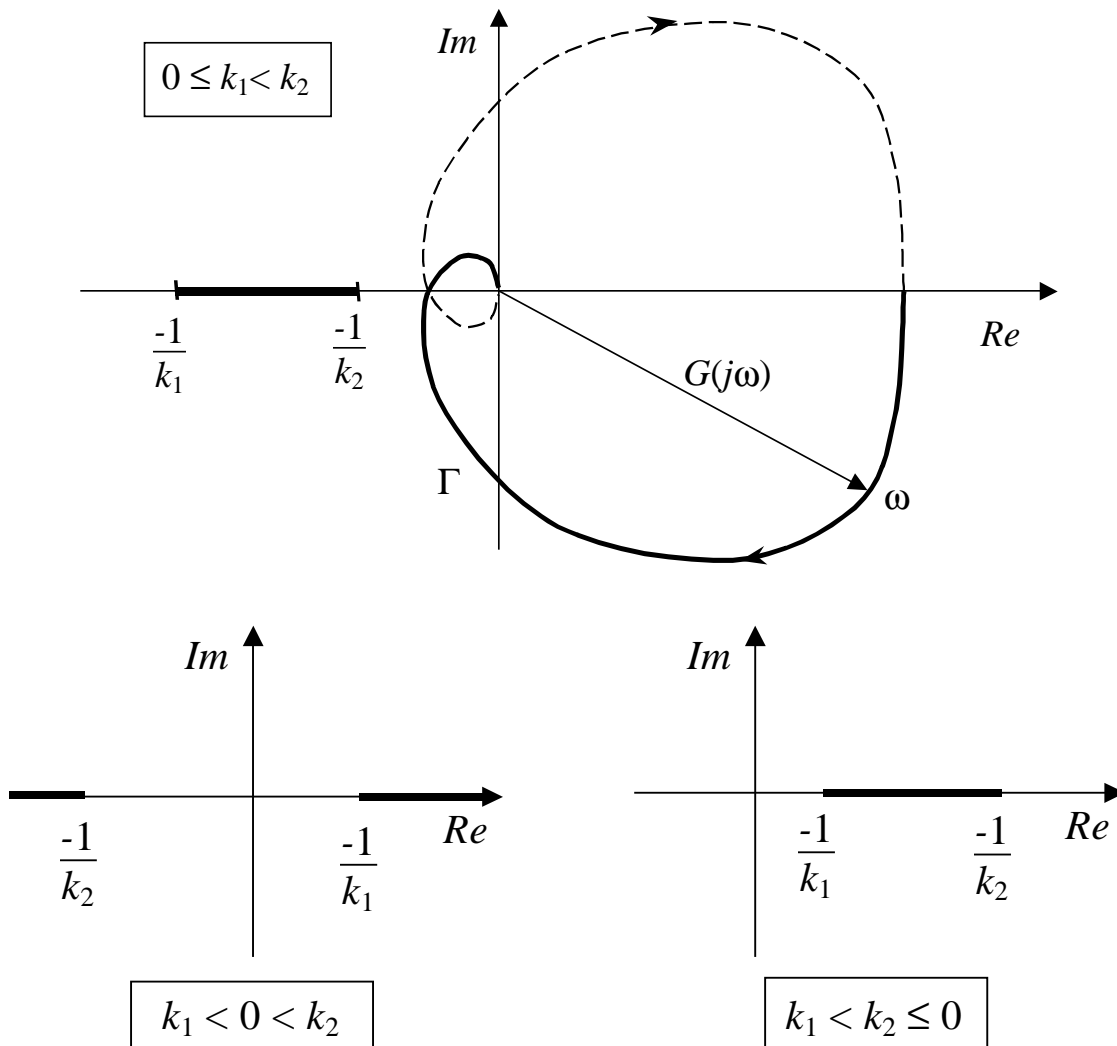
### 1) *Una riformulazione equivalente del criterio di Nyquist*

Il sistema  $S_L$  è asintoticamente stabile se e solo se il numero di giri che il diagramma di Nyquist relativo a  $G(s)$  compie attorno al punto  $-1/k$  è uguale al numero di poli di  $G(s)$  con parte reale positiva.



## 2) Un criterio di stabilità asintotica robusta di $S_L$

Il sistema  $S_L$  è asintoticamente stabile per ogni  $k \in [k_1, k_2]$  se e solo se il numero di giri che il diagramma di Nyquist relativo a  $G(s)$  compie attorno al segmento  $[-1/k_1, -1/k_2]$  è uguale al numero di poli di  $G(s)$  con parte reale positiva.



Abbiamo così dimostrato la seguente condizione necessaria per l'assoluta stabilità di  $S$  nel settore  $[k_1, k_2]$ .

### **Teorema 1** (Condizione necessaria)

Se  $S$  è assolutamente stabile nel settore  $[k_1, k_2]$ , il diagramma di Nyquist relativo a  $G(s)$  compie tanti giri attorno al segmento  $[-1/k_1, -1/k_2]$  quanti sono i poli di  $G(s)$  con parte reale positiva. Se inoltre  $0 \in [k_1, k_2]$ , il sistema  $L$  descritto da  $G(s)$  è asintoticamente stabile.

## ***Congetture***

- 1) La condizione necessaria è anche sufficiente (***Aizerman***)
- 2) Se  $\varphi(\cdot)$  è continuamente differenziabile, e:  $k_1 \leq \frac{d\varphi}{de}(e) \leq k_2, \forall e$ , allora la condizione necessaria è anche sufficiente (***Kalman***)

Purtroppo, nessuna delle due è vera (ci sono controesempi).

## CONDIZIONI SUFFICIENTI

Il risultato principale è costituito dal criterio di Popov, che fornisce una condizione sufficiente per l'assoluta stabilità nel settore  $[0, k]$  del sistema di Lur'e autonomo:

$$S: \quad \dot{x} = A x + B \varphi(-C x) := f(x) \in \mathbf{R}^n,$$

con  $(A, B)$  raggiungibile e  $(A, C)$  osservabile.

***Teorema 2*** (*Settore  $[0, k]$ , Criterio di Popov*)

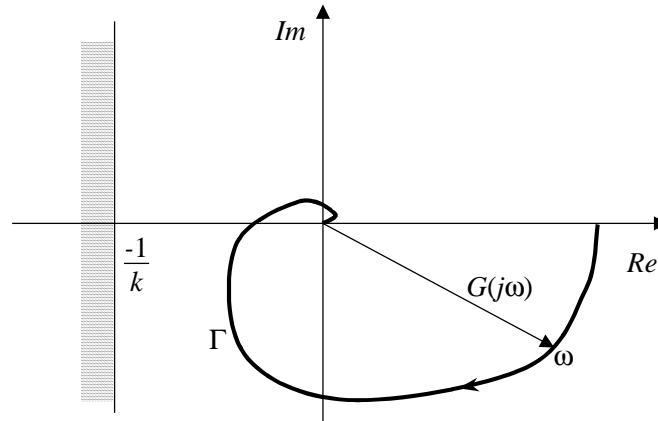
Il sistema  $S$  è assolutamente stabile nel settore  $[0, k]$  se gli autovalori di  $A$  hanno parte reale negativa, e quindi  $G(s) := C (s I - A)^{-1} B$  è la funzione di trasferimento di un sistema asintoticamente stabile (condizione necessaria), e se esiste un numero reale  $q$  tale che:

$$\frac{1}{k} + \operatorname{Re} [(1 + j\omega q) G(j\omega)] > 0 \quad , \quad \forall \omega \geq 0 .$$

△

♣ Caso  $q = 0$

$$\operatorname{Re} [G(j\omega)] > \frac{-1}{k} \quad , \quad \forall \omega \geq 0 .$$



♣ Caso  $q$  qualsiasi

Se  $G := a + j b$ , poniamo:  $G^* = a + j\omega b := a^* + j b^*$ .

Con questa notazione, la condizione (di Popov):

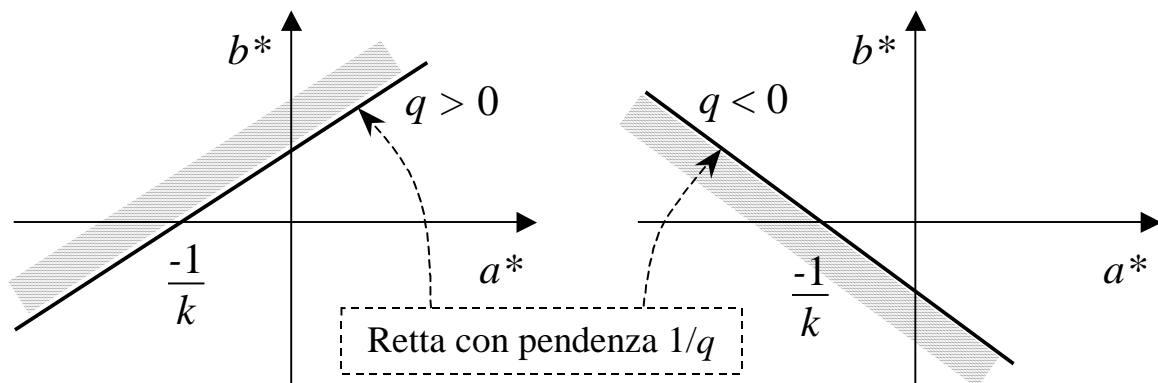
$$\frac{1}{k} + \operatorname{Re} [(1 + j\omega q) G(j\omega)] > 0$$

diventa:

$$\frac{1}{k} + a - \omega q b > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{k} + a^* - q b^* > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad b^* \begin{cases} < \frac{a^*}{q} + \frac{1}{k q} \quad , \quad \text{se } q > 0 \\ > \frac{a^*}{q} + \frac{1}{k q} \quad , \quad \text{se } q < 0 \end{cases}$$



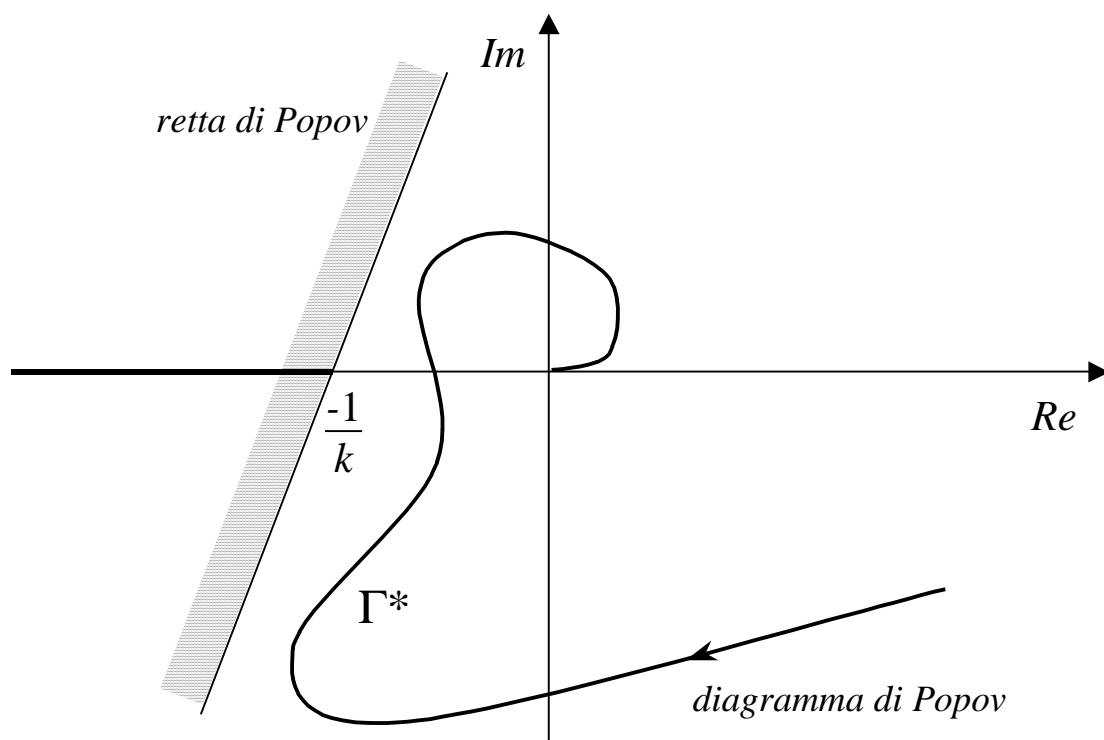


### Conclusione

Dopo aver disegnato il diagramma polare  $\Gamma^*$  di

$$G^*(j\omega) = a(\omega) + j \omega b(\omega)$$

(*diagramma di Popov*), dove  $a(\omega) + j b(\omega) = G(j\omega)$ , si tratta di stabilire se esiste una retta passante per  $-1/k$  (*retta di Popov*) che lasci  $\Gamma^*$  strettamente alla sua destra (tranne, al più, il punto di  $\Gamma^*$  corrispondente a  $\omega \rightarrow \infty$ , che può appartenere alla retta di Popov).

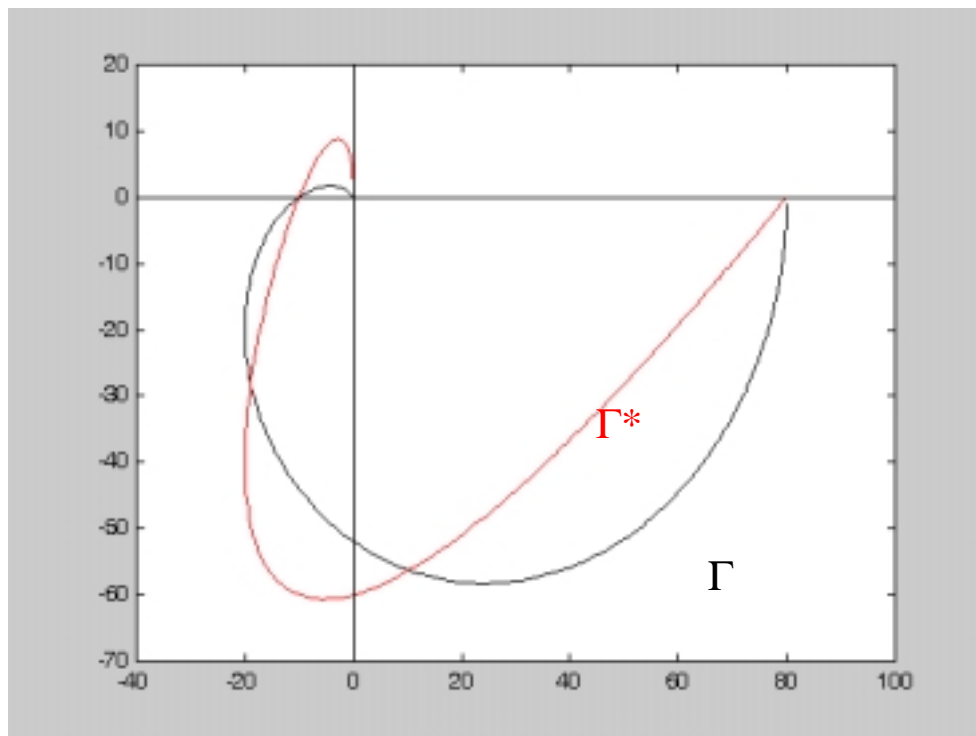
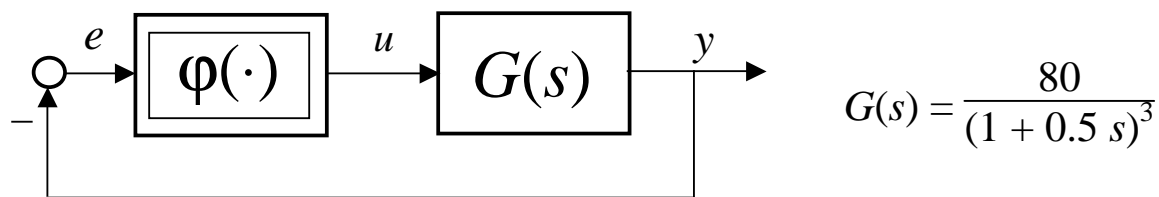


**Definizione.** Data la funzione di trasferimento  $G(s)$ , indichiamo con  $K_P$  il più alto valore di  $K$  tale che sia possibile garantire, mediante il criterio di Popov, l'assoluta stabilità di  $S$  nel settore  $[0, k]$ , per ogni  $k \in [0, K)$ . Indichiamo invece con  $K_N$  il più alto valore di  $K$  tale che il sistema lineare  $S_L$  risulti asintoticamente stabile per ogni  $k \in [0, K)$ .

Una breve riflessione consente di riconoscere che, indicando con  $-a_P$  l'ascissa del punto più destra sul semiasse reale negativo per il quale passa una retta tangente a (ma non intersecante)  $\Gamma^*$ , si ha:  $K_P = 1/a_P$ . Analogamente, indicando con  $-a_N$  l'ascissa del punto più a sinistra che l'asse reale ha in comune con  $\Gamma^*$  (o con  $\Gamma$ ), si ha:  $K_L = 1/a_N$ .

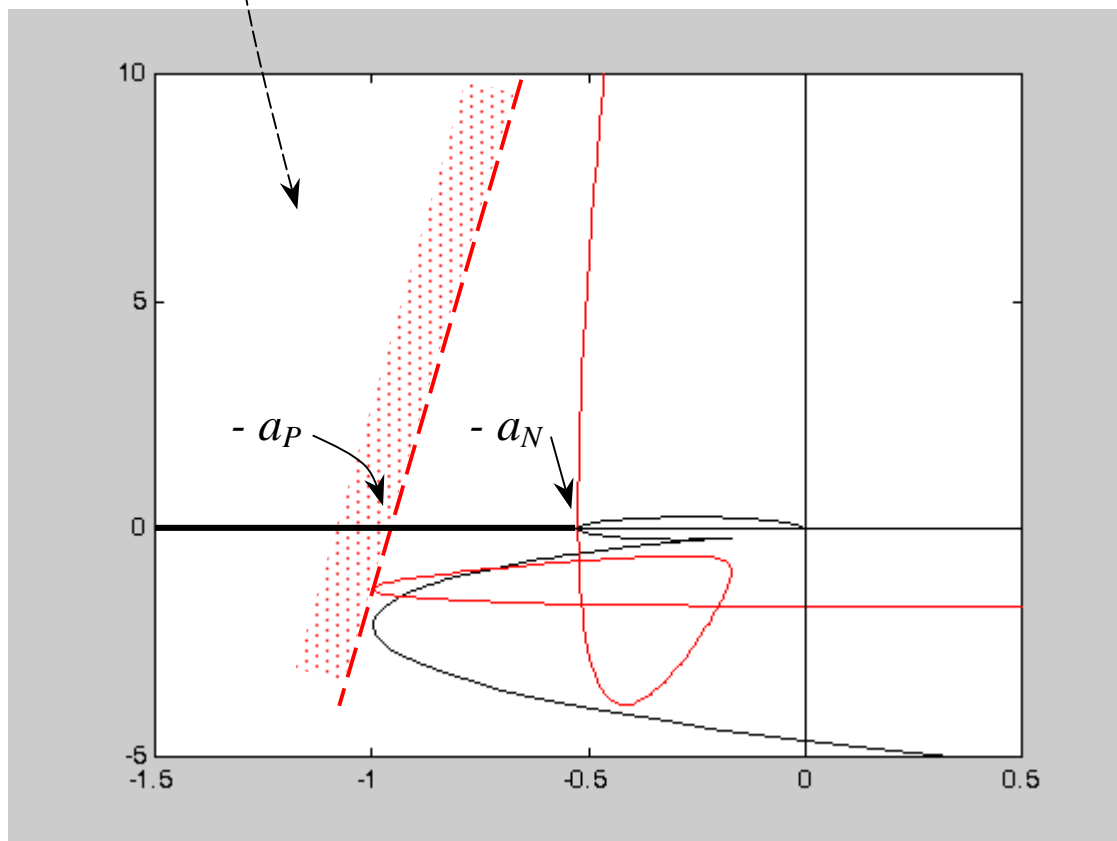
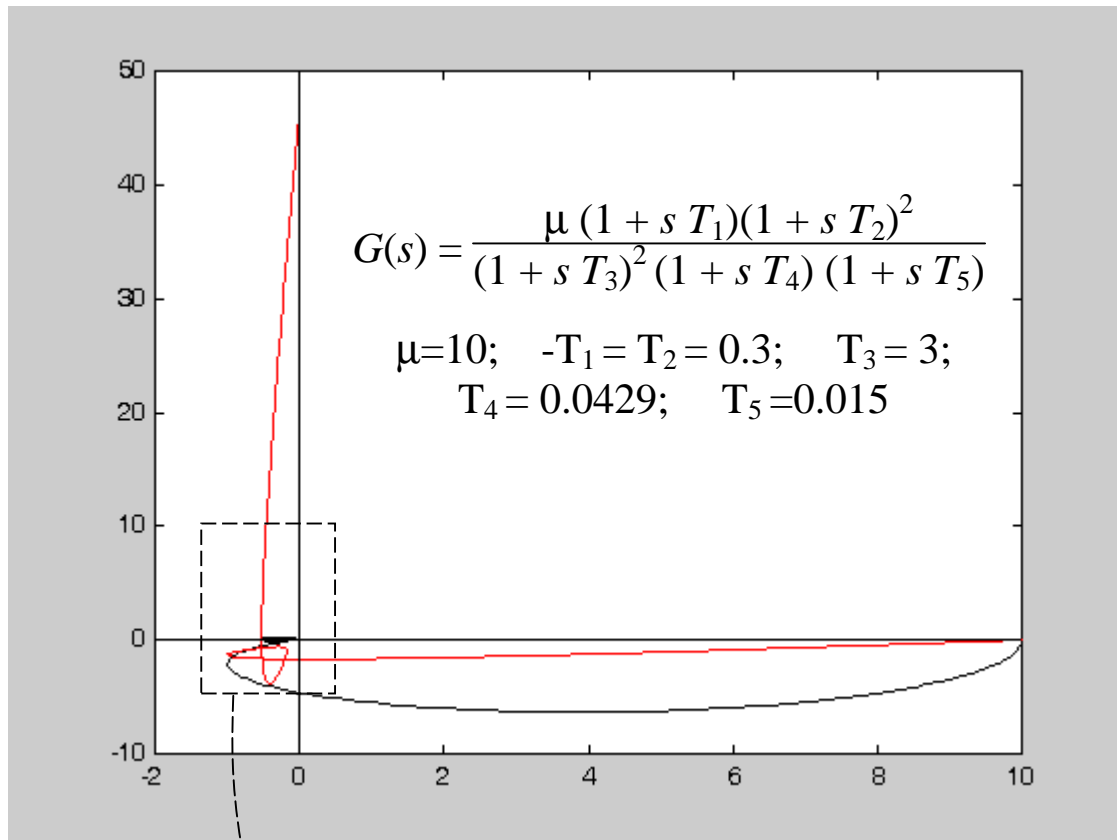
Infine, dovrebbe risultare evidente che, se  $K_P = K_N$ , il caso in esame verifica la congettura di Aizerman.

### Esempio 1



**N.B.:** La congettura di Aizerman è verificata  $K_P = K_N \cong 0.1$

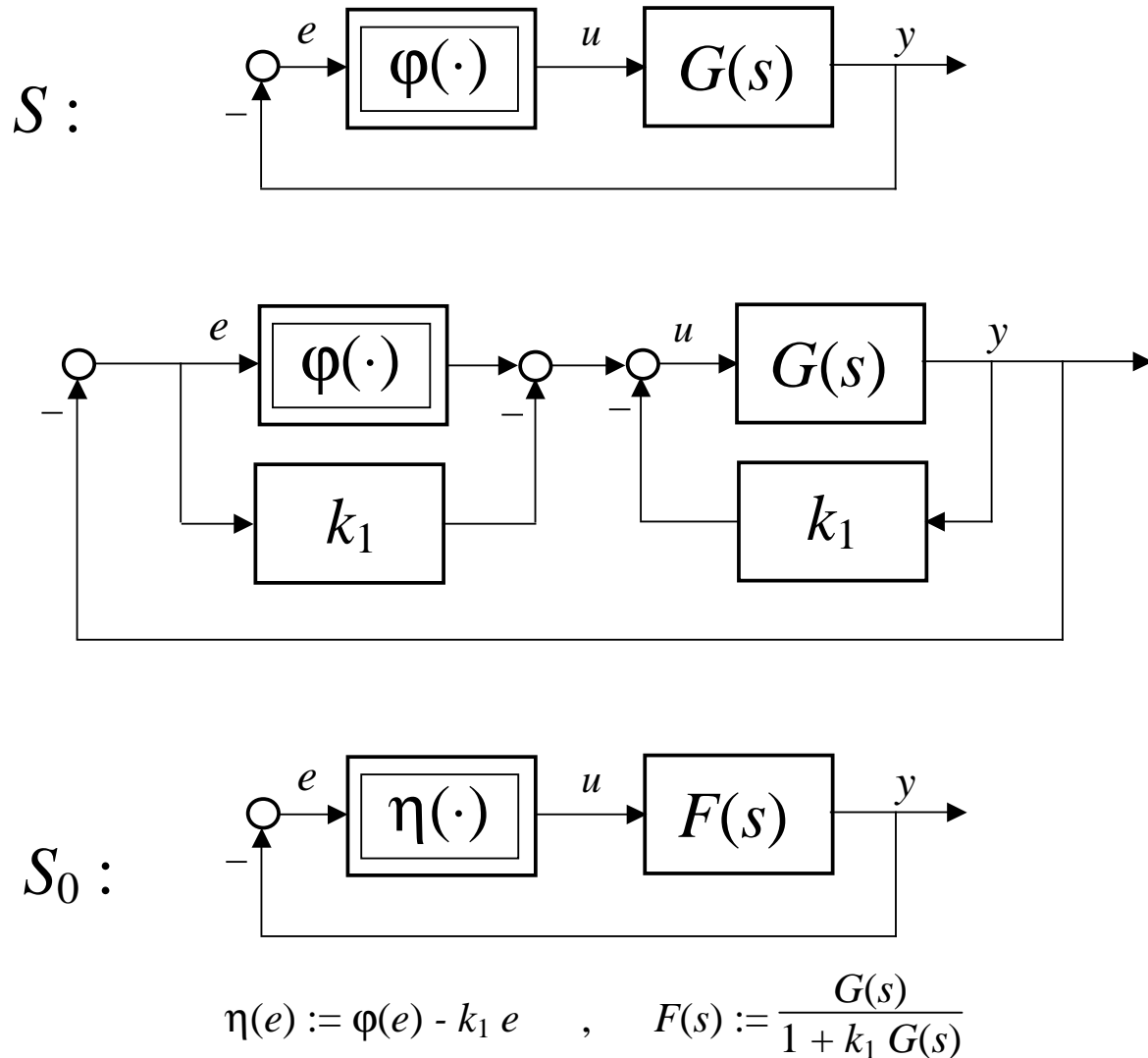
## Esempio 2



$$K_N := 1/a_N \cong 1.8 > K_P := 1/a_P \cong 1.1$$

**Stabilità assoluta nel settore  $[k_1, k_2]$ : una condizione sufficiente**

Un “trucco” interessante:



$$\varphi(\cdot) \in \Phi_{[k_1, k_2]} \quad \Leftrightarrow \quad \eta(\cdot) \in \Phi_{[0, k_2 - k_1]}$$

**Conclusione.** Il sistema  $S$  è assolutamente stabile nel settore  $[k_1, k_2]$  se e solo se il sistema  $S_0$  è assolutamente stabile nel settore  $[0, k]$ , con  $k := k_2 - k_1$ .

**Osservazione.** Per il Criterio di Popov (con  $q = 0$ ), il sistema  $S$  è dunque assolutamente stabile nel settore  $[k_1, k_2]$  se  $F(s)$  è la funzione di trasferimento di un sistema asintoticamente stabile e

$$\operatorname{Re} [F(j\omega)] > \frac{-1}{k} \quad , \quad \forall \omega \geq 0 \quad ,$$

dove:

$$k := k_2 - k_1 \quad , \quad F(s) := \frac{G(s)}{1 + k_1 G(s)} \quad .$$

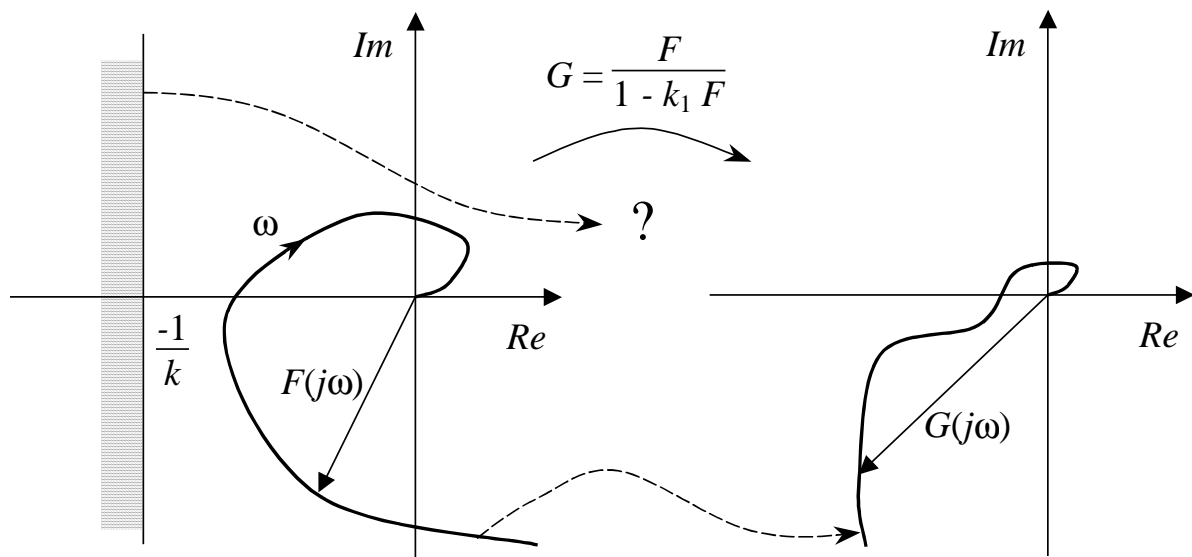
**Domanda.** Questa condizione su  $F$  può essere tradotta in una condizione equivalente che riguardi direttamente  $G$  (precisamente, il diagramma polare  $\Gamma$  della risposta in frequenza associata a  $G$ ) ?

- Innanzitutto, sappiamo che  $F(s)$  è la funzione di trasferimento di un sistema asintoticamente stabile se e solo se il numero di giri che il diagramma di Nyquist di  $G(s)$  compie attorno al punto  $-1/k_1$  è uguale al numero di poli di  $G(s)$  con parte reale positiva. Quindi, se  $G(s)$  rispetta la condizione necessaria (Teorema 1),  $F(s)$  è la funzione di trasferimento di un sistema asintoticamente stabile.
- La trasformazione che fa passare da  $F(j\omega)$  a  $G(j\omega)$  è:

$$G = \frac{F}{1 - k_1 F}$$

$$\text{Infatti, } G = F (1 + k_1 G) \Leftrightarrow G (1 - k_1 F) = F \quad .$$

Per rispondere alla **domanda** che ci siamo posta, basta quindi comprendere che cosa diventa, attraverso questa trasformazione, la retta parallela all'asse immaginario passante per il punto  $-1/k$ .



Poniamo:  $F = \frac{-1}{k} + j \sigma$ ,  $k = k_2 - k_1$ , e vediamo quale linea descrive, al variare di  $\sigma$  da  $-\infty$  a  $+\infty$ , il numero complesso:

$$G = \frac{F}{1 - k_1 F} = \frac{\frac{-1}{k} + j \sigma}{1 + \frac{k_1}{k} - j k_1 \sigma} .$$

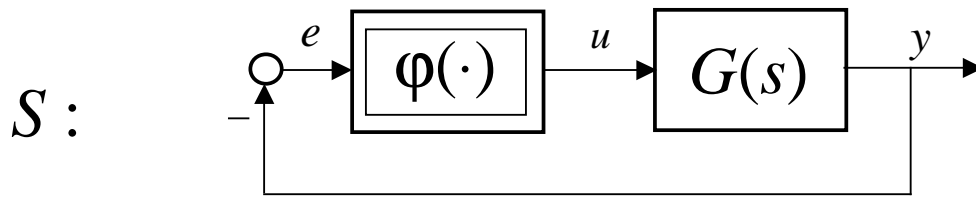
Non è difficile riconoscere che questa linea è una *circonferenza con centro sull'asse reale passante per i punti  $-1/k_1$  e  $-1/k_2$* .

Osserviamo che il semipiano a sinistra della retta parallela all'asse immaginario passante per il punto  $-1/k$  è quello che non contiene l'origine.

### ***Definizione***

Indichiamo quindi con  $O_{[k_1, k_2]}$  la regione chiusa non contenente l'origine delimitata dalla circonferenza con centro sull'asse reale passante per i punti  $-1/k_1$  e  $-1/k_2$ .

Questo ci porta a chiudere con un risultato notevolmente espressivo →

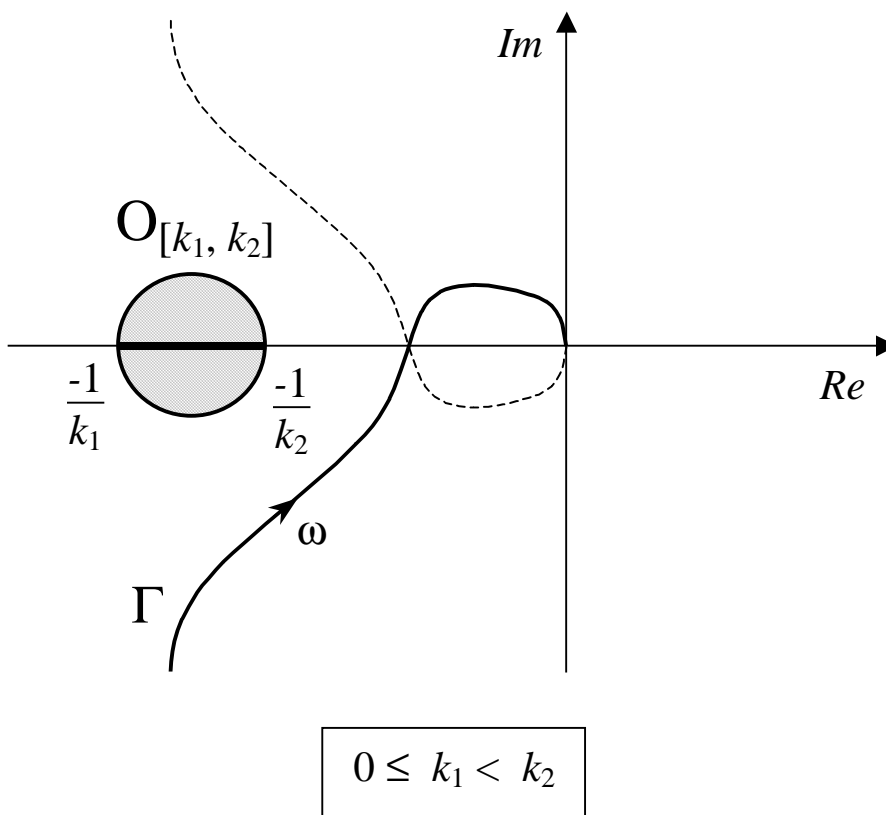


**Teorema 3** (*Criterio del cerchio*)

Con riferimento al sistema  $S$  di Lur'e autonomo, sia:

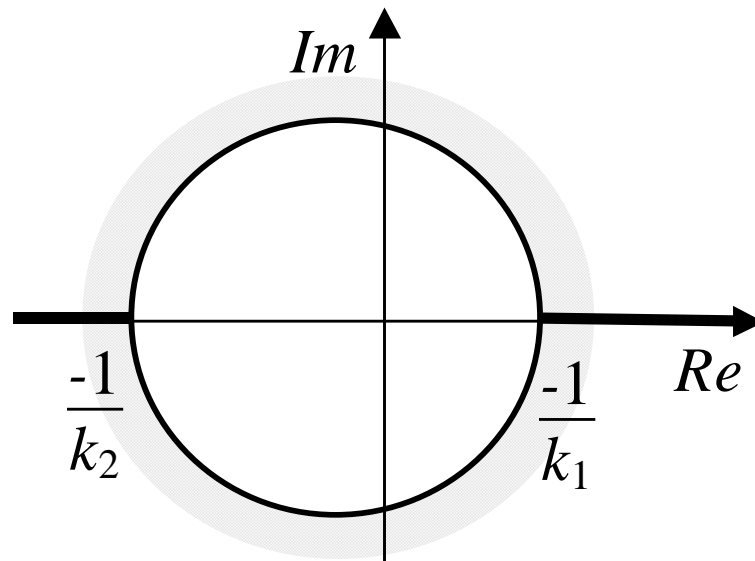
- $P$  il numero di poli di  $G(s)$  con parte reale positiva,
- $N$  il numero di giri che il diagramma di Nyquist di  $G(s)$  compie attorno al cerchio  $O_{[k_1, k_2]}$ ,

allora  $S$  è assolutamente stabile nel settore  $[k_1, k_2]$  se  $N = P$ .

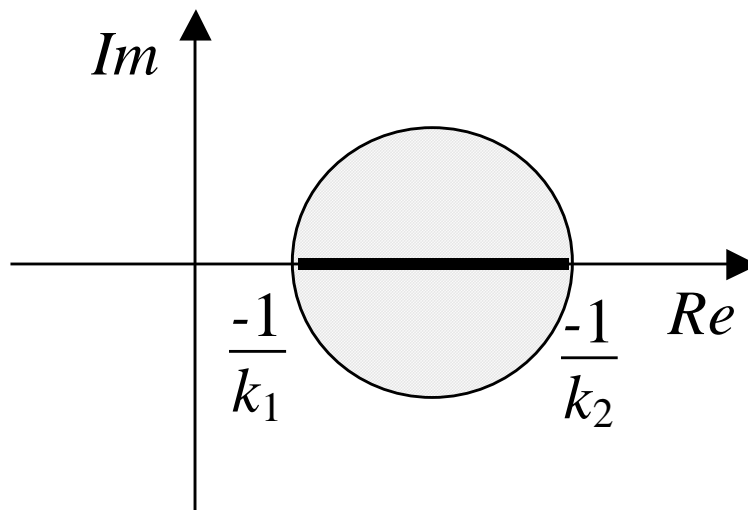


**Commento:** la congettura di Aizerman è “quasi vera”.

$O_{[k_1, k_2]}$



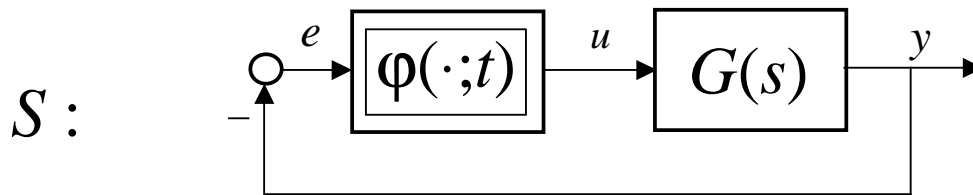
$$k_1 < 0 < k_2$$



$$k_1 < k_2 \leq 0$$



### Caso tempo-variante: cenno



$$S : \quad \dot{x} = A x + B \varphi(-Cx; t) = f(x; t)$$

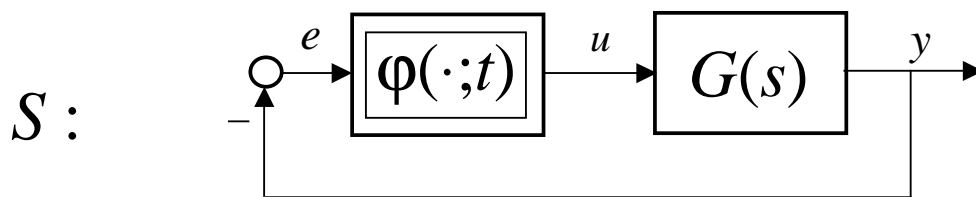
$S : \quad \dot{x} = f(x; t) \quad , \quad x(t_0) = x_0 \quad ; \quad f(0; \cdot) = 0 \quad \Rightarrow \quad x=0 \text{ stato di equilibrio}$

- $\varphi(\cdot; \cdot) \in \Phi_{[k_1, k_2]}$  se  $\varphi(\cdot; t) \in \Phi_{[k_1, k_2]}$ ,  $\forall t \geq t_0$
- se  $\varphi(\cdot; \cdot) \in \Phi_{[k_1, k_2]}$ ,  $x=0$  è uno stato di equilibrio di  $S$
- nelle definizioni di *stabilità*, *stabilità asintotica*, *stabilità globale* di uno stato di equilibrio, le costanti  $\varepsilon$  e  $\delta$  nonché il bacino di attrazione  $B_0$  possono dipendere da  $t_0$ ; se non dipendono, la stabilità dello stato di equilibrio è *uniforme*.

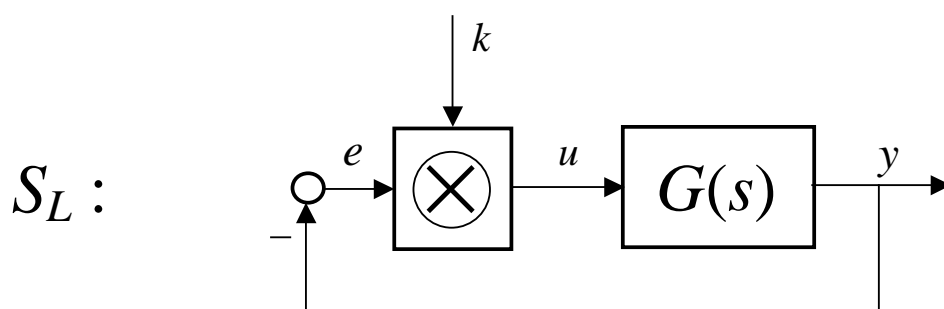
### Definizione

Il sistema di Lur'e tempo-variante  $S$  è assolutamente stabile nel settore  $[k_1, k_2]$  se  $x=0$  è uno stato di equilibrio globalmente uniformemente stabile di  $S$ , qualunque sia  $\varphi(\cdot; \cdot)$  in  $\Phi_{[k_1, k_2]}$ .

**Problema di Lur'e** (perché è importante?)



*Il sistema lineare tempo-variante*



$$u(t) = k(t) e(t)$$

$$S_L : \quad \dot{x}(t) = A x(t) - B k(t) C x(t) = (A - B k(t) C) x(t) := F(t) x(t)$$

- $k(\cdot) \in [k_1, k_2]^*$  se  $k(t) \in [k_1, k_2], \forall t$

#### **Teorema 4**

Il sistema  $S$  è assolutamente stabile nel settore  $[k_1, k_2]$  se e solo se il sistema  $S_L$  è asintoticamente uniformemente stabile per ogni  $k(\cdot)$  in  $[k_1, k_2]^*$ .

*Nel caso tempo variante, l'analisi di stabilità dei sistemi lineari non è molto più semplice di quella relativa a molti sistemi non lineari!*

Il criterio di Popov (setto  $[0, k]$ ) sussiste solo con  $q=0$ . Quindi, nel caso variante, il **criterio del cerchio** è non solo il più generale dei risultati visti, ma anche il più efficace nell'analisi della stabilità asintotica robusta di  $S_L$  relativamente a  $k(\cdot)$  in  $[k_1, k_2]^*$ .