

Capitolo 2
Metodi ingresso-uscita

1. I sistemi come operatori ingresso-uscita

In questo capitolo ci si propone di presentare, con il minimo indispensabile di complessità matematica, alcuni importanti risultati relativi all'analisi di sistemi dinamici non lineari visti come operatori ingresso-uscita; visti, cioè, come “funzioni” il cui dominio e co-dominio sono, rispettivamente, lo spazio dei segnali d'ingresso e lo spazio dei segnali d'uscita. In questa prospettiva, un sistema dinamico è visto dunque non più come un semplice insieme di equazioni algebrico-differenziali, o alle differenze, ma come un oggetto matematico (un'applicazione) che "opera" da uno spazio funzionale ad un altro: ogni possibile andamento dell'uscita è visto come l'immagine, attraverso l'operatore che descrive il sistema, di un particolare andamento dell'ingresso. Su un piano più generale, la situazione ricorda dunque quella che si delinea quando un sistema lineare tempo-invariante viene descritto, nel dominio della frequenza, dalla sua funzione di trasferimento.

L'idea appare immediatamente seducente e stimolante. Soprattutto, per la sua corrispondenza con l'immagine di sistema spontaneamente impressa nella mente, prima di qualsiasi meditata analisi o riflessione. In particolare, si pensi al caso di sistemi composti, nei quali diversi sottosistemi interagiscono fra loro attraverso le rispettive variabili d'ingresso e d'uscita. Tuttavia, non può non lasciare di prim'acchito perplessi la rinuncia ad ogni esplicito riferimento, nella definizione di sistema, alla nozione di *stato*; rinuncia tanto più sorprendente, se si pensa al ruolo che tale nozione ha nella teoria della stabilità alla Liapunov o anche, molto più semplicemente, al ruolo svolto dalla condizione iniziale nel determinare, a parità d'ingresso, lo specifico movimento dello stato del sistema e quindi in generale l'andamento dell'uscita. Prima di procedere, occorre quindi cercare, su questo punto, qualche ulteriore chiarimento; e non dovrà sorprendere se, in una prospettiva ingresso-uscita come quella qui adottata, si farà tipicamente ricorso a formulazioni matematiche dell'idea di stabilità diverse da quelle introdotte da Liapunov oltre un secolo fa. Solo per classi particolari di sistemi dinamici, per i quali siano disponibili entrambe le descrizioni, sarà possibile, ma tutt'altro che ovvio, stabilire un nesso fra le diverse definizioni.

2. Spazi funzionali e operatori

La trattazione qui svolta riguarderà essenzialmente sistemi a tempo continuo; anche se, per gran parte di essa, esiste un corrispondente a tempo discreto. Pur di adottare un punto di vista sufficientemente astratto, sarebbe infatti possibile proporre una presentazione unificata, per la quale si rimanda a testi interamente dedicati all'argomento. Nel seguito considereremo quindi, primariamente, spazi funzionali costituiti da segnali analogici; cioè da funzioni del tempo, definite

sull'insieme \mathbf{R} dei numeri reali (tempo continuo); o su intervalli di \mathbf{R} , ad esempio l'insieme \mathbf{R}^+ dei numeri reali non negativi. Inoltre, gli spazi funzionali ai quali faremo riferimento saranno sempre spazi lineari normati o loro estensioni. Ricordiamo che uno spazio (funzionale) V è lineare se è chiuso rispetto alle operazioni di somma e di moltiplicazione per uno scalare, ed è normato se, sullo spazio in questione, è definita una *norma*, vale a dire una funzione reale non negativa $\|\cdot\|$ che soddisfa le tre proprietà:

$$\begin{aligned} \|v(\cdot)\| = 0 &\Rightarrow v(\cdot) = 0 \\ \|\alpha v(\cdot)\| &= |\alpha| \|v(\cdot)\|, \quad \forall (v(\cdot), \alpha) \in V \times \mathbf{R} \\ \|v_a(\cdot) + v_b(\cdot)\| &\leq \|v_a(\cdot)\| + \|v_b(\cdot)\|, \quad \forall v_a(\cdot), v_b(\cdot) \in V. \end{aligned}$$

Per la descrizione nel dominio del tempo di sistemi dinamici e non, gli spazi funzionali normati d'impiego più frequente sono, per ogni $p > 0$, finito o infinito, gli *spazi L_p di Lebesgue*; cioè gli spazi L_p delle funzioni $v(\cdot)$ definite su \mathbf{R}^+ con $\|v(\cdot)\|_p < \infty$, dove:

$$\|v(\cdot)\|_p := \begin{cases} \left[\int_0^{\infty} |v(t)|^p dt \right]^{1/p}, & p < \infty, \\ \sup_{t \in \mathbf{R}^+} |v(t)| & p = \infty. \end{cases}$$

A rigore, *sup* di $|v(t)|$ su \mathbf{R}^+ è da intendersi qui come “supremo essenziale”; vale a dire come il più piccolo numero reale maggiore o uguale a $|v(t)|$ quasi ovunque su \mathbf{R}^+ ; cioè, su un insieme ottenibile da \mathbf{R}^+ eliminandone al più un sottoinsieme di misura nulla. Per tutti gli scopi della presente trattazione è tuttavia lecito restringere l'attenzione ai soli segnali *continui a tratti*. Se $v(\cdot)$ è un segnale continuo a tratti su \mathbf{R}^+ , *sup* di $|v(t)|$ su \mathbf{R}^+ coincide con l'estremo superiore dell'insieme dei valori di $|v(t)|$, per $t \in \mathbf{R}^+$.

Nella famiglia degli spazi L_p , sono di particolare interesse lo spazio L_1 dei *segnali assolutamente integrabili*, lo spazio L_2 dei *segnali ad energia finita* e lo spazio L_∞ dei *segnali (continui a tratti) uniformemente limitati*. Nel seguito, con il simbolo L indicheremo, per brevità, un generico spazio L_p , riservandoci di essere più precisi solo quando sia necessario. E' anche opportuno osservare che, per ogni p finito, non è propriamente vero che $\|v(\cdot)\|_p = 0$ implica $v(\cdot) = 0$, come vuole la prima delle proprietà di una norma precedentemente ricordate. Infatti, sarebbe ugualmente nulla la norma di qualunque segnale definito su \mathbf{R}^+ che differisca dal segnale $v(\cdot) = 0$ solo su un insieme di misura nulla (ad esempio, in un numero finito di punti). Tuttavia, anche questa difficoltà svanisce se, d'ora in avanti in questo capitolo, continuiamo a prendere in considerazione solo segnali

continui a tratti. Quello identicamente nullo è infatti l'unico segnale continuo a tratti la cui norma L_p sia nulla.

Abbiamo già osservato come tutti gli elementi di L abbiano norma finita e quindi non possano crescere illimitatamente, in valore assoluto, al tendere di t all'infinito. Questo lascia intravedere una palese difficoltà. E' infatti impossibile rappresentare come operatore da L in L un sistema dinamico eventualmente sottoposto a ingressi illimitati o la cui risposta a un ingresso limitato sia illimitata; ad esempio, non è possibile rappresentare in questo modo un sistema lineare instabile (nel senso di Liapunov) o anche stabile ma con ingresso a rampa. E' del tutto evidente che, nella nostra analisi, non è possibile accettare una limitazione di questo tipo. Dobbiamo quindi introdurre un'opportuna *estensione* di L che consenta d'includere segnali generalmente crescenti (in valore assoluto) al tendere di t all'infinito. Per ogni $v(\cdot): \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ e ogni $\tau \geq 0$, indichiamo con $v_\tau(\cdot)$ una funzione di t che coincide con $v(\cdot)$ su $[0, \tau]$ ed è nulla per $t > \tau$. La funzione $v_\tau(\cdot)$ è detta *troncamento a τ* del segnale $v(\cdot)$. Lo spazio esteso L_e può allora essere definito nel modo seguente:

$$L_e := \{v(\cdot) : \|v_\tau(\cdot)\| < \infty, \forall \tau \geq 0\}$$

sicché, ovviamente: $L \subset L_e$; ma, a differenza di quanto accade per L , ad L_e appartengono anche segnali illimitati in norma, come ad esempio una rampa, o un esponenziale con costante di tempo negativa, o anche una sinusoidale con ampiezza linearmente o esponenzialmente crescente.

Sia ora H un operatore da L_e a L_e . Per ogni $u(\cdot) \in L_e$, sia cioè:

$$y(\cdot) = H(u(\cdot)) \in L_e .$$

L'operatore H è *causale* se, per ogni $t \geq 0$, il valore dell'uscita all'istante t non dipende dall'andamento dell'ingresso negli istanti successivi a t . Con la notazione precedentemente introdotta, si può dire, più concisamente, che H è un operatore causale se, $H(u(\cdot))_\tau = H(u(\cdot)_\tau)_\tau$, per ogni $u(\cdot)$ in L_e e per ogni τ in \mathbf{R}^+ . Si può facilmente dimostrare che un operatore H costituito dalla connessione in cascata, o in parallelo, di due operatori causali H_1 e H_2 è causale. Più in generale, ogni operatore ottenuto componendo in modo aciclico operatori causali è causale.

Abbiamo finora indicato un segnale d'ingresso e il corrispondente segnale d'uscita di H con $u(\cdot)$ e con $y(\cdot)$, rispettivamente. Nel seguito di questo capitolo, però, per alleggerire la notazione, il puntino sarà lasciato cadere: $y = H(u) \in L_e$, $\forall u \in L_e$, restando sottinteso che l'argomento u e il valore y dell'operatore H sono

funzioni del tempo definite su \mathbf{R}^+ . La notazione più esplicita verrà occasionalmente ripresa ogni volta che ciò sia ritenuto utile al fine di conseguire una maggiore chiarezza o efficacia.

3. Sistemi: norma indotta, polarizzazione e guadagno

I sistemi qui presi in considerazione saranno essenzialmente sistemi tempo-invarianti a un ingresso e un'uscita; più precisamente, si tratterà di *sistemi non dinamici* descritti dalla funzione (o caratteristica) ingresso-uscita $g(\cdot)$:

$$S : \quad y(t) = g(u(t)) ,$$

oppure di *sistemi dinamici* in forma normale:

$$S : \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \in \mathbf{R}^n \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases} ,$$

con $x(0) = x_0$. Sia nel primo che nel secondo caso, il sistema specifica un operatore causale H da L_e a L_e . Si noti che quando l'ingresso del sistema è l'elemento nullo di L , vale a dire: $u(t) = 0, \forall t \in \mathbf{R}^+$, non è affatto detto che la corrispondente uscita del sistema sia nulla, e neppure che abbia norma finita. In generale, si avrà:

$$H(0) := y_0 \in L_e .$$

Se $y_0 \neq 0$, si dice che l'operatore H (così come il sistema S descritto da H) è *polarizzato*.

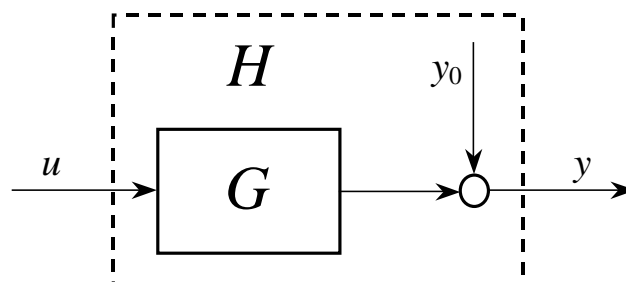


Fig. 1 : L'operatore H .

E' conveniente notare come un operatore polarizzato possa sempre essere descritto come un operatore non polarizzato all'uscita del quale si sommi il segnale y_0 che, ovviamente, è indipendente da u (Fig.1):

$$H(u) = G(u) + y_0, \quad G(0) = 0 \in L.$$

Una breve riflessione consente di riconoscere che G è causale se e solo se anche H lo è.

La *norma indotta* di un operatore causale non polarizzato $G : L_e \rightarrow L_e$ è definita nel modo seguente:

$$\|G\| := \sup_{u \in L - \{0\}} \frac{\|G(u)\|}{\|u\|}.$$

Si noti che nella definizione di norma indotta di G non si fa riferimento a L_e ma a L . Si potrebbe allora pensare che una definizione alternativa e sostanzialmente più corretta potrebbe essere la seguente, che fa invece esplicito riferimento allo spazio funzionale esteso:

$$\|G\|_e := \sup_{\substack{u \in L_e - \{0\} \\ \tau \in \mathbf{R}^+}} \frac{\|G(u)_\tau\|}{\|u_\tau\|}.$$

Ma non è così. Infatti, poiché $L \subset L_e$, si ha: $\|G_e\| \geq \|G\|$. Per altro, poiché G è causale e $u_\tau \in L$ per ogni $\tau \in \mathbf{R}^+$, si ha: $\|G(u)_\tau\| = \|G(u_\tau)_\tau\| \leq \|G\| \|u_\tau\|$, quindi $\|G_e\| \leq \|G\|$. In definitiva: $\|G_e\| = \|G\|$.

Se la norma (indotta) di un operatore causale non polarizzato G esiste finita, si dice che l'operatore è *limitato*. In tal caso, $\gamma^\circ(G) := \|G\| < \infty$ è detto *guadagno a polarizzazione nulla* dell'operatore G e si ha:

$$\|y\| := \|G(u)\| \leq \gamma^\circ(G) \|u\|, \quad \forall u \in L,$$

o, più in generale: $\|y_\tau\| \leq \gamma^\circ(G) \|u_\tau\|, \forall (\tau, u) \in \mathbf{R}^+ \times L_e$.

Si noti che la dizione “operatore limitato” anziché “operatore limitato in norma” può trarre in inganno. Infatti, una funzione è limitata se è limitato l'insieme dei suoi valori; si potrebbe allora supporre che un operatore sia limitato se i suoi valori, cioè le sue uscite, sono limitate (in norma), vale a dire se in nessun caso la norma del segnale d'uscita può superare un determinato limite. Ma il significato della definizione appena introdotta non è affatto questo. Infatti, $\|G\| < \infty$ è lungi dall'implicare: $\|G(u)\| < \infty$ per ogni u .

E' ora conveniente estendere anche agli operatori causali polarizzati le nozioni di “limitatezza” e di “guadagno” appena introdotte. Ciò comporterà, anche per gli operatori non polarizzati, un'appropriata estensione delle rispettive definizioni.

Definizione 1 Operatore causale (debolmente) limitato

Un operatore causale $H : L_e \rightarrow L_e$ è *limitato* se $y_0 := H(0) \in L$ e se l'operatore $G(\cdot) := H(\cdot) - H(0)$ è limitato. H è *debolmente limitato* se esistono $\hat{\gamma}, \hat{\beta} \in \mathbf{R}^+$ tali che:

$$\|H(u)\| \leq \hat{\gamma} \|u\| + \hat{\beta}, \quad \forall u \in L.$$

□

Si noti che, se H è un operatore causale limitato, allora:

$$\|H(u)\| = \|G(u) + y_0\| \leq \|G(u)\| + \|y_0\| \leq \gamma^\circ(G) \|u\| + \|y_0\|$$

e pertanto, coerentemente con il lessico, H è anche debolmente limitato. Non si può però, in generale, affermare il contrario.

Se H è un operatore causale debolmente limitato, il *guadagno* di H è il più piccolo valore di $\hat{\gamma}$ per il quale è verificata la diseuguaglianza che compare nella Definizione 2. Più precisamente, il guadagno di H può essere definito come segue.

Definizione 2 Guadagno di un operatore causale

Il guadagno di un operatore causale (debolmente) limitato è dato da:

$$\gamma(H) := \inf \{ \hat{\gamma} \in \mathbf{R}^+ \mid \exists \hat{\beta} \in \mathbf{R}^+ : \|H(u)\| \leq \hat{\gamma} \|u\| + \hat{\beta}, \forall u \in L \}.$$

□

Sui concetti appena introdotti il lessico non è univoco. Ad esempio, un operatore debolmente limitato è frequentemente indicato come *operatore a guadagno finito* e un operatore limitato come *operatore a guadagno finito senza polarizzazione*.

Molti sistemi di rilevante interesse pratico possono essere ricondotti all'interconnessione di sistemi dinamici lineari tempo-invarianti con sistemi non dinamici la cui caratteristica sia ristretta ad un settore conico del piano ingresso-uscita. Per questa ragione, si presterà ora particolare attenzione al calcolo del guadagno di sistemi del tipo suddetto negli spazi di Lebesgue di maggiore interesse. Gli esempi che seguono hanno anche lo scopo di mostrare che:

- 1) tanto “la limitatezza o meno” quanto “il valore del guadagno” di un operatore $H : L_e \rightarrow L_e$, con $L = L_p$ e $p \in (0, \infty]$, dipendono generalmente da p ;
- 2) anche un operatore non limitato può essere debolmente limitato e avere un guadagno (finito);
- 3) il guadagno di un operatore limitato G non polarizzato può differire dal suo guadagno a polarizzazione nulla; più precisamente: $\gamma(G) \leq \gamma^\circ(G)$.

Esempio 1 *Sistema non dinamico*

Si consideri un sistema S descritto dalla funzione (o caratteristica) ingresso-uscita $g(\cdot) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Sia: $g_0 := g(0)$ e, per ogni $v \in \mathbf{R}$, poniamo: $\tilde{g}(v) := g(v) - g_0$. Supponiamo quindi che:

$$\tilde{\gamma} := \inf \{k \in \mathbf{R}^+ : |\tilde{g}(v)| \leq k |v|, \forall v \in \mathbf{R}\}$$

esista finito; in altre parole, supponiamo che il coefficiente angolare $\tilde{\gamma}$ corrisponda all'apertura del più piccolo settore conico comprendente la caratteristica $g(\cdot)$ e simmetrico rispetto all'asse delle ordinate (Fig.2). Una breve riflessione consente di concludere che, per ogni $u \in L_e$, si può porre:

$$S : \quad y = H(u) = G(u) + y_0 \in L_e$$

dove, per ogni $t \in \mathbf{R}^+$, si ha:

$$y(t) = g(u(t)) ; \quad z(t) = \tilde{g}(u(t)) , \quad G(u) = z ; \quad y_0(t) = g(0) .$$

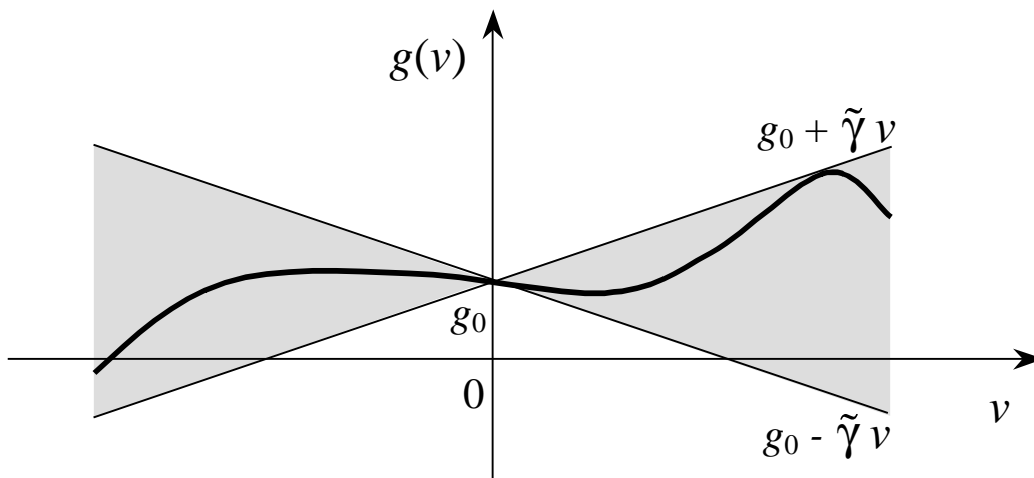


Fig. 2 : La caratteristica $g(\cdot)$.

Esaminiamo innanzitutto il caso $L = L_\infty$. Si ha: $\|y_0\|_\infty = |g_0| := \beta < \infty$. Per quanto riguarda la norma indotta di G , osserviamo che, per ogni $u \in L_\infty$:

$$\|u\|_\infty = \sup_{t \in \mathbf{R}^+} |u(t)| := U$$

$$\|G(u)\|_\infty = \sup_{t \in \mathbf{R}^+} |\tilde{g}(u(t))| = \sup_{|v| \leq U} |\tilde{g}(v)| \leq \tilde{\gamma} U$$

quindi $\|G\|_\infty \leq \tilde{\gamma}$ e questo basta per affermare che G è un operatore limitato. Ma, grazie alla definizione di $\tilde{\gamma}$, è anche facile riconoscere che, per ogni $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo, esistono $k \in (\tilde{\gamma} - \varepsilon, \tilde{\gamma}) \subset \mathbf{R}^+$ e $\bar{v} \in \mathbf{R}$, $\bar{v} \neq 0$, tali che: $|\tilde{g}(\bar{v})| = k |\bar{v}|$. Indicando con \bar{u} un segnale costante e uguale a \bar{v} per ogni t in \mathbf{R}^+ , è evidente che \bar{u} è un elemento di L_∞ e che

$$\frac{\|G(\bar{u})\|_\infty}{\|\bar{u}\|_\infty} = k.$$

Pertanto, indicando con $\gamma_p^\circ(G)$ il guadagno a polarizzazione nulla di G in L_p , sarà:

$$\gamma_\infty^\circ(G) := \|G\|_\infty := \sup_{u \in L_\infty - \{0\}} \frac{\|G(u)\|_\infty}{\|u\|_\infty} = \tilde{\gamma}.$$

Poiché G è limitato e $\|y_0\|_\infty < \infty$, anche H è limitato in L_∞ . Inoltre, per ogni $u \in L_\infty$,

$$\|H(u)\|_\infty = \|G(u) + y_0\|_\infty \leq \|G(u)\|_\infty + \|y_0\|_\infty \leq \|G\|_\infty \|u\|_\infty + \|y_0\|_\infty = \tilde{\gamma} \|u\|_\infty + \beta;$$

quindi, come suggerisce il lessico, H è anche debolmente limitato in L_∞ . Non è detto, però, che il guadagno di H coincida con $\tilde{\gamma}$, vale a dire con il guadagno a polarizzazione nulla di G . Infatti, supponendo, ad esempio, che $g(\cdot)$ sia una caratteristica continuamente derivabile con la derivata prima contenuta nel settore di Fig.2, è possibile dimostrare (come il lettore potrà facilmente riconoscere a titolo di esercizio) che se si pone:

$$\gamma^* := \max \left\{ \lim_{v \rightarrow \pm\infty} \left| \frac{dg}{dv}(v) \right| \right\},$$

allora, indicando con $\gamma_p(H)$ il guadagno di H in L_p , si ha: $\gamma_\infty(H) = \gamma^* \leq \tilde{\gamma}$. Infatti è evidente che l'appartenenza al settore di Fig.2 implica $\gamma^* \leq \tilde{\gamma}$ mentre, pur di associare a γ^* un β^* sufficientemente grande, l'andamento al finito di $g(\cdot)$ diventa irrilevante ai fini della determinazione del guadagno. Si noti infine che, se $g(\cdot)$ è limitata, $\gamma^* = 0$; inoltre, se $g_0 = 0$, allora $H = G$ e in tal caso:

$$\gamma_\infty(G) = \gamma^* = 0 < \tilde{\gamma} = \gamma_\infty^\circ(G);$$

si deve, cioè, constatare che il guadagno di un operatore non polarizzato può risultare minore del suo guadagno a polarizzazione nulla.

Concludiamo questo esempio con due osservazioni. La prima è che, se $L = L_p$, con $p < \infty$ e $g_0 \neq 0$, l'operatore H non è limitato (neppure debolmente), dal momento che $\|y_0\|_p = \infty$. La seconda osservazione ha lo scopo di delineare un caso in cui un operatore non polarizzato, pur non essendo limitato, risulta tuttavia debolmente limitato, e il suo guadagno è addirittura nullo. Supponiamo infatti che sia, per ogni $v \in \mathbf{R}$, $g(v) = \text{sgn}(v)$ (e che quindi, con ogni evidenza, questa caratteristica ingresso-uscita non appartenga al settore di Fig.2); notiamo inoltre che, essendo $g_0 = 0$, essa descrive un operatore non polarizzato ($H = G$). Come segnali d'ingresso, fissiamo l'attenzione su una famiglia di sinusoidi:

$$u(t, \varepsilon) = \varepsilon \sin(t/\pi) .$$

Ovviamente, se \mathbf{Z} è l'insieme dei numeri interi, si ha che, per ogni $\varepsilon > 0$, $|y(t, \varepsilon)|$ è uguale a 1 se $t \in \mathbf{R} - \mathbf{Z}$ ed è nullo altrove (cioè per $t \in \mathbf{Z}$). Pertanto si ha:

$$\|y(\cdot, \varepsilon)\|_\infty = 1 \quad , \quad \|u(\cdot, \varepsilon)\|_\infty = \varepsilon \quad , \quad \forall \varepsilon > 0 .$$

Pertanto,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\|y(\cdot, \varepsilon)\|_\infty}{\|u(\cdot, \varepsilon)\|_\infty} = \infty$$

e ciò è sufficiente per concludere che, qualora si ponga $L = L_\infty$, l'operatore in esame non è limitato (se non, eventualmente, in modo debole). In effetti, è immediato notare che $\|y\|_\infty \leq 1$, qualunque sia $u \in L_\infty$. Quindi, l'operatore G è debolmente limitato e $\gamma_\infty(G) = 0$.

Esempio 2 *Sistema dinamico lineare asintoticamente stabile*

Si consideri un sistema S a un ingresso e un'uscita descritto da:

$$S : \quad \begin{cases} \dot{x} = A x + B u & , \quad x(0) = x_0 \in \mathbf{R}^n \\ y = C x \end{cases}$$

e si supponga che gli autovalori di A abbiano parte reale negativa. Sappiamo che, per ogni $u \in L_e$,

$$y(t) = C e^{At} x_0 + C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau := y_0(t) + \int_0^t g(t-\tau) u(\tau) d\tau$$

e quindi, ricordando la notazione precedentemente adottata, possiamo scrivere (con evidente significato dei simboli):

$$S : \quad y = H(u) = G(u) + y_0 \in L_e \quad , \quad \forall u \in L_e .$$

In particolare, l'operatore non polarizzato G corrisponde al prodotto di convoluzione di u per la risposta impulsiva g di S . Cioè: $G(u) = g * u$.

Cominciamo con l'osservare che, per l'asintotica stabilità di S , si ha:

$$k_1 := \|g\|_1 := \int_0^{\infty} |g(t)| dt = \int_0^{\infty} |C e^{At} B| dt < \infty$$

$$\beta := \|y_0\|_{\infty} := \sup_{t \in \mathbf{R}^+} |y_0(t)| = \sup_{t \in \mathbf{R}^+} |C e^{At} x_0| < \infty .$$

Per quanto riguarda la norma indotta di G , notiamo che, essendo G un operatore *lineare*, il rapporto tra $\|G(u)\|$ e $\|u\|$ è invariante lungo ogni raggio di L . Pertanto:

$$\|G\| := \sup_{u \in L - \{0\}} \frac{\|G(u)\|}{\|u\|} = \sup_{\|u\|=1} \|G(u)\| .$$

♣ Concentriamo ora l'attenzione sul caso $L = L_{\infty}$. Con un procedimento analogo a quello seguito nell'Esempio 1, metteremo innanzitutto in evidenza come risulti in ogni caso: $\|G\|_{\infty} \leq k_1$; quindi vedremo che, con un'opportuna scelta di un ingresso u di norma unitaria, è possibile far sì che $\|G\|_{\infty}$ risulti arbitrariamente prossima a k_1 . In vista delle precedenti osservazioni e della notazione adottata, ciò consentirà di concludere che G è un operatore limitato e che $\gamma_{\infty}^{\circ}(G) = k_1$. Per quanto riguarda la prima affermazione, osserviamo che

$$\|G\|_{\infty} = \sup_{\|u\|_{\infty}=1} \|G(u)\|_{\infty} = \sup_{\|u\|_{\infty}=1} \sup_{t \geq 0} \left| \int_0^t g(t-\tau) u(\tau) d\tau \right| \leq$$

$$\leq \sup_{\|u\|_{\infty}=1} \sup_{t \geq 0} \int_0^t |g(t-\tau)| |u(\tau)| d\tau .$$

Ma, poiché $\|u\|_\infty \leq 1$, si ha $|u(\tau)| \leq 1$ per ogni $\tau \in \mathbf{R}^+$, quindi:

$$\|G\|_\infty \leq \sup_{t \geq 0} \int_0^t |g(t - \tau)| d\tau = \sup_{t \geq 0} \int_0^t |g(\tau)| d\tau = \int_0^\infty |g(\tau)| d\tau = k_1$$

Ora, per ogni m intero positivo e per ogni $\tau \in \mathbf{R}^+$, poniamo:

$$u_m(\tau) := \text{sgn}(g(m - \tau)) .$$

Si noti che la risposta impulsiva di S è nulla per $t < 0$ e quindi $u_m(\tau) = 0$ per $\tau > m$. Di conseguenza,

$$\|G(u_m)\|_\infty = \sup_{t \geq 0} \left| \int_0^t g(t - \tau) u_m(\tau) d\tau \right| = \sup_{t \in [0, m]} \int_0^t |g(t - \tau)| d\tau = \int_0^m |g(\sigma)| d\sigma$$

e pertanto

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|G(u_m)\|_\infty = k_1 .$$

Se ne deduce che G è un operatore limitato in L_∞ , con: $\gamma_\infty^\circ(G) := \|G\|_\infty = k_1$. Poiché $\|y_0\|_\infty = \beta < \infty$, anche H è un operatore limitato in L_∞ ; in particolare:

$$\|y\|_\infty = \|G(u) + y_0\|_\infty \leq \|G(u)\| + \|y_0\|_\infty \leq k_1 \|u\|_\infty + \beta ,$$

per ogni $u \in L_\infty$.

♣ Facendo sempre riferimento al sistema dinamico S , lineare, tempo-invariante ed asintoticamente stabile, passiamo ora ad esaminare il caso $L = L_2$. Come nel caso precedente, fissiamo l'attenzione sull'operatore G non polarizzato, corrispondente al prodotto di convoluzione dell'ingresso u per la risposta impulsiva g di S . Per ogni segnale v Fourier-trasformabile, indichiamo con V la corrispondente trasformata di Fourier; poiché S è asintoticamente stabile, la trasformata di Fourier della risposta impulsiva è data da:

$$G(j\omega) = C (j\omega I - A)^{-1} B .$$

Se, per ogni $u \in L_2$, si pone: $z = G(u)$, palesemente si ha:

$$Z(j\omega) = G(j\omega) U(j\omega) ;$$

quindi, ricordando il teorema di Parseval e ponendo:

$$G_{max} := \max_{\omega \in \mathbf{R}^+} |G(j\omega)|,$$

si ha:

$$\begin{aligned} \|z\|_2^2 &:= \int_0^\infty z^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty |Z(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty |G(j\omega)|^2 |U(j\omega)|^2 d\omega \leq \\ &\leq G_{max}^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty |U(j\omega)|^2 d\omega = G_{max}^2 \int_0^\infty u^2(t) dt = G_{max}^2 \|u\|_2^2 \end{aligned}$$

sicché:

$$\|G\|_2 := \sup_{\|u\|_2 = 1} \|G(u)\|_2 = \sup_{\|u\|_2 = 1} \|z\|_2 \leq G_{max}.$$

Si noti che $|G(\cdot)|$ è una funzione, continua sul semiasse immaginario positivo, che si annulla all'infinito; quindi, G_{max} esiste finito e G è un operatore limitato. Mostriamo ora che il guadagno di G a polarizzazione nulla non solo è non superiore, ma è proprio uguale a G_{max} . Per questo, basta individuare in L_2 un segnale d'ingresso a norma unitaria tale da far sì che la norma della corrispondente uscita di G possa risultare indefinitamente prossima a G_{max} . Sia dunque, per ogni t in \mathbf{R}^+ e per ogni $\alpha > 0$:

$$u_\alpha(t) = M(\alpha) e^{-\alpha t^2} \cos(\Omega t) \quad , \quad M(\alpha) := \left[\int_0^\infty (e^{-\alpha t^2} \cos(\Omega t))^2 dt \right]^{-1/2}$$

sicché $\|u(\cdot; \alpha)\|_2 = 1$, mentre:

$$U(j\omega; \alpha) = \sqrt{\frac{\pi}{4\alpha}} \left[e^{-(\omega - \Omega)^2/4\alpha} + e^{-(\omega + \Omega)^2/4\alpha} \right]$$

e in particolare:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} U(j\omega; \alpha) = \pi [\delta(\omega - \Omega) + \delta(\omega + \Omega)].$$

Pertanto, se $z(\cdot; \alpha) := G(u(\cdot; \alpha))$, si ha:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|z(\cdot; \alpha)\|_2 = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega)|^2 |U(j\omega; \alpha)|^2 d\omega} = G_{max}.$$

Dunque, $\gamma_2^\circ(G) := \|G\|_2 = G_{max}$. In generale, si può dimostrare che, quando S è asintoticamente stabile, il corrispondente operatore H , palesemente causale, è limitato in L_{pe} , per ogni $p > 0$.

3.1 Operatori affini

I precedenti esempi mostrano che un sistema lineare è descritto da un operatore causale $H : L_e \rightarrow L_e$ della forma: $H(u) = G(u) + y_0$, con G lineare. Un operatore causale cosiffatto è detto *affine*.

Teorema 1 *Operatori causali affini debolmente limitati*

Un operatore causale affine $H(\cdot) = G(\cdot) + y_0$ debolmente limitato è limitato e

$$\gamma(H) = \gamma^\circ(G).$$

Prova. Per la dimostrazione, è conveniente premettere il seguente risultato.

Lemma 1

Se $H(\cdot) = G(\cdot) + y_0$ è un operatore causale affine debolmente limitato, allora $\|H(0)\| < \infty$ e

$$\gamma(H) \geq \frac{\|G(u)\|}{\|u\|}, \quad \forall u \in L - \{0\}.$$

Prova del Lemma 1. Se H è causale e debolmente limitato, esistono $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^+$ tali che, per ogni u in L , sia:

$$\|H(u)\| \leq \alpha \|u\| + \beta, \quad \alpha = \gamma(H).$$

In particolare: $\|H(0)\| = \|y_0\| \leq \beta < \infty$. Inoltre, per ogni u in $L - \{0\}$ e $\alpha > 0$:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\|H(\alpha u)\|}{\|\alpha u\|} \leq \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\gamma(H) \|\alpha u\| + \beta}{\|\alpha u\|} = \gamma(H) + \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\beta}{\alpha \|u\|} = \gamma(H).$$

Per altro, ricordando che, se $c = a + b$, non solo $\|c\| \leq \|a\| + \|b\|$, ma anche $a = c - b$ e quindi $\|a\| \leq \|c\| + \|b\|$, cioè: $\|c\| \geq \|a\| - \|b\|$, è facile (partendo dal centro) riconoscere che:

$$\begin{aligned} \frac{\|G(u)\|}{\|u\|} - \frac{\|y_0\|}{\|\alpha u\|} &= \frac{\|G(\alpha u)\| - \|y_0\|}{\|\alpha u\|} \leq \\ &\leq \frac{\|H(\alpha u)\|}{\|\alpha u\|} \leq \\ &\leq \frac{\|G(\alpha u)\| + \|y_0\|}{\|\alpha u\|} = \frac{\|G(u)\|}{\|u\|} + \frac{\|y_0\|}{\|\alpha u\|}; \end{aligned}$$

pertanto:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\|H(\alpha u)\|}{\|\alpha u\|} = \frac{\|G(u)\|}{\|u\|}$$

e la conclusione è quanto volevasi dimostrare.

Prova del Teorema 1. Dal Lemma 1 segue immediatamente che, sotto le ipotesi del Teorema 1, G è un operatore limitato e $\gamma^\circ(G) \leq \gamma(H)$. D'altra parte,

$$\|H(u)\| = \|G(u) + y_0\| \leq \|G(u)\| + \|y_0\| \leq \gamma^\circ(G) \|u\| + \|y_0\| \quad , \quad \forall u \in L$$

Quindi, per definizione di guadagno, $\gamma(H) \leq \gamma^\circ(G)$. Ne segue che $\gamma(H) = \gamma^\circ(G)$.

4. Stabilità ingresso-uscita o L -stabilità

La stabilità è, com'è noto, una nozione basilare della teoria dei sistemi dinamici che tuttavia richiede, ad evitare equivoci o fraintendimenti, una certa attenzione. Attenzione, si badi, che si rivela necessaria non solo da un punto di vista strettamente tecnico, vale a dire per quanto riguarda le diverse formulazioni matematiche connesse al concetto in questione o i risultati che ne conseguono, ma anche da un punto di vista più generale: una prospettiva più attenta alla natura della proprietà fondamentale connessa all'aggettivo *stabile* e alla varietà degli oggetti ai quali, in teoria dei sistemi e del controllo, esso può essere associato, e non sempre con significato univoco.

La stabilità alla Liapunov, universalmente posta a fondamento delle trattazioni di base orientate all'ingegneria del controllo, riguarda primariamente i singoli *movimenti* dello stato. Fin dai primi passi su questo terreno affascinante ma delicato, s'impara che in un medesimo sistema dinamico possono coesistere movimenti (dello stato) stabili, a loro volta distinguibili in semplicemente o asintoticamente stabili, e movimenti instabili. Questo solo fatto rende palesemente inconsistente il riferimento acritico, pure così diffuso nel

linguaggio corrente, dell'aggettivo stabile all'intero sistema. Una strepitosa eccezione a questo stato di cose è rappresentata dai sistemi dinamici lineari, per i quali gli aggettivi stabile, instabile o asintoticamente stabile (nel senso di Liapunov) sono, com'è facile riconoscere, del tutto appropriati. Naturalmente, è possibile parlare di stabilità (alla Liapunov) anche per sistemi non lineari, ma ciò non è affatto scontato: richiede definizioni precise, in qualche modo limitative e comunque soggette ad una relativa arbitrarietà.

Un secondo punto meritevole di attenzione, nel contesto della stabilità alla Liapunov, è più direttamente legato alla definizione stessa di stabilità del movimento. Nella lingua parlata, l'aggettivo stabile evoca un ventaglio di significati non dissimile da quello relativo a termini come solido, robusto; esso attiene alla capacità di un oggetto, concreto o astratto che sia, di mantenere alcuni dei suoi connotati caratteristici al variare, entro certi limiti, delle condizioni che ne determinano il futuro comportamento. Nella tecnica, per non dire nella scienza, occorre ovviamente una minor vaghezza. Basti pensare a come si siano venute distinguendo, nel nostro ambito, le nozioni di stabilità e di robustezza (stabile può essere un oggetto, robusta una proprietà, un pregio). Nella scia di Liapunov si osservò che ogni particolare movimento dello stato, in un sistema dinamico, è determinato dallo stato iniziale e dall'andamento dell'ingresso dall'istante iniziale in poi. La scelta fu di ancorare la nozione di stabilità del movimento alla sostanziale capacità di quest'ultimo, a fronte di variazioni del solo stato iniziale, di subire nel tempo perturbazioni limitate, commisurate all'entità della variazione impressa allo stato iniziale. L'andamento dell'ingresso doveva comunque restare rigorosamente invariato.

Quando per la descrizione di un sistema (dinamico o no) si adotti un operatore il cui dominio sia lo spazio dei segnali d'ingresso e codominio quello dei segnali d'uscita, s'impone evidentemente la rinuncia ad ogni riferimento allo stato del sistema: ai suoi movimenti e al suo valore iniziale. Inoltre, l'aggettivo stabile, o instabile, non può che essere attribuito fin dall'inizio al *sistema* nella sua interezza. Ad esso dovrà essere associata, in generale, la persistenza di una qualche proprietà dell'uscita, ad esempio la limitatezza (in norma), al variare dell'ingresso in un ambito accuratamente specificato. In particolare, e contrariamente a quanto accade per la stabilità alla Liapunov, sarà del tutto plausibile chiedersi se sia stabile, da questo diverso punto di vista, un sistema non dinamico. Come si vede, la prospettiva cambia in modo sostanziale e, se si esclude la classe dei sistemi dinamici lineari, in un certo senso estranei all'obiettivo centrale della presente trattazione, solo in casi rari, anche se significativi, è possibile stabilire una connessione precisa fra la stabilità del sistema (in uno dei significati "alla Liapunov") e la stabilità (in un senso ancora da precisare) dell'operatore che lo rappresenta.

Una breve riflessione consente d'intuire a priori che la stabilità di un operatore H , così come la sua eventuale limitatezza, dipende dagli spazi normati che ne costituiscono il dominio e il codominio. E ciò anche nel caso, al quale continueremo ad attenerci nella presente trattazione, in cui dominio e codominio coincidano; siano, cioè, il medesimo spazio funzionale L_e . Per questa ragione, è conveniente associare alla definizione di stabilità ingresso-uscita l'indicazione dello spazio normato di riferimento.

Definizione 3 L -stabilità

Un operatore causale $H : L_e \rightarrow L_e$ è L -stabile se $H(L) \subset L$; cioè se:

$$H(u) \in L \quad , \quad \forall u \in L .$$

□

In particolare, se H è un operatore causale L_∞ -stabile, la risposta di H ad ogni segnale u limitato è, per definizione, un segnale $H(u)$ anch'esso limitato. Con un termine mutuato dalla letteratura anglosassone e ormai di uso corrente, un operatore causale H che sia L_∞ -stabile è perciò detto anche *bibo-stabile*, dove la sigla “bibo” sta per “bounded-input bounded-output”.

Alcuni autori preferiscono riferire la definizione di L -stabilità ad una proprietà alternativa ma del tutto equivalente, come mostra il seguente teorema.

Teorema 2

Un operatore causale $H : L_e \rightarrow L_e$ è L -stabile se e solo se esistono una funzione continua e crescente $\sigma(\cdot) : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$, con $\sigma(0) = 0$, e una costante $\beta \in \mathbf{R}^+$ tali che:

$$\|H(u)\| \leq \sigma(\|u\|) + \beta \quad , \quad \forall u \in L .$$

Prova. La sufficienza è immediata. Per quanto riguarda la necessità, osserviamo che, per ogni $v \in \mathbf{R}^+$, esiste finito

$$\zeta(v) := \sup_{\substack{\|u\| \leq v \\ u \in L}} \|H(u)\| .$$

Pertanto, $\|H(u)\| \leq \zeta(\|u\|)$, per ogni $u \in L$. Poiché $\zeta(\cdot)$ è una funzione non negativa e non decrescente su \mathbf{R}^+ , è sempre possibile trovare una costante $\beta \in \mathbf{R}^+$ e una funzione continua e crescente $\sigma(\cdot) : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$, con $\sigma(0) = 0$, tali che:

$$\zeta(v) \leq \sigma(v) + \beta \quad , \quad \forall v \in \mathbf{R}^+$$

e quindi:

$$\|H(u)\| \leq \zeta(\|u\|) \leq \sigma(\|u\|) + \beta \quad , \quad \forall u \in L \quad .$$

Corollario 1 *Stabilità degli operatori causali limitati*

Un operatore causale $H : L_e \rightarrow L_e$ debolmente limitato è L -stabile. ◻

Si noti che, se la limitatezza implica la stabilità ingresso-uscita, in generale non è vero il contrario. A riprova, si può osservare come ad un sistema non dinamico descritto da una caratteristica ingresso-uscita $g(\cdot) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ corrisponda un operatore H che è sempre L_∞ -stabile, se g è continua, ma non è L_p -stabile, se $g_0 \neq 0$ e $p < \infty$ (Esempio 1); per altro, pur se L_∞ -stabile, l'operatore H è debolmente limitato in L_∞ solo nel caso in cui $|g(v)|$ cresca al più linearmente al tendere di v all'infinito.

Alla luce del Corollario 1, affinché un operatore sia L -stabile è necessario che la condizione $H(u) \in L$, o equivalentemente: $\|H(u)\| \leq \sigma(\|u\|) + \beta$, sia verificata per tutti gli u in L . In qualche caso ciò può risultare eccessivamente restrittivo ed essere quindi conveniente fare riferimento ad una definizione più debole.

Definizione L -stabilità “in piccolo”

Un operatore causale $H : L_e \rightarrow L_e$ è b - L -stabile se esistono una costante $b > 0$, tale che $H(u) \in L$ per tutti gli $u \in L$, con $\|u\|_\infty \leq b$.

Esempio 3

Si consideri un sistema non dinamico S , con ingresso u e uscita y , descritto da una caratteristica $g(\cdot) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, così definita:

$$g(v) \quad := \quad \begin{cases} \frac{v}{1-v^2} \quad , & \text{se } |v| \neq 1 \quad , \\ 0 \quad , & \text{se } |v| = 1 \quad . \end{cases}$$

Una breve riflessione consente di riconoscere che S , o meglio l'operatore non polarizzato H ad esso associato, è b - L_p -stabile per ogni $p \in (0, \infty]$ e per ogni $b \in (0, 1)$, ma non è b - L_p -stabile se $b \geq 1$, qualunque sia p . ◻

Si noti che la condizione $\|u\|_\infty \leq b$ non esclude che $\|u\|_p$ possa assumere valori illimitatamente grandi, quando p ha un valore finito. A conferma, si consideri ad esempio il segnale $u(t) = b e^{-t/\tau}$, $\tau > 0$, $t \in \mathbf{R}^+$, la cui norma in L_p è b , se $p = \infty$,

mentre, per $p \in (0, \infty)$, è data da: $b (\tau/p)^{1/p}$. E' immediato constatare che quest'ultima norma cresce illimitatamente al tendere di τ all'infinito.

La natura "locale", sia pure soltanto nello spazio dei segnali d'ingresso, del concetto di b -L -stabilità induce a ritenere plausibile l'esistenza di una qualche interessante connessione tra questo tipo di stabilità di un operatore causale H e la stabilità, nel senso di Liapunov, dei movimenti dello stato (e delle conseguenti risposte) che, in un sistema dinamico S sufficientemente regolare, si sviluppano in prossimità di uno stato di equilibrio asintoticamente stabile, corrispondente all'ingresso nullo.

Prima di dare a questa intuizione una formulazione più precisa sotto forma di Proposizione 1, ricordiamo che, per ogni q intero positivo e per ogni $r > 0$, è conveniente indicare con \mathbf{B}_r^q la sfera di raggio r e centro l'origine in \mathbf{R}^q , cioè:

$$\mathbf{B}_r^q := \{v \in \mathbf{R}^q : \|v\| < r\} \quad , \quad \mathbf{B}_r := \mathbf{B}_1^1 = (-r, r) .$$

Proposizione 1 L -stabilità in piccolo indotta da stabilità alla Liapunov

Si consideri un sistema dinamico S a un ingresso e un'uscita:

$$S : \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) , & x(0) := x_0 \in \mathbf{R}^n \\ y(t) = g(x(t), u(t)) , \end{cases}$$

e si supponga che in \mathbf{R}^+ siano rintracciabili due costanti positive: z, w e tre costanti non negative: η_0, η_1, η_2 tali che le funzioni f e g soddisfino le condizioni seguenti:

1. $f(0, 0) = 0$ ($x = 0$ è uno stato di equilibrio di S corrispondente a $u = 0$),
2. $f(\cdot, \cdot)$ è Lipschitz-continua e $g(\cdot, \cdot)$ è continua in $\mathbf{B}_z^n \times \mathbf{B}_w$,
3. $\|f(x, u) - f(x, 0)\| \leq \eta_0 |u|$, $|g(x, u)| \leq \eta_1 \|x\| + \eta_2 |u|$, $\forall (x, u) \in \mathbf{B}_z^n \times \mathbf{B}_w$;

si supponga inoltre che \bar{x} sia uno stato di equilibrio esponenzialmente stabile di S corrispondente a $u = 0$ ed esistano una funzione di Liapunov $V(\cdot) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ e quattro costanti positive $\alpha_j, j = 1, 2, 3, 4$, tali che si abbia, per ogni $x \in \mathbf{B}_z^n$:

4. $\alpha_1 \|x\|^2 \leq V(x) \leq \alpha_2 \|x\|^2$,
5. $\|V_x(x)\| \leq \alpha_3 \|x\|$,
6. $V_x(x) f(x, 0) \leq -\alpha_4 \|x\|^2$.

Allora, se $x_0 \in \mathbf{B}_\rho^n$, $\rho := \sqrt{\alpha_1/\alpha_2}$, l'operatore causale H associato ad S è debolmente limitato e b - L_p -stabile, per ogni $p \in (0, \infty]$ e per ogni b tale che:

$$0 < b < \min \left\{ w, z \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_2 \alpha_3 \eta_0} \right\}.$$

□

Una conseguenza immediata di questo risultato è che, se le ipotesi della Proposizione 1 sono verificate con $\mathbf{B}_z^n = \mathbf{R}^n$, $\mathbf{B}_w = \mathbf{R}$, e se $\bar{x} = 0$ è uno stato di equilibrio globalmente esponenzialmente stabile di S , allora, per ogni $p \in (0, \infty]$ ed ogni $x_0 \in \mathbf{R}^n$, S è descritto da un operatore H causale limitato e quindi L_p -stabile.

La Proposizione 1 fornisce un esempio di condizioni sotto cui una forma di stabilità alla Liapunov implica una forma di stabilità ingresso-uscita. Assai più problematico è, con la notevole eccezione dei sistemi dinamici lineari, il percorso inverso: la determinazione, cioè, di condizioni sotto cui una forma di stabilità ingresso-uscita implichi un qualche tipo di stabilità nel senso di Liapunov. Il caso dei sistemi lineari tempo-invarianti è forse la più semplice delle eccezioni.

Proposizione 2

Se un sistema dinamico S lineare e tempo-invariante è asintoticamente stabile, ogni operatore ingresso-uscita ad esso associato è L_p -stabile, per ogni $p \in (0, \infty]$ (ulteriore conseguenza della Proposizione 1). In direzione opposta, se H è un operatore ingresso-uscita associato a un sistema dinamico S lineare e tempo-invariante, e H è L_p -stabile, con $p \in (0, \infty]$, allora S è asintoticamente stabile se e solo se sono asintoticamente stabili le sue parti non raggiungibili o non osservabili, cioè se e solo se S è stabilizzabile.

5. L -stabilità di sistemi interconnessi

Il tema di questo paragrafo è la stabilità ingresso-uscita di sistemi composti semplici. In particolare, concentreremo l'attenzione sulle connessioni in serie, in parallelo e in retroazione di sistemi a un ingresso e un'uscita, lasciando al lettore di verificare come i risultati ottenuti consentano l'analisi di sistemi composti notevolmente più complessi e possano essere estesi con relativa facilità a situazioni più generali; connotate, ad esempio, da sottosistemi multivariabili.

Consideriamo innanzitutto il caso di sistemi (a un ingresso e un'uscita) connessi in serie o, come anche si dice, in cascata (Fig.3) e supponiamo che ogni sistema sia descritto da un operatore causale $H_i : L_e \rightarrow L_e$, $i = 1, 2$.

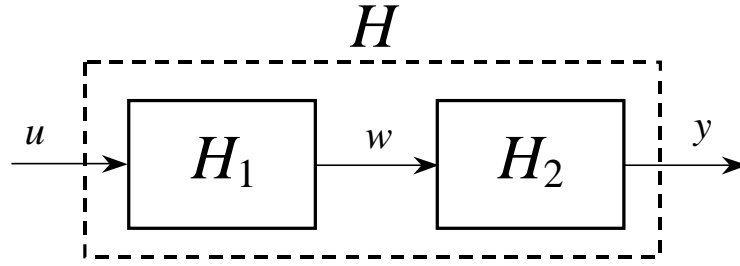


Fig. 3 : Sistemi connessi in serie (o in cascata).

Teorema 3 *Connessione in serie (o in cascata)*

Due operatori H_1 e H_2 causali e debolmente limitati, connessi in serie, danno luogo ad un operatore H causale e debolmente limitato con $\gamma(H) \leq \gamma(H_1) \gamma(H_2)$. In particolare, se $\gamma_i, \beta_i \in \mathbf{R}^+, i = 1, 2$, sono costanti tali che:

$$\|H_i(v)\| \leq \gamma_i \|v\| + \beta_i \quad , \quad \forall v \in L \quad ,$$

allora:

$$\|H(u)\| \leq \gamma \|u\| + \beta \quad , \quad \forall u \in L \quad ,$$

dove: $\gamma := \gamma_1 \gamma_2$, $\beta := \gamma_2 \beta_1 + \beta_2$.

Prova. Se sono verificate le ipotesi su H_1 e H_2 , allora per ogni $u \in L$ si ha: $w = H_1(u) \in L$; e inoltre:

$$\|H(u)\| = \|H_2(w)\| \leq \gamma_2 \|w\| + \beta_2 \leq \gamma_2 (\gamma_1 \|u\| + \beta_1) + \beta_2 = \gamma_1 \gamma_2 \|u\| + \gamma_2 \beta_1 + \beta_2.$$

In particolare, se $\gamma_i = \gamma(H_i), i = 1, 2$, segue che $\gamma(H) \leq \gamma(H_1) \gamma(H_2)$.

Esempio 4.

Si consideri il caso in cui gli operatori $H_i, i = 1, 2$, corrispondono a sistemi dinamici lineari, tempo-invarianti, asintoticamente stabili con funzioni di trasferimento $G_i(s)$ e sia: $L = L_2$. Allora è evidente che, se $G(s) := G_1(s) G_2(s)$ e indichiamo con G_{max} il massimo modulo di $G(j\omega)$, per $\omega \in \mathbf{R}^+$, si ha:

$$\gamma_2(H) = G_{max} \leq G_{1max} G_{2max} = \gamma_2(H_1) \gamma_2(H_2)$$

dove, ovviamente, $\gamma_2(\cdot)$ è il guadagno in L_2 .



Consideriamo ora il caso di sistemi connessi in parallelo (Fig.4).

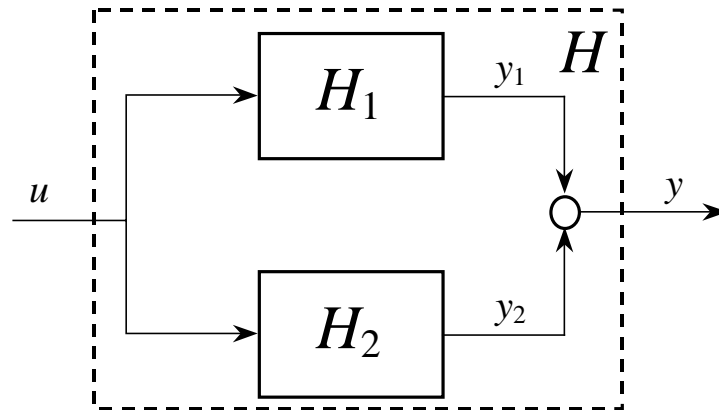


Fig. 4 : Sistemi connessi in parallelo.

Con un procedimento non dissimile da quello visto nel caso precedente, si può dimostrare il risultato seguente.

Teorema 4 *Connessione in parallelo*

Due operatori H_1 e H_2 causali e debolmente limitati, connessi in parallelo, danno luogo ad un operatore H causale e debolmente limitato con $\gamma(H) \leq \gamma(H_1) + \gamma(H_2)$. In particolare, se $\gamma_i, \beta_i \in \mathbf{R}^+, i = 1, 2$, sono costanti tali che:

$$\|H_i(u)\| \leq \gamma_i \|u\| + \beta_i \quad , \quad \forall u \in L \quad ,$$

allora:

$$\|H(u)\| \leq \gamma \|u\| + \beta \quad , \quad \forall u \in L \quad ,$$

dove: $\gamma := \gamma_1 + \gamma_2$, $\beta := \beta_1 + \beta_2$.

Prova. Se sono verificate le ipotesi su H_1 e H_2 , allora per ogni $u \in L$ si ha: $H_1(u), H_2(u) \in L$; e inoltre:

$$\begin{aligned} \|H(u)\| &= \|H_1(u) + H_2(u)\| \leq \|H_1(u)\| + \|H_2(u)\| \leq \gamma_1 \|u\| + \beta_1 + \gamma_2 \|u\| + \beta_2 = \\ &= (\gamma_1 + \gamma_2) \|u\| + \beta_1 + \beta_2 \quad . \end{aligned}$$

In particolare, se $\gamma_i = \gamma(H_i), i = 1, 2$, segue che $\gamma(H) \leq \gamma(H_1) + \gamma(H_2)$.

◻

Infine, consideriamo il caso, di gran lunga più interessante, di sistemi descritti dagli operatori $H_i : L_e \rightarrow L_e, i = 1, 2$, connessi in retroazione (Fig.5). Rispetto ai casi precedenti, sorge qui una difficoltà in più; infatti, mentre è del tutto

evidente che gli operatori H risultanti dalle connessioni di H_1 e H_2 in serie o in parallelo sono sempre correttamente definiti, o più propriamente *ben posti* (ammettono, cioè, in corrispondenza di ogni ingresso $u \in L_e$, un'unica risposta $y \in L_e$), lo stesso non può sempre dirsi nel caso di connessioni in retroazione,

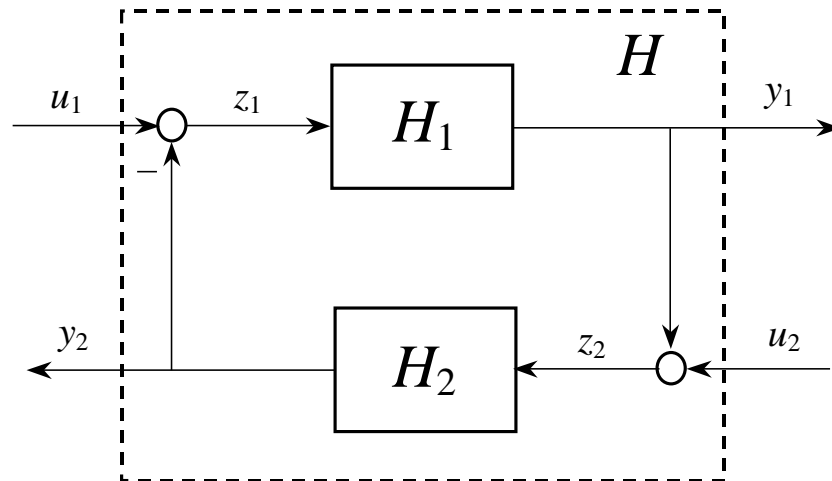


Fig. 5 : Sistemi connessi in retroazione.

nelle quali al medesimo ingresso possono corrispondere risposte diverse (come dimostra il semplice esempio che segue) o anche nessuna risposta (la ricerca di un esempio è lasciata, in questo caso, al lettore come esercizio).

Esempio 5

Si consideri il sistema reazionato di Fig.5, ottenuto connettendo in retroazione due sistemi non dinamici rispettivamente descritti da una caratteristica lineare: $y(t) = \alpha z(t)$ e da una caratteristica non lineare $w(t) = g(y(t))$, $g(y) := \beta y + y^3$.

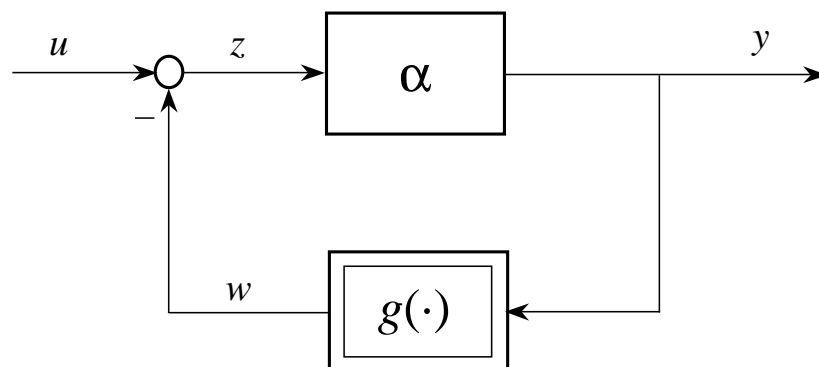


Fig. 6 : Sistema reazionato non dinamico.

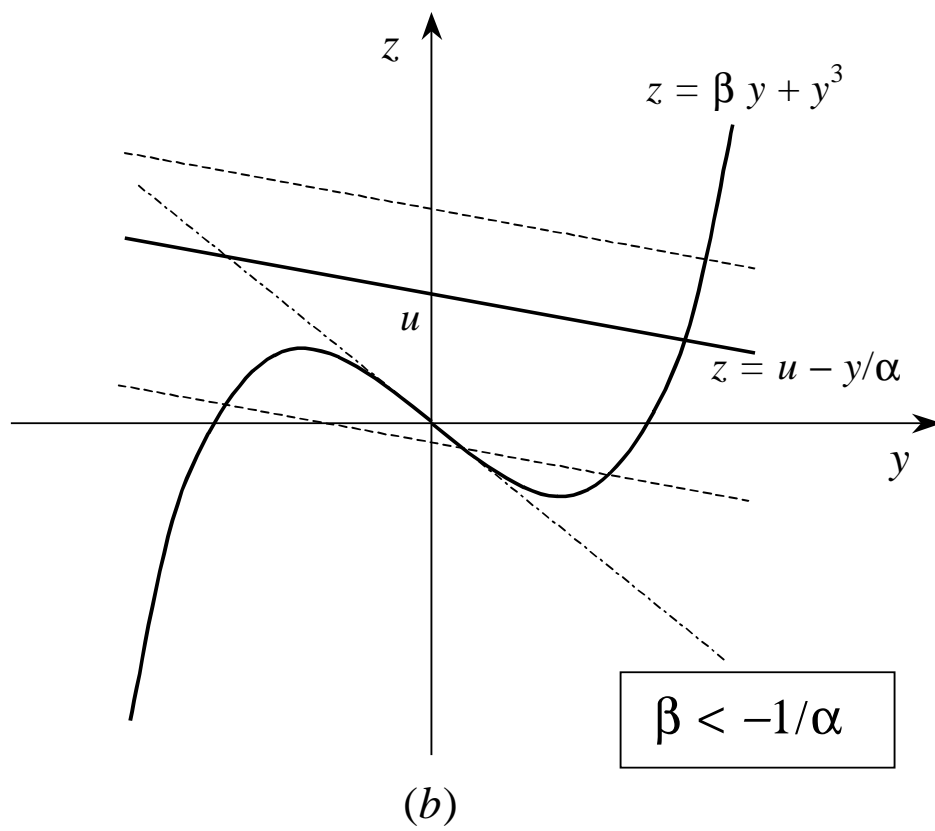
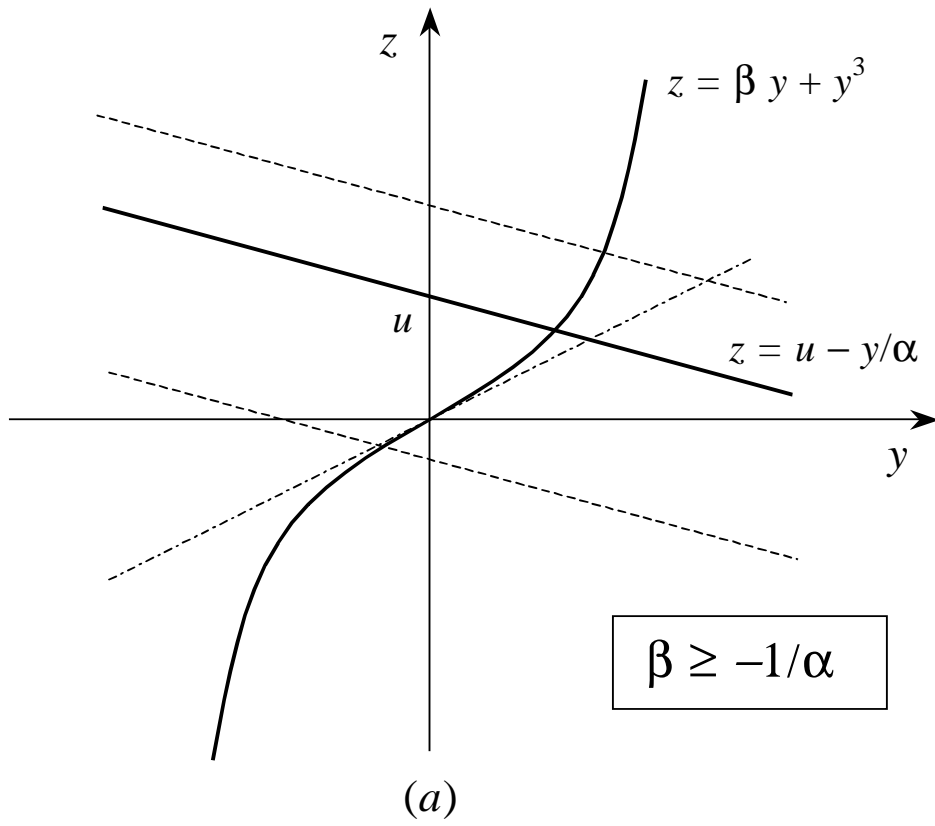


Fig. 7 : a) Sistema ben posto, b) sistema non ben posto.

Una breve riflessione consente di riconoscere che il valore di y corrispondente ad ogni $u \in \mathbf{R}$ si ottiene risolvendo le equazioni:

$$\begin{cases} w = u - y/\alpha \\ w = \beta y + y^3 ; \end{cases}$$

trovando, cioè, i valori di y corrispondenti ai punti di intersezione delle due linee definite dalle suddette equazioni (Fig.7).

E' facile riconoscere che, quando $\alpha \beta \geq -1$ (Fig.7-a), la soluzione esiste ed è unica per ogni $u \in \mathbf{R}$. Quindi, la caratteristica ad anello chiuso è una funzione definita su \mathbf{R} e, di conseguenza, al sistema reazionato è associato un operatore ben posto. Al contrario, quando $\alpha \beta < -1$ e $|u|$ è sufficientemente piccolo (ad esempio, $u = 0$), è evidente che esistono tre soluzioni (Fig.7-b) e quindi la caratteristica ad anello chiuso è, in questo caso, una relazione che, in un intorno dell'origine, assume più di un valore. Pertanto, l'operatore associato al sistema reazionato non è ben posto.

□

A questo proposito, è relativamente facile dimostrare che, se si connettono in retroazione due sistemi causali ed almeno uno dei due è dinamico in senso proprio, allora l'operatore associato al sistema reazionato è ben posto.

Si noti che, mentre gli operatori H_1 e H_2 di Fig.5 sono, per ipotesi, a un ingresso e un'uscita, l'operatore H che ne risulta ha, per definizione, due ingressi e due uscite. Nel seguito, tuttavia, l'attenzione sarà prevalentemente concentrata sulle relazioni esistenti fra ogni singolo ingresso e ogni singola uscita.

Quella che segue è una delle possibili formulazioni di un risultato importante che viene comunemente indicato come teorema del piccolo guadagno.

Teorema 5 *Teorema del piccolo guadagno*

Sia H un operatore causale ben posto risultante dalla connessione in retroazione di due operatori $H_1, H_2 : L_e \rightarrow L_e$ causali e debolmente limitati. Se

$$\lambda := \gamma(H_1) \gamma(H_2) < 1 ,$$

allora H è debolmente limitato e indicando con H_{ij} , $i, j = 1, 2$, la componente da u_j a y_i dell'operatore H , risulta:

$$\gamma(H_{11}) \leq \frac{\gamma(H_1)}{1 - \lambda} \quad , \quad \gamma(H_{22}) \leq \frac{\gamma(H_2)}{1 - \lambda} \quad , \quad \gamma(H_{12}), \gamma(H_{21}) \leq \frac{\lambda}{1 - \lambda} .$$

In particolare, se le costanti $\gamma_i, \beta_i \in \mathbf{R}^+$, con $i = 1, 2$, sono tali che (Fig.5):

$$\|y_i\| = \|H_i(z_i)\| \leq \gamma_i \|z_i\| + \beta_i \quad , \quad \forall z_i \in L \quad ,$$

ed inoltre: $\gamma_1 \gamma_2 < 1$, allora “ad anello chiuso” si ha, per ogni $i = 1, 2$:

$$\|y_i\| \leq \hat{\gamma}_{i1} \|u_1\| + \hat{\gamma}_{i2} \|u_2\| + \hat{\beta}_i \quad , \quad \forall u_1, u_2 \in L \quad ,$$

dove:

$$\hat{\gamma}_{ii} = \frac{\gamma_i}{1 - \gamma_1 \gamma_2} \quad , \quad \hat{\gamma}_{12} = \hat{\gamma}_{21} = \frac{\gamma_1 \gamma_2}{1 - \gamma_1 \gamma_2} \quad , \quad \hat{\beta}_1 = \beta_1 + \gamma_1 \beta_2 \quad , \quad \hat{\beta}_2 = \beta_2 + \gamma_2 \beta_1.$$

Prova. Se sono verificate le ipotesi su H_1, H_2 e H , e si ricorda che $z_1 = u_1 - y_2$ e $z_2 = u_2 + y_1$, è facile riconoscere che per ogni $u_1, u_2, z_1, z_2 \in L_e$ e per ogni $\tau \in \mathbf{R}^+$ risulta:

$$\begin{aligned} \|y_{1\tau}\| &\leq \gamma_1 \|z_{1\tau}\| + \beta_1 \leq \gamma_1 (\|u_{1\tau}\| + \|y_{2\tau}\|) + \beta_1 \leq \\ &\leq \gamma_1 \|u_{1\tau}\| + \gamma_1 (\gamma_2 \|z_{2\tau}\| + \beta_2) + \beta_1 \leq \\ &\leq \gamma_1 \|u_{1\tau}\| + \gamma_1 \gamma_2 (\|u_{2\tau}\| + \|y_{1\tau}\|) + \gamma_1 \beta_2 + \beta_1 . \end{aligned}$$

Pertanto, se $\gamma_1 \gamma_2 < 1$ e $u_1, u_2 \in L$, si può concludere che:

$$\|y_1\| \leq \frac{1}{1 - \gamma_1 \gamma_2} (\gamma_1 \|u_1\| + \gamma_1 \gamma_2 \|u_2\| + \beta_1 + \gamma_1 \beta_2) .$$

Simmetricamente, è immediato ricavare un’analoga espressione per $\|y_2\|$. Per quanto riguarda i guadagni dei singoli operatori H_{ij} a un ingresso e un’uscita che compongono H , $i, j = 1, 2$, poniamo:

$$f_1(\gamma_1, \gamma_2) := \frac{\gamma_1}{1 - \gamma_1 \gamma_2} \quad , \quad f_2(\gamma_1, \gamma_2) := \frac{\gamma_2}{1 - \gamma_1 \gamma_2} \quad , \quad f_{12}(\gamma_1, \gamma_2) := \frac{\gamma_1 \gamma_2}{1 - \gamma_1 \gamma_2} .$$

Poiché in ogni punto della regione di \mathbf{R}^{2+} in cui $\gamma_1 \gamma_2 < 1$ queste sono funzioni crescenti tanto di γ_1 quanto di γ_2 (le derivate parziali rispetto ad ognuno degli argomenti sono positive), avendo posto $\gamma(H_1) \gamma(H_2) := \lambda$, si può affermare che:

$$\gamma(H_{11}) \leq \frac{\gamma(H_1)}{1 - \lambda} \quad , \quad \gamma(H_{22}) \leq \frac{\gamma(H_2)}{1 - \lambda} \quad , \quad \gamma(H_{12}), \gamma(H_{21}) \leq \frac{\lambda}{1 - \lambda} .$$

□

Si noti che, sotto le ipotesi del Teorema 5, si ha anche (Fig.5):

$$\|z_1\| = \|u_1 - y_2\| \leq \|u_1\| + \|y_2\| \leq \|u_1\| + \frac{1}{1 - \gamma_1 \gamma_2} (\gamma_2 \|u_2\| + \gamma_1 \gamma_2 \|u_1\| + \beta_2 + \gamma_2 \beta_1) =$$

$$= \frac{1}{1 - \gamma_1 \gamma_2} (\gamma_2 \|u_2\| + \|u_1\| + \beta_2 + \gamma_2 \beta_1) \quad , \quad \forall u_1, u_2 \in L \quad ,$$

e un'espressione del tutto simmetrica vale ovviamente per $\|z_2\|$.

Infine, è importante osservare come i segni che compaiono in Fig.5 ($z_1 = u_1 - y_2$, $z_2 = u_2 + y_1$) siano essenzialmente frutto di consuetudine. Poiché: $\|v\| = \|-v\|$, qualunque sia $v \in L$, e $\gamma(H) = \gamma(-H)$, qualunque sia l'operatore $H : L_e \rightarrow L_e$ debolmente limitato, si può concludere quanto segue.

Proposizione 1

Il Teorema del piccolo guadagno sussiste invariato qualunque sia il segno attribuito ai segnali entranti nei nodi sommatore del sistema di Fig.5.

Esempio 6 Sistema di Lur'e

Con riferimento al sistema di Fig5 e in vista della Proposizione 1, sia H_1 l'operatore causale e limitato corrispondente ad un sistema S_1 lineare, tempo-invariante, dinamico in senso proprio e asintoticamente stabile con funzione di trasferimento $G(s)$. Sia invece H_2 un operatore non polarizzato corrispondente ad un sistema S_2 non dinamico e tempo-invariante descritto da una caratteristica ingresso-uscita $\varphi(\cdot)$ tale che, per un assegnato $k > 0$:

$$\varphi(v) \leq k |v| \quad , \quad \forall v \in \mathbf{R} .$$

Supponiamo, cioè, che la caratteristica $\varphi(\cdot)$ di S_2 stia nel settore $[-k, k]$ (Fig.8).

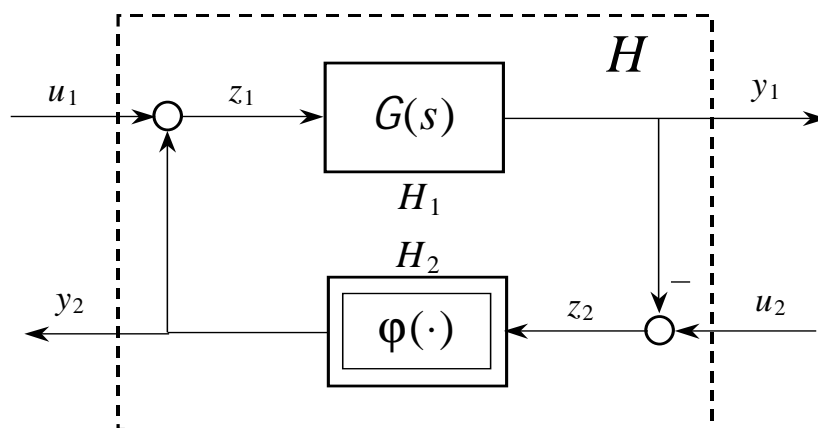


Fig. 8 : Sistema di Lur'e ($y_1 = y$, $z_1 = u$, $u_1 = w$, $z_2 = e$, $u_2 = y^\circ$).

In vista del Teorema 1 e dell'analisi svolta nell'Esempio 2, sappiamo che il guadagno di H_1 è dato da:

$$\gamma(H_1) = \gamma^\circ(G_1) = \begin{cases} G_{max} := \max_{\omega \geq 0} |G(j\omega)| := \gamma_2(H_1) & , \text{ se } L = L_2, \\ k_1 := \int_0^\infty |g(t)| dt := \gamma_\infty(H_1) & , \text{ se } L = L_\infty, \end{cases}$$

dove $g(\cdot)$ è la risposta impulsiva di S_1 .

In vista dell'analisi svolta, invece, nell'Esempio 1, è immediato concludere che $\gamma_\infty(H_2) \leq \gamma_\infty^\circ(H_2) = \tilde{\gamma} \leq k$. Per altro, in L_2 :

$$\|H_2(u)\|_2^2 := \int_0^\infty \phi^2(u(t)) dt \leq \int_0^\infty k^2 u^2(t) dt = k^2 \|u\|_2^2, \quad \forall u \in L_2;$$

quindi, si ha anche: $\gamma_2(H_2) \leq k$. In generale, si potrebbe dimostrare che:

$$\gamma_p(H_2) \leq k, \quad \forall p \in (0, \infty].$$

Da quanto precede si può concludere che il sistema di Lur'e di Fig.8 è L_2 -stabile nel settore $[-k, k]$ se $k G_{max} < 1$, mentre è L_∞ -stabile ("bibo-stabile") nel medesimo settore $[-k, k]$ se $k k_1 < 1$.

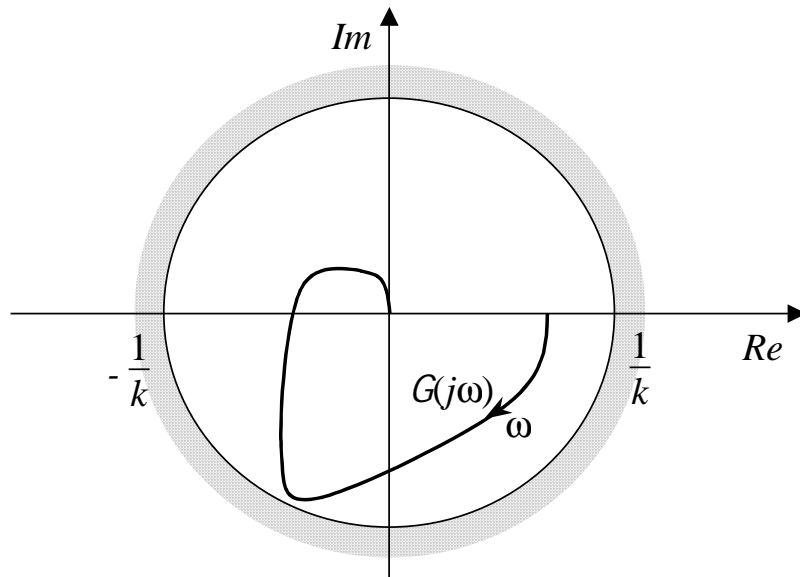


Fig. 9 : Stabilità assoluta nel settore $[-k, k]$; il criterio del cerchio.

In chiusura, osserviamo come la condizione di stabilità L_2 nel settore $[k, k]$ del sistema di Fig.8 estenda significativamente una condizione di stabilità assoluta

nel settore $[k, k]$ del corrispondente sistema autonomo di Lur'e. Infatti, per il criterio del cerchio espresso come Teorema 3 del Capitolo 1 (Fig.9), il sistema di Lur'e autonomo (risultante da quello di Fig.8 quando $u_1 = u_2 = 0$) è assolutamente stabile nel settore $[-k, k]$ se $G_{max} < 1/k$, cioè se $k G_{max} < 1$.

□

Il nesso tra stabilità L_2 di un sistema di Lur'e tempo-invariante e stabilità assoluta del medesimo sistema a ingressi azzerati (autonomo) può essere ulteriormente rafforzato estendendo il caso esaminato nell'Esempio 6 a settori $[k_1, k_2]$, $k_1 < k_2$, qualsiasi. Si otterrà in questo modo un nuovo ed interessante *criterio del cerchio*.

5.1 Stabilità L_2 di un sistema di Lur'e nel settore $[k_1, k_2]$

Supponiamo di essere interessati alla stabilità L_2 in un settore $[k_1, k_2]$, $k_1, k_2 \in \mathbf{R}$, $k_1 < k_2$, del sistema di Lur'e S di Fig.10-a, dove $G(s)$ è la funzione di trasferimento di un sistema dinamico in senso proprio, lineare, tempo-invariante e stabilizzabile, mentre $\varphi(\cdot)$ è la caratteristica, continua a tratti, di un sistema non lineare, non dinamico, anch'esso tempo-invariante. In Fig. 10-b è mostrata una riformulazione di S che non è difficile riconoscere come strettamente equivalente, qualunque sia la costante h .

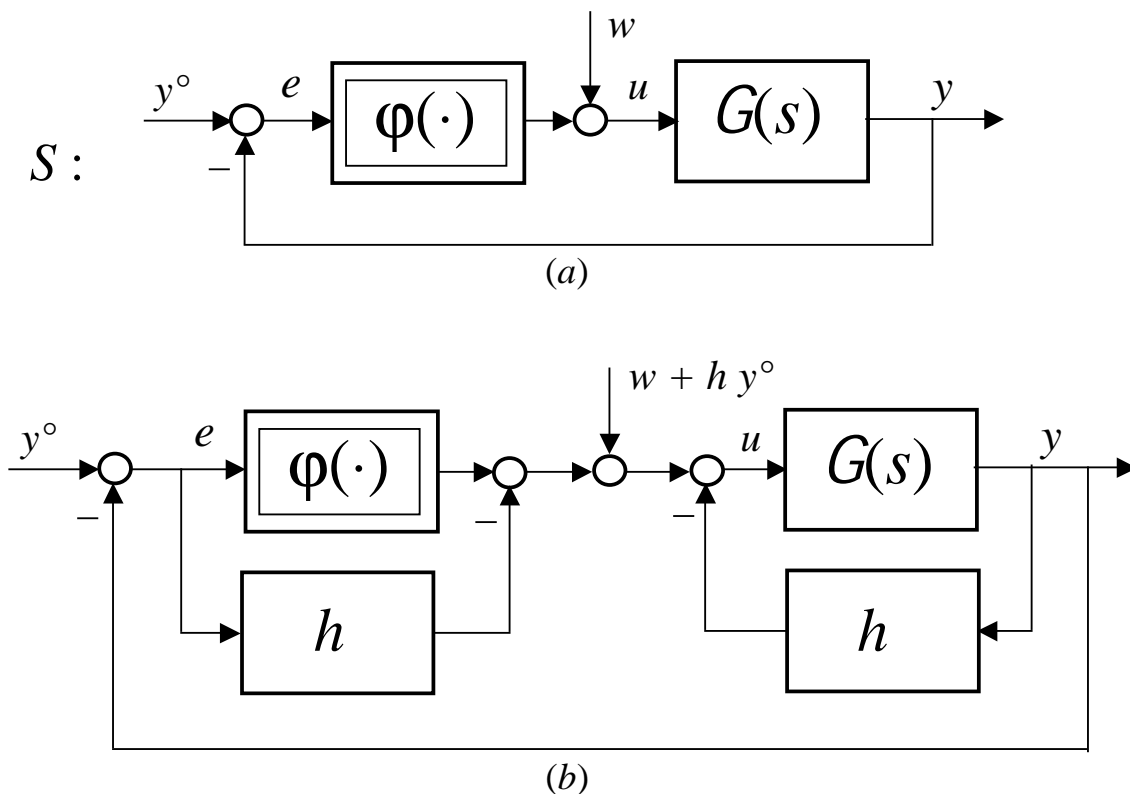


Fig. 10 : (a) Sistema di Lur'e. (b) Riformulazione equivalente.

Proposizione 2

Il sistema S di Fig.10-*a* è L_2 -stabile in un settore $[k_1, k_2]$, $k_1 < k_2$, se e solo se il sistema S^* di Fig.11 è L_2 -stabile nel settore $[-k, k]$, dove:

$$\eta(e) := \varphi(e) - h e \quad , \quad F(s) := \frac{G(s)}{1 + h G(s)}$$

$$h := \frac{k_1 + k_2}{2} \quad , \quad k := \frac{k_2 - k_1}{2} .$$

□

Ma, per il teorema del piccolo guadagno (Esempio 6), il sistema S^* di Fig.11 è L_2 -stabile nel settore $[-k, k]$ se $F(s)$ rappresenta un sistema asintoticamente stabile (i poli di $F(s)$ hanno parte reale negativa) e se $k F_{max} < 1$, dove:

$$F_{max} := \max_{\omega \geq 0} |F(j\omega)| .$$

Quest'ultima condizione equivale a richiedere che il diagramma polare della risposta in frequenza associata a $F(s)$ stia all'interno della circonferenza di raggio $1/k$ e centro l'origine.

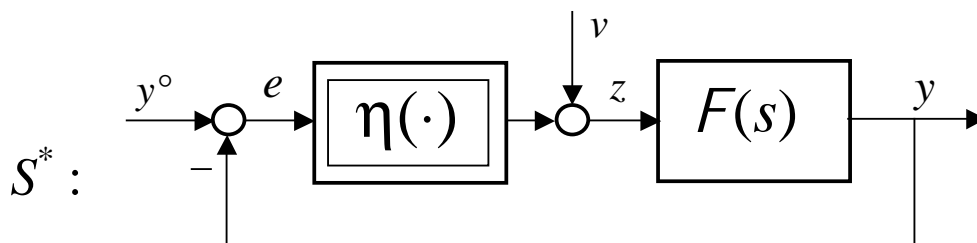


Fig. 11 : Il sistema di Lur'e S^* .

Con queste premesse, non è difficile dimostrare un nuovo criterio del cerchio orientato alla stabilità L_2 del sistema di Lur'e. Ricordiamo, a questo fine, che s'è indicata con $O(k_1, k_2)$, la regione, non comprendente l'origine, delimitata dalla circonferenza con centro sull'asse reale passante per i punti $-1/k_1$ e $-1/k_2$.

Teorema 6 *Criterio del cerchio per la stabilità L_2 in un settore $[k_1, k_2]$*

Il sistema di Lur'e S di Fig.10-*a* è L_2 -stabile in un settore $[k_1, k_2]$, $k_1 < k_2$, se il numero di giri che il diagramma di Nyquist relativo a $G(s)$ compie attorno a $O(k_1, k_2)$ è uguale al numero di poli di $G(s)$ con parte reale positiva.

Prova. Osserviamo innanzitutto che se $G(s)$ è la funzione di trasferimento di un sistema stabilizzabile e il suo diagramma di Nyquist compie attorno a $O(k_1, k_2)$ tanti giri quanti sono i poli di $G(s)$ con parte reale positiva, allora i poli di

$$F(s) := \frac{G(s)}{1 + h G(s)}$$

hanno parte reale negativa, qualunque sia $h \in [k_1, k_2]$. Ciò segue infatti, dal criterio di Nyquist e da: $-1/h \in O(k_1, k_2)$, $\forall h \in [k_1, k_2]$. In particolare, i poli di $F(s)$ hanno dunque parte reale negativa, in quanto:

$$h = \frac{k_1 + k_2}{2} \in [k_1, k_2].$$

Ora non è difficile riconoscere che $O(k_1, k_2)$ non è che l'immagine, attraverso la trasformazione che lega G a F , vale a dire:

$$G = \frac{F}{1 - h F} \quad , \quad h = \frac{k_1 + k_2}{2} \quad ,$$

della regione esterna alla circonferenza di raggio $1/k$, $k = (k_2 - k_1)/2$, e centro l'origine. Quindi, se il diagramma di Nyquist relativo a $G(s)$ ha intersezione nulla con $O(k_1, k_2)$, allora il diagramma polare della risposta in frequenza associata a $F(s)$ è interno alla circonferenza di raggio $1/k$ e centro l'origine; cioè:

$$k F_{max} < 1 .$$

Pertanto, il sistema S^* di Fig.11 è L_2 -stabile nel settore $[-k, k]$ e, grazie alla Proposizione 2, si può concludere che il sistema S di Fig.10-a è L_2 -stabile nel settore $[k_1, k_2]$.

6. Sistemi e operatori passivi

In fisica, è spesso indicato come passivo un sistema, ad esempio un circuito elettrico, privo di sorgenti di energia; privo, cioè, di elementi che immettano energia, convertendola da fonti estranee al sistema considerato. Ad esempio, i cosiddetti generatori di energia elettrica in realtà si limitano a restituire in questa forma buona parte dell'energia meccanica, chimica o termica di cui si alimentano. Ora i sistemi fisicamente passivi da una parte godono di proprietà molto prossime a qualche forma di stabilità, dall'altra restano tali anche quando vengano connessi l'uno all'altro per dar luogo a sistemi comunque complessi.

Non deve dunque stupire l'attenzione con cui, in teoria dei sistemi e del controllo, si è inteso formulare in termini astratti il concetto di *passività*, incastonandolo in quello più generale di *dissipatività* di un modello matematico. L'esempio che segue è inteso ad illustrare lo stretto legame esistente fra le nozioni di passività (in senso fisico) e di L_2 -stabilità (in particolare, con $L = L_2$). Una volta riconosciuto il fondamentale ruolo di stimolo che la nozione di fisica passività ha avuto in questo ambito, è tuttavia utile sottolineare il carattere per così dire autonomo del concetto astratto di passività introdotto in teoria dei sistemi e posto alla base di numerosi risultati teorici di fondamentale importanza in un ampio ventaglio di ambiti applicativi diversi.

Esempio 7 *Passività fisica e stabilità L_2*

Si consideri il circuito elettrico di Fig.12 e si supponga che la rete passiva, lineare o non lineare, sia inizialmente scarica; sia nulla, cioè, nell'istante iniziale $t=0$, l'energia accumulata dai condensatori e dagli induttori presenti nella rete. Si supponga inoltre che il circuito rappresenti un modello ben posto nel senso che, per ogni ingresso $e(\cdot)$ definito su \mathbf{R}^+ , esista su \mathbf{R}^+ un'unica soluzione del circuito stesso e, in particolare, un'unica uscita $v(\cdot)$ e un'unica $i(\cdot)$.

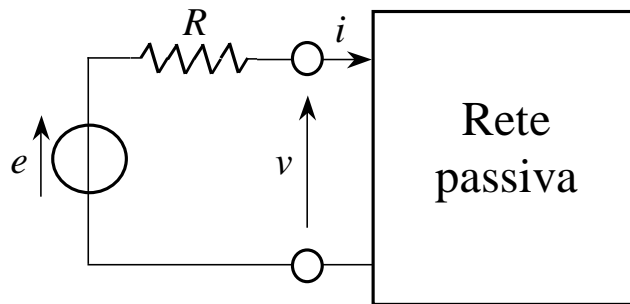


Fig.. 12 : Circuito elettrico.

Ora, qualunque sia l'andamento $e(\cdot): \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$, è evidente che, in ogni intervallo $[0, t)$, l'energia $E(t)$ complessivamente assorbita dalla rete non potrà essere negativa (la rete non può cedere un'energia che non ha):

$$E(t) := \int_0^t v(t) i(t) dt \geq 0 \quad , \quad \forall t \geq 0 \quad .$$

In particolare, notando che $e(t) = v(t) + R i(t)$, se $e \in L_2$ si può scrivere:

$$\infty > \|e\|_2^2 := \int_0^\infty e^2(t) dt = \int_0^\infty [v(t) + R i(t)]^2 dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\infty} [v^2(t) + R^2 i^2(t) + 2 R v(t) i(t)] dt = \\
&= \|v\|_2^2 + R^2 \|i\|_2^2 + 2 R \int_0^{\infty} v(t) i(t) dt \geq \|v\|_2^2 + R^2 \|i\|_2^2 .
\end{aligned}$$

Quindi: $u := e \in L_2$ implica $i, v \in L_2$. Se $y = i$, oppure $y = v$, il sistema è descritto da un operatore limitato e quindi L_2 -stabile ($\|y\|_2^2 \leq \gamma^2 \|u\|_2^2$, $\gamma = 1/R$ se $y = i$ mentre $\gamma = 1$ se $y = v$).

Più in generale, se $y := [v \ i]'$, si ha:

$$\|y\|_2^2 := \|v\|_2^2 + \|i\|_2^2 ;$$

$$\|v\|_2^2 + R^2 \|i\|_2^2 = \begin{cases} \|v\|_2^2 + \|i\|_2^2 + (R^2 - 1) \|i\|_2^2 \geq \|y\|_2^2 & , \text{ se } R \geq 1 \\ R^2 [\|v\|_2^2 + \|i\|_2^2] + (1 - R^2) \|v\|_2^2 \geq R^2 \|y\|_2^2 & , \text{ se } R < 1 \end{cases}$$

pertanto (ricordando che $u := e$, e ponendo $\gamma := \max(1, 1/R)$):

$$\|y\|_2^2 \leq \gamma^2 [\|v\|_2^2 + R^2 \|i\|_2^2] \leq \gamma^2 \|e\|_2^2 := \gamma^2 \|u\|_2^2 \quad , \quad \forall u \in L_2$$

L'operatore che lega u a $y := [v \ i]'$ risulta così limitato e quindi L_2 -stabile; a conferma di quanto già notato a proposito dei singoli operatori a un ingresso e un'uscita che lo compongono. □

Le diverse nozioni di passività presenti in letteratura possono essere rigorosamente formulate sia con riferimento ad una descrizione dei sistemi come operatori ingresso-uscita, sia con riferimento ad una loro descrizione nello spazio di stato (in un'accezione estesa che comprenda anche il caso, per così dire degenere, dei sistemi non dinamici). Qui si farà innanzitutto riferimento a formulazioni del secondo tipo (spazio di stato) rimandando a una fase successiva l'introduzione di una formulazione di tipo ingresso-uscita (operatori passivi).

6.1 Sistemi passivi nello spazio di stato

Consideriamo, come di consueto, un sistema S^* , a un ingresso e un'uscita, descritto da:

$$S^* : \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) & , \quad x(0) = x_0 \in \mathbf{R}^n \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases}$$

dove $f(\cdot, \cdot)$ è Lipschitz-continua, $g(\cdot, \cdot)$ è continua ed entrambe sono nulle nell'origine: $f(0, 0) = 0$, $g(0, 0) = 0$.

Definizione 5 *Sistema dinamico passivo*

Il sistema S^* , con $n \geq 1$, è *passivo* se esiste una funzione $V(\cdot): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ semidefinita positiva e continuamente differenziabile, detta *funzione di accumulo* (“*storage function*”), tale che:

$$u y \geq \frac{\partial V}{\partial x}(x) f(x, u) + \varepsilon u^2 + \delta y^2 + \rho \psi(x) \quad , \quad \forall (x, u) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$$

con $\varepsilon, \delta, \rho \in \mathbf{R}^+$ e $\psi(\cdot)$ definita positiva.

In particolare, il sistema S^* è detto:

- *conservativo*, se $\varepsilon = \delta = \rho = 0$ e vale il segno di uguaglianza :

$$u y = \frac{\partial V}{\partial x}(x) f(x, u) \quad , \quad \forall (x, u) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$$

- *strettamente passivo relativamente all'ingresso*, se $\varepsilon > 0$,

- *strettamente passivo relativamente all'uscita*, se $\delta > 0$,

- *strettamente passivo relativamente allo stato*, se $\rho > 0$.



Un ruolo importante nell'analisi del legame esistente fra una particolare passività del sistema e la stabilità asintotica dell'origine di S^* (nel caso $u = 0$) è svolto da una proprietà di osservabilità del sistema libero detta osservabilità nell'origine.

Definizione 6 *Sistema dinamico osservabile nell'origine*

Il sistema S^* , con $n \geq 1$, è *osservabile nell'origine* se $x(\cdot) = 0$ è l'unico movimento libero di S^* compatibile con uscita nulla; ovvero se $(u(\cdot) = 0, y(\cdot) = 0)$ implica $x(\cdot) = 0$.

Definizione 7 *Sistema passivo non dinamico*

Il sistema S^* , con $n = 0$ e quindi $g(\cdot, u) = g(u)$, $\forall u \in \mathbf{R}$, è passivo se esistono due costanti non negative $\varepsilon, \delta \in \mathbf{R}^+$ tali che:

$$u y \geq \varepsilon u^2 + \delta y^2 \quad , \quad \forall u \in \mathbf{R} \quad .$$

In particolare, il sistema non dinamico S^* è detto:

- *strettamente passivo relativamente all'ingresso*, se $\varepsilon > 0$,
- *strettamente passivo relativamente all'uscita*, se $\delta > 0$.

Esempio 8 *Sistema non dinamico passivo: caratterizzazione equivalente*

Sia S un sistema non dinamico descritto dalla caratteristica ingresso-uscita $g(\cdot): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Con riferimento alla Definizione 7, è facile riconoscere che, pur di porre:

$$\varepsilon = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \quad , \quad \delta = \frac{1}{k_1 + k_2} \quad ,$$

l'esistenza di $\varepsilon, \delta \in \mathbf{R}^+$ tali che: $u y \geq \varepsilon u^2 + \delta y^2$, $\forall u \in \mathbf{R}$, è *equivalente* all'esistenza di k_1 e k_2 , $0 \leq k_1 \leq k_2 \leq \infty$, tali che:

$$(y - k_1 u) (k_2 u - y) \geq 0 \quad , \quad \forall u \in \mathbf{R} .$$

Ma quest'ultima condizione è verificata se e solo se: $g(\cdot) \in \Phi[k_1, k_2]$; cioè, se e solo se la caratteristica ingresso-uscita del sistema S è contenuta (Fig.13) nel settore $[k_1, k_2]$ del primo e terzo quadrante.

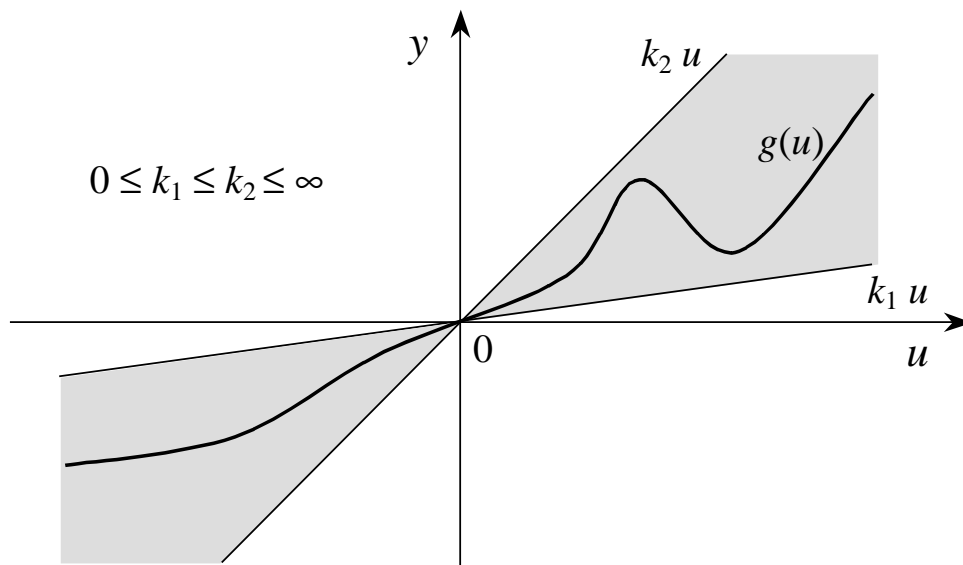


Fig. 13 : Il settore conico $[k_1, k_2]$.

In particolare, il sistema non dinamico S è detto:

- *strettamente passivo relativamente all'ingresso* se: $0 < k_1$ ($\varepsilon > 0$) ,
- *strettamente passivo relativamente all'uscita* se: $k_2 < \infty$ ($\delta > 0$) .

Esempio 9 Sistema dinamico lineare tempo-invariante asintoticamente stabile

Sia S un sistema definito come S^* , con:

$$f(x, u) = A x + B u \quad , \quad g(x, u) = C x + D u \quad , \quad n \geq 1 ;$$

$$(A, B) \text{ raggiungibile} \quad , \quad (A, C) \text{ osservabile}$$

$$\operatorname{Re}[\lambda_i(A)] < 0 \quad , \quad G(s) = C (s I - A)^{-1} B + D .$$

Per un sistema cosiffatto, è possibile dimostrare il risultato che segue. Per la definizione di funzione di trasferimento strettamente reale positiva, si rimanda alla Definizione 3 del Capitolo 1; una condizione sufficiente perché $G(s)$ sia strettamente reale positiva è che esista $\alpha > 0$ tale che: $\operatorname{Re}[G(j\omega)] \geq \alpha, \forall \omega \in \mathbf{R}^+$.

Proposizione 3

Il sistema S è strettamente passivo relativamente allo stato se $G(s)$ è strettamente reale positiva.

Prova. Se $G(s)$ è strettamente reale positiva allora, per il Lemma di Kalman-Yakubovic-Popov (Capitolo 1, Lemma 2), esistono una matrice $P \in \mathbf{R}^{n \times n}$ simmetrica e definita positiva, un vettore $L \in \mathbf{R}^n$, una costante $w \in \mathbf{R}$ e una costante positiva $\varepsilon > 0$ tali che:

$$\begin{aligned} P A + A' P &= -L L' - \varepsilon P \\ P B &= C' - w L' \\ 2 D &= w^2 . \end{aligned}$$

Sia dunque (funzione d'accumulo):

$$V(x) = \frac{1}{2} x' P x \quad ;$$

in tal caso:

$$\begin{aligned} u y - \frac{\partial V}{\partial x}(x) f(x, u) &= u (C x + D u) - x' P (A x + B u) = \\ &= u C x + D u^2 - \frac{1}{2} x' (P A + A' P) x - x' P B u = \\ &= u (B' P + w L') x + \frac{1}{2} (w^2 u^2 + x' L L' x + \varepsilon x' P x) - u B' P x = \\ &= \frac{1}{2} [(L' x + w u)^2 + \varepsilon x' P x] \geq \frac{1}{2} \varepsilon x' P x \quad , \quad \forall (x, u) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} . \end{aligned}$$

Esempio 10 *Sistema dinamico affine nel controllo*

Sia S un sistema definito come S^* , con:

$$f(x, u) = \alpha(x) + \beta(x) u \quad , \quad g(x, u) = \gamma(x) \quad , \quad n \geq 1 ;$$

$\alpha(\cdot) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ è una funzione Lipschitz-continua nulla nell'origine, $\beta(\cdot) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ è continua e $\gamma(\cdot) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ è continua e nulla nell'origine.

Proposizione 4

Se è possibile trovare una funzione $V(\cdot) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ semidefinita positiva e continuamente differenziabile tale che:

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x) \alpha(x) \leq -\delta \gamma^2(x) \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial x}(x) \beta(x) = \gamma(x) \quad , \quad \forall x \in \mathbf{R}^n \quad ,$$

con $\delta \in \mathbf{R}^+$, allora S è un sistema passivo. In particolare, se $\delta > 0$, si ha che S è strettamente passivo relativamente all'uscita.

Prova. In tal caso infatti:

$$\begin{aligned} u y - \frac{\partial V}{\partial x}(x) f(x, u) &= u y - \frac{\partial V}{\partial x}(x) [\alpha(x) + \beta(x) u] = u \gamma(x) - \frac{\partial V}{\partial x}(x) \alpha(x) - \gamma(x) u = \\ &= -\frac{\partial V}{\partial x}(x) \alpha(x) \geq \delta \gamma^2(x) = \delta y^2 \quad , \quad \forall (x, u) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} . \end{aligned}$$

□

Il teorema che segue mette in evidenza la relazione fra alcune forme di passività e alcune proprietà di stabilità di un sistema dinamico.

Teorema 6 *Passività e stabilità*

Con riferimento al sistema S^* introdotto all'inizio di questo Sottoparagrafo 6.1, si ha che:

- se S^* è un sistema passivo con funzione d'accumulo definita positiva, l'origine è uno stato di equilibrio stabile (nel senso di Liapunov) del sistema libero ($u = 0$);
- se S^* è un sistema strettamente passivo relativamente all'uscita, l'operatore causale $H^* : L_{2e} \rightarrow L_{2e}$ ad esso associato è debolmente limitato e quindi L_2 -stabile; in particolare, se $x_0 = 0$, H^* è limitato, con guadagno a polarizzazione nulla non superiore a $1/\delta$;

- se S^* è un sistema osservabile nell'origine, oltre che strettamente passivo relativamente all'uscita, oppure è un sistema strettamente passivo relativamente allo stato, in ogni caso con funzione d'accumulo definita positiva, allora l'origine dello spazio di stato è uno stato di equilibrio asintoticamente stabile del sistema libero ($u = 0$); se poi la funzione d'accumulo è anche radialmente illimitata, la stabilità dell'origine oltre che asintotica è anche globale.

Prova. La dimostrazione, come il teorema, è articolata per punti.

- Se S^* è passivo e $u = 0$, $\dot{V}(\cdot)$ è semidefinita negativa; infatti:

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x}(x) f(x, 0) \leq -\delta y^2 - \rho \psi(x) ;$$

- se S^* è strettamente passivo relativamente all'uscita, allora:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \frac{\partial V}{\partial x}(x) f(x, u) \leq u y - \varepsilon u^2 - \delta y^2 - \rho \psi(x) \leq u y - \delta y^2 = \\ &= -\frac{(u - \delta y)^2}{2\delta} + \frac{u^2}{2\delta} - \frac{\delta y^2}{2} \leq \frac{u^2}{2\delta} - \frac{\delta y^2}{2} ; \end{aligned}$$

integrando da 0 a τ si ottiene:

$$V(x(\tau)) - V(x(0)) \leq \frac{1}{2\delta} \int_0^\tau u^2 dt - \frac{\delta}{2} \int_0^\tau y^2 dt ;$$

poiché $V(\cdot)$ è semidefinita positiva ($V(x(\tau)) \geq 0$), si ha:

$$\int_0^\tau y^2 dt \leq \frac{1}{\delta^2} \int_0^\tau u^2 dt - \frac{2}{\delta} [V(x(\tau)) - V(x(0))] \leq \frac{1}{\delta^2} \int_0^\tau u^2 dt + \frac{2}{\delta} V(x(0)) ,$$

cioè:

$$\|y_\tau\|_2 \leq \sqrt{\frac{1}{\delta^2} \int_0^\tau u^2 dt + \frac{2}{\delta} V(x(0))} ;$$

ma $(a, b \geq 0)$ implica $(\sqrt{a^2 + b^2} \leq a + b)$; quindi:

$$\|y_\tau\|_2 \leq \frac{1}{\delta} \|u_\tau\|_2 + \sqrt{\frac{2}{\delta} V(x(0))} := \gamma \|u_\tau\|_2 + \beta , \quad \forall (u, \tau) \in L_{2e} \times \mathbf{R}^+,$$

avendo posto: $\gamma := 1/\delta$ e $\beta := \sqrt{2 V(x(0))/\delta}$. Pertanto:

$$\|y\|_2 \leq \gamma \|u\|_2 + \beta \quad , \quad \forall u \in L_2 .$$

- Se S^* è strettamente passivo relativamente all'uscita, è facile riconoscere che $u = 0$ implica: $\dot{V}(x) \leq -\delta g(x, 0)^2 \leq 0$. L'ipotesi di osservabilità nell'origine e il teorema di Lasalle consentono di concludere l'analisi di questo primo caso. Nel secondo, la definita positività della funzione $\psi(\cdot)$ implica che $\dot{V}(\cdot)$ è definita negativa, e questo completa la dimostrazione.

6.2 Operatori ingresso-uscita passivi

La nozione di passività non è esclusivamente legata alla descrizione dei sistemi S^* nello spazio di stato. Essa può essere efficacemente estesa agli operatori causali $H^* : L_{2e} \rightarrow L_{2e}$ ad essi associati. Per fare ciò, è conveniente dotare lo spazio L_{2e} di un opportuno *prodotto scalare* (o *prodotto interno*) nel modo seguente. Per ogni $(v, w) \in L_2$, il prodotto scalare di v per w è dato da:

$$\langle v, w \rangle := \int_0^{\infty} v(t) w(t) dt$$

sicché: $\|v\|_2 = \langle v, v \rangle^{1/2}$. La definizione di prodotto scalare può essere naturalmente estesa a tutte le coppie di segnali in L_{2e} per le quali l'integrale a secondo membro esiste finito. In particolare, per ogni $(v, w) \in L_{2e}$ e per ogni $\tau \in \mathbf{R}^+$, poniamo:

$$\langle v, w \rangle_{\tau} := \int_0^{\tau} v(t) w(t) dt = \langle v_{\tau}, w \rangle = \langle v, w_{\tau} \rangle .$$

Al fine di estendere all'operatore ingresso-uscita la definizione di passività, è interessante osservare che, in base alla Definizione 5, il sistema dinamico S^* è, in particolare, passivo se esiste una funzione $V(\cdot): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ continuamente differenziabile e semidefinita positiva tale che:

$$u y \geq \frac{\partial V}{\partial x}(x) f(x, u) + \varepsilon u^2 + \delta y^2 \quad , \quad \forall (x, u) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$$

con $\varepsilon, \delta \in \mathbf{R}^+$. Integrando entrambi i membri da 0 a τ , con $\tau \in \mathbf{R}^+$, la condizione può essere posta nella forma seguente:

$$\int_0^{\tau} u y dt \geq \int_0^{\tau} (\dot{V} + \varepsilon u^2 + \delta y^2) dt \quad , \quad \forall (u, \tau) \in L_{2e} \times \mathbf{R}^+,$$

ovvero:

$$\int_0^{\tau} u y dt + V(x(0)) - V(x(\tau)) \geq \int_0^{\tau} (\varepsilon u^2 + \delta y^2) dt \quad , \quad \forall (u, \tau) \in L_{2e} \times \mathbf{R}^+.$$

Ricorrendo alla notazione adottata per il prodotto scalare, si può affermare che S^* è passivo se:

$$\langle u, y \rangle_{\tau} + V(x(0)) - V(x(\tau)) \geq \varepsilon \langle u, u \rangle_{\tau} + \delta \langle y, y \rangle_{\tau} \quad , \quad \forall (u, \tau) \in L_{2e} \times \mathbf{R}^+.$$

Ora, una definizione di passività applicabile ad operatori ingresso-uscita deve prescindere da qualunque riferimento alla nozione di stato. Ponendo la condizione che V non vada aumentando, si perviene alla definizione che segue.

Definizione 8 Operatore passivo

L'operatore causale $H^* : L_{2e} \rightarrow L_{2e}$ associato al sistema S^* è *passivo* se esistono β, ε e δ in \mathbf{R}^+ tali che:

$$\langle u, y \rangle_{\tau} + \beta \geq \varepsilon \langle u, u \rangle_{\tau} + \delta \langle y, y \rangle_{\tau} \quad , \quad \forall (u, \tau) \in L_{2e} \times \mathbf{R}^+.$$

In particolare, H^* è strettamente passivo relativamente all'ingresso se $\varepsilon > 0$ ed è strettamente passivo relativamente all'uscita se $\delta > 0$.

□

Da un confronto superficiale con la Definizione 7, si potrebbe supporre che, nel caso di sistema *non dinamico*, quest'ultima definizione rappresenti un effettivo ampliamento della classe di caratteristiche ingresso-uscita tali da far qualificare passivo l'operatore ad esse associato. In particolare, si potrebbe ritenere che, grazie alla presenza della costante β , la passività secondo la Definizione 8 possa essere compatibile con caratteristiche ingresso-uscita che appartengano a un settore conico il cui vertice non sia l'origine. Ma questo non è il caso. Infatti, un settore conico il cui vertice non sia l'origine contiene necessariamente punti del secondo o del quarto quadrante; punti, cioè, (\bar{u}, \bar{y}) con $\bar{u} \bar{y} < 0$. Supponiamo allora che sia: $u(t) = \bar{u} sca(t)$; corrispondentemente: $y(t) = \bar{y} sca(t)$; quindi, per ogni $\tau > 0$, si ha: $\langle u, y \rangle_{\tau} = \bar{u} \bar{y} \tau < 0$, $\langle u, u \rangle_{\tau} = \bar{u}^2 \tau$, $\langle y, y \rangle_{\tau} = \bar{y}^2 \tau$ ed è del tutto

evidente che, per τ sufficientemente grande, la condizione richiesta dalla Definizione 8 è violata, qualunque sia il valore non negativo di β , ε e δ .

Esempio 11 *Sistema dinamico lineare tempo-invariante asintoticamente stabile*

Sia S un sistema dinamico lineare tempo-invariante (A, B, C, D) asintoticamente stabile, descritto nel dominio della frequenza dalla funzione di trasferimento:

$$G(s) = C (s I - A)^{-1} B + D$$

e, nel dominio del tempo, dall'operatore non polarizzato H (stato iniziale nullo).

Proposizione 5

L'operatore H è strettamente passivo relativamente sia all'ingresso che all'uscita se esiste $\alpha > 0$ tale che:

$$\operatorname{Re}[G(j\omega)] \geq \alpha, \quad \forall \omega \in \mathbf{R}^+,$$

sicché la funzione di trasferimento $G(s)$ è strettamente reale positiva.

Prova. Ricordiamo innanzitutto che, se v e w sono segnali a energia finita (definiti su \mathbf{R}^+), per il Teorema di Parseval si ha:

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(t) \overline{w(t)} dt = \int_0^{\infty} v(t) \overline{w(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(j\omega) \overline{W(j\omega)} d\omega$$

dove V e W sono, rispettivamente, le trasformate di Fourier di v e w , mentre \overline{W} è il coniugato di W .

Per quanto riguarda l'operatore H associato al sistema in esame, cominciamo ad osservare che:

$$\langle u, y \rangle_{\tau} = \langle u_{\tau}, y \rangle = \int_0^{\tau} u_{\tau}(t) y(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} u_{\tau}(t) y(t) dt, \quad \forall (u, \tau) \in L_{2e} \times \mathbf{R}^+.$$

L'ultimo integrale dipende soltanto da y_{τ} , vale a dire dall'andamento di y nell'intervallo $[0, \tau]$; ma, per la causalità di H , risulta:

$$y_{\tau} = H(u)_{\tau} = H(u_{\tau})_{\tau} := y_{\tau}^{\#};$$

inoltre, $y_{\tau}^{\#} \in L_2$ e, indicando con $U(j\omega; \tau)$ la trasformata di Fourier di u_{τ} , $Y^{\#}(j\omega) = G(j\omega) U(j\omega; \tau)$. Pertanto, si ha:

$$\begin{aligned} \langle u, y \rangle_\tau &= \int_{-\infty}^{\infty} u_\tau(t) y(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} u_\tau(t) y^\#(t) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(j\omega; \tau) \bar{G}(j\omega) \bar{U}(j\omega; \tau) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |U(j\omega; \tau)|^2 \bar{G}(j\omega) d\omega . \end{aligned}$$

Ora, ricordando che $\bar{G}(-j\omega) = G(j\omega)$, si riconosce facilmente che:

$$\begin{aligned} \langle u, y \rangle_\tau &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |U(j\omega; \tau)|^2 \bar{G}(j\omega) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} |U(j\omega; \tau)|^2 [\bar{G}(j\omega) + G(j\omega)] d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |U(j\omega; \tau)|^2 \operatorname{Re}[G(j\omega)] d\omega . \end{aligned}$$

Se $\operatorname{Re}[G(j\omega)] \geq \alpha > 0, \forall \omega \in \mathbf{R}^+$, allora

$$\begin{aligned} \langle u, y \rangle_\tau &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |U(j\omega; \tau)|^2 \operatorname{Re}[G(j\omega)] d\omega \geq \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{\infty} |U(j\omega; \tau)|^2 d\omega = \\ &= 2\alpha \|u_\tau\|_2^2 = 2\alpha \langle u, u \rangle_\tau ; \end{aligned}$$

quindi, l'operatore H è strettamente passivo relativamente all'ingresso. Per altro, in virtù delle ipotesi fatte, la norma indotta di H in L_2 è G_{max} , sicché:

$$\|y^\#\|_2^2 \leq G_{max}^2 \|u_\tau\|_2^2$$

e ponendo: $\varepsilon := \alpha, \delta := \alpha/G_{max}^2$ è immediato concludere che:

$$\begin{aligned} \langle u, y \rangle_\tau &\geq 2\alpha \langle u, u \rangle_\tau \geq \varepsilon \langle u, u \rangle_\tau + \delta \langle y^\#, y^\# \rangle \geq \\ &\geq \varepsilon \langle u, u \rangle_\tau + \delta \langle y, y \rangle_\tau \quad , \quad \forall (u, \tau) \in L_{2e} \times \mathbf{R}^+ . \end{aligned}$$

Pertanto, l'operatore H è strettamente passivo relativamente all'ingresso e all'uscita.

◻

Come più volte sottolineato, le nozioni legate al concetto di passività si rivelano particolarmente efficaci nello studio dei sistemi composti più o meno

complessi. Fra questi, un ruolo del tutto particolare, per la sua importanza in teoria del controllo, è svolto dai sistemi reazionati, all'analisi dei quali è dedicato il prossimo paragrafo.

7. Stabilità di sistemi reazionati a componenti passivi

Si consideri il sistema reazionato di Fig.14. I sottosistemi componenti S_1 e S_2 sono rispettivamente descritti dagli operatori causali H_1 e H_2 , mentre con H indicheremo l'operatore associato al sistema complessivo. Faremo d'ora in avanti l'ipotesi che H sia un operatore ben posto in L_{2e} ; cioè che, per ogni $u_1, u_2 \in L_{2e}$, esista una sola risposta $y_1, y_2 \in L_{2e}$. Questa proprietà è assicurata e quindi H è un ben definito operatore causale se, nel sistema di Fig.14, “l'anello è dinamico in senso proprio”; cioè se è dinamico in senso proprio il sistema associato alla composizione in cascata di H_1 e H_2 .

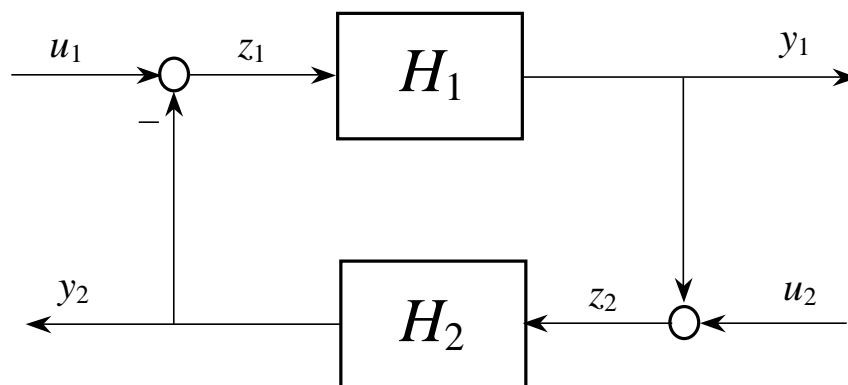


Fig. 14 : Operatore H formato dagli operatori H_1 e H_2 connessi in retroazione.

Come già notato in precedenza, a differenza della maggior parte degli operatori qui considerati, H è un operatore multivariabile. L'estensione al caso multivariabile della trattazione svolta richiede un ulteriore piccolo sforzo di astrazione, ma non presenta significative difficoltà concettuali fintanto che i sottosistemi presi in considerazione abbiano un ugual numero d'ingressi e d'uscite. Nel caso più generale, diventa significativa l'estensione, da noi deliberatamente lasciata in ombra, dei concetti di passività a quelli, più generali, di dissipatività di un sistema; estensione per la quale si rimanda alla letteratura specializzata sull'argomento.

Sotto l'ipotesi che il sistema di Fig.14 sia ben posto e con riferimento alla Definizione 8 e al Corollario 1, possiamo ora enunciare il seguente notevole risultato.

Teorema 7 *Passività e stabilità L_2 nei sistemi reazionati*

Supponiamo che l'operatore H rappresentato in Fig.14 sia ben posto e che gli operatori H_1 e H_2 siano passivi; sia cioè, per ogni $i = 1, 2$:

$$\langle z_i, y_i \rangle_\tau + \beta_i \geq \varepsilon_i \langle z_i, z_i \rangle_\tau + \delta_i \langle y_i, y_i \rangle_\tau \quad , \quad \forall (z_i, \tau) \in L_{2e} \times \mathbf{R}^+$$

con $\beta_i, \varepsilon_i, \delta_i \in \mathbf{R}^+$. Allora, l'operatore H è debolmente limitato, e quindi L_2 -stabile, se:

$$\delta_1 + \varepsilon_2 > 0 \quad , \quad \delta_2 + \varepsilon_1 > 0 \quad .$$

Se inoltre: $\beta := \beta_1 + \beta_2 = 0$, allora H è limitato.

Prova. Osserviamo innanzitutto che (per la passività degli operatori locali):

$$\langle z_1, y_1 \rangle_\tau + \langle z_2, y_2 \rangle_\tau \geq \varepsilon_1 \|z_{1\tau}\|_2^2 + \delta_1 \|y_{1\tau}\|_2^2 + \varepsilon_2 \|z_{2\tau}\|_2^2 + \delta_2 \|y_{2\tau}\|_2^2 - \beta \quad .$$

D'altro canto (per la struttura del sistema):

$$\begin{aligned} a) \quad \langle z_1, y_1 \rangle_\tau + \langle z_2, y_2 \rangle_\tau &= \langle u_1 - y_2, y_1 \rangle_\tau + \langle u_2 + y_1, y_2 \rangle_\tau = \\ &= \langle u_1, y_1 \rangle_\tau + \langle u_2, y_2 \rangle_\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad \varepsilon_1 \|z_{1\tau}\|_2^2 + \varepsilon_2 \|z_{2\tau}\|_2^2 &= \varepsilon_1 \langle u_1 - y_2, u_1 - y_2 \rangle_\tau + \varepsilon_2 \langle u_2 + y_1, u_2 + y_1 \rangle_\tau = \\ &= \varepsilon_1 (\|u_{1\tau}\|_2^2 - 2 \langle u_1, y_2 \rangle_\tau + \|y_{2\tau}\|_2^2) + \\ &+ \varepsilon_2 (\|u_{2\tau}\|_2^2 + 2 \langle u_2, y_1 \rangle_\tau + \|y_{1\tau}\|_2^2) \quad . \end{aligned}$$

Sostituendo queste due espressioni nella precedente, si ottiene:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 (\|u_{1\tau}\|_2^2 - 2 \langle u_1, y_2 \rangle_\tau + \|y_{2\tau}\|_2^2) + \varepsilon_2 (\|u_{2\tau}\|_2^2 + 2 \langle u_2, y_1 \rangle_\tau + \|y_{1\tau}\|_2^2) + \\ + \delta_1 \|y_{1\tau}\|_2^2 + \delta_2 \|y_{2\tau}\|_2^2 - \beta \leq \langle u_1, y_1 \rangle_\tau + \langle u_2, y_2 \rangle_\tau \end{aligned}$$

Riordinando i termini e considerando il valore assoluto:

$$\begin{aligned} &(\delta_1 + \varepsilon_2) \|y_{1\tau}\|_2^2 + (\delta_2 + \varepsilon_1) \|y_{2\tau}\|_2^2 - \beta \leq \\ &\leq \langle u_1 - 2 \varepsilon_2 u_2, y_1 \rangle_\tau + \langle u_2 + 2 \varepsilon_1 u_1, y_2 \rangle_\tau - \varepsilon_1 \|u_{1\tau}\|_2^2 - \varepsilon_2 \|u_{2\tau}\|_2^2 \leq \\ &\leq | \langle u_1 - 2 \varepsilon_2 u_2, y_1 \rangle_\tau + \langle u_2 + 2 \varepsilon_1 u_1, y_2 \rangle_\tau - \varepsilon_1 \|u_{1\tau}\|_2^2 - \varepsilon_2 \|u_{2\tau}\|_2^2 | \leq \\ &\leq | \langle u_1 - 2 \varepsilon_2 u_2, y_1 \rangle_\tau | + | \langle u_2 + 2 \varepsilon_1 u_1, y_2 \rangle_\tau | + \varepsilon_1 \|u_{1\tau}\|_2^2 + \varepsilon_2 \|u_{2\tau}\|_2^2 \quad . \end{aligned}$$

Ma, per la disuguaglianza di Schwarz ($|\langle a, b \rangle| \leq \|a\| \|b\|$)

$$\begin{aligned} & | \langle u_1 - 2 \varepsilon_2 u_2, y_1 \rangle_\tau | + | \langle u_2 + 2 \varepsilon_1 u_1, y_2 \rangle_\tau | \leq \\ & \leq \|u_{1\tau} - 2 \varepsilon_2 u_{2\tau}\| \|y_{1\tau}\| + \|u_{2\tau} + 2 \varepsilon_1 u_{1\tau}\| \|y_{2\tau}\| \leq \\ & \leq (\|u_{1\tau}\| + 2 \varepsilon_2 \|u_{2\tau}\|) \|y_{1\tau}\| + (\|u_{2\tau}\| + 2 \varepsilon_1 \|u_{1\tau}\|) \|y_{2\tau}\| . \end{aligned}$$

Quindi, per ogni $\tau \in \mathbf{R}^+$, si ha:

$$\begin{aligned} & (\delta_1 + \varepsilon_2) \|y_{1\tau}\|_2^2 + (\delta_2 + \varepsilon_1) \|y_{2\tau}\|_2^2 - \beta \leq \\ & \leq \|u_{1\tau}\| \|y_{1\tau}\| + 2 \varepsilon_2 \|u_{2\tau}\| \|y_{1\tau}\| + \|u_{2\tau}\| \|y_{2\tau}\| + 2 \varepsilon_1 \|u_{1\tau}\| \|y_{2\tau}\| + \\ & \qquad \qquad \qquad + \varepsilon_1 \|u_{1\tau}\|_2^2 + \varepsilon_2 \|u_{2\tau}\|_2^2 . \quad (\clubsuit) \end{aligned}$$

Se, a questo punto, si pone:

$$\begin{aligned} v & := \begin{bmatrix} \|u_{1\tau}\| \\ \|u_{2\tau}\| \end{bmatrix} , & w & := \begin{bmatrix} \|y_{1\tau}\| \\ \|y_{2\tau}\| \end{bmatrix} \\ P & := \begin{bmatrix} \delta_1 + \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & \delta_2 + \varepsilon_1 \end{bmatrix} , & Q & := \begin{bmatrix} 1 & 2 \varepsilon_2 \\ 2 \varepsilon_1 & 1 \end{bmatrix} , & R & := \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

la disuguaglianza (\clubsuit) può essere espressa in forma più compatta:

$$w' P w \leq w' Q v + v' R v + \beta . \quad (*)$$

Se quindi si pone:

$$S := \sqrt{P} = \begin{bmatrix} \sqrt{\delta_1 + \varepsilon_2} & 0 \\ 0 & \sqrt{\delta_2 + \varepsilon_1} \end{bmatrix} , \quad T := S^{-1} Q / 2 , \quad M^2 := T' T + R$$

è facile verificare che la disuguaglianza (*) può anche essere scritta:

$$(S w - T v)' (S w - T v) \leq v' M^2 v + \beta$$

ovvero, indicando con $\|\cdot\|_E$ la norma euclidea in \mathbf{R}^2 :

$$\|S w - T v\|_E^2 \leq \|M v\|_E^2 + \beta .$$

Poiché, per ogni $a, b \in \mathbf{R}^+$, si ha $a^2 + b^2 \leq (a + b)^2$, risulta:

$$\|S w - T v\|_E \leq \|M v\|_E + \sqrt{\beta}$$

Ma $\|S w - T v\|_E \geq \|S w\|_E - \|T v\|_E$, quindi:

$$\|S w\|_E \leq \|T v\|_E + \|M v\|_E + \sqrt{\beta} \leq (\|T\|_E + \|M\|_E) \|v\|_E + \sqrt{\beta} .$$

Infine, posto: $\eta := S w$ e ricordando che S è non singolare, si ha:

$$\begin{aligned} \|w\|_E &= \|S^{-1} \eta\|_E \leq \|S^{-1}\|_E \|\eta\|_E = \|S^{-1}\|_E \|S w\|_E \leq \\ &\leq \|S^{-1}\|_E [(\|T\|_E + \|M\|_E) \|v\|_E + \sqrt{\beta}] := \hat{\gamma} \|v\|_E + \hat{\beta} \end{aligned}$$

cioè:

$$\|y\|_2 \leq \hat{\gamma} \|u\|_2 + \hat{\beta} .$$

Esempio 12 *Sistema di Lur'e*

Consideriamo il sistema di Lur'e mostrato in Fig.15. Come applicazione diretta del Teorema 7, è possibile ottenere il risultato seguente.

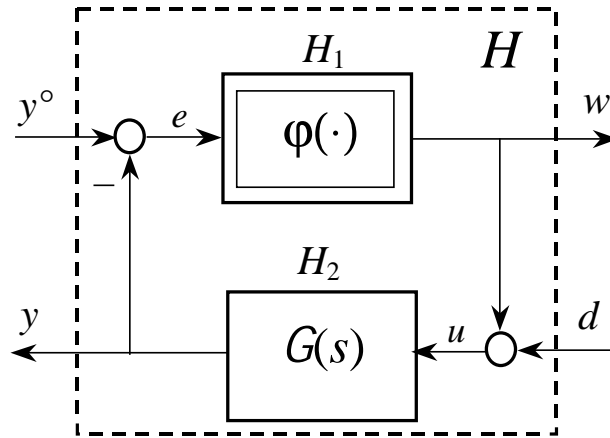


Fig. 15 : Sistema S di Lur'e.

Teorema 8 *Stabilità L_2 nel settore $[0, k]$*

Con riferimento al sistema di Lur'e di Fig.15, supponiamo che:

- l'operatore H_1 corrisponda ad un sistema non dinamico tempo-invariante con caratteristica ingresso-uscita $\varphi(\cdot)$;

- l'operatore H_2 corrisponda ad un sistema dinamico lineare tempo-invariante asintoticamente stabile (A, B, C) descritto dalla funzione di trasferimento

$$G(s) = C (s I - A)^{-1} B$$

ed esistano $\rho > 0$ e $\sigma \geq 0$ tali che (Fig.16):

$$\operatorname{Re}[G(j\omega)] \geq -\sigma > -\rho, \quad \forall \omega \geq 0, \quad \alpha := \rho - \sigma > 0.$$

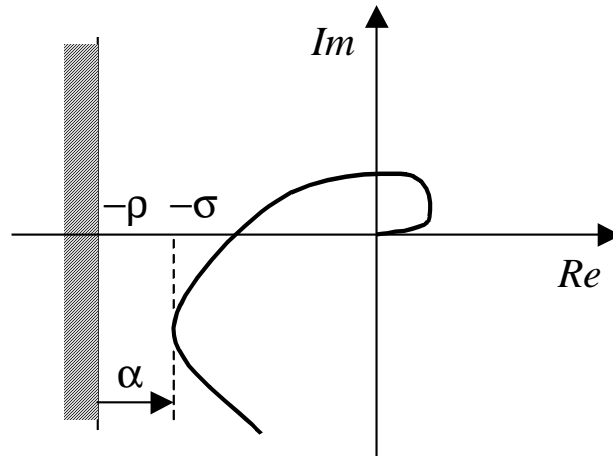


Fig. 16 : Condizione di Popov ($q = 0, k = 1/\rho$).

Allora, il sistema S , o meglio l'operatore H che lo descrive, è debolmente limitato, e quindi L_2 -stabile, per ogni $\varphi(\cdot) \in \Phi[0, k]$, con $k := 1/\rho$.

Per la dimostrazione del Teorema 8, che si basa su un artificio simile, ma in un certo senso simmetrico, a quello usato a suo tempo per ricavare il criterio del cerchio, è opportuno premettere le proposizioni seguenti.

Proposizione 6

Con riferimento al sistema di Fig.18-a, dove $\rho = 1/k$, sia $\eta(\cdot)$ la funzione che descrive il legame fra e e w (Fig.17); allora, $\varphi(\cdot)$ appartiene al settore $[0, k]$ se e solo se $\eta(\cdot)$ appartiene al settore $[0, \infty]$.

Prova. In ogni punto (\bar{v}, \bar{w}) di una caratteristica $\varphi(\cdot) \in \Phi_{[0, k]}$, sarà:

$$\bar{w} = h \bar{v}, \quad h \in [0, k].$$

Il corrispondente valore di e dev'essere tale che:
 $e + \rho \bar{w} = \bar{v}$, cioè:

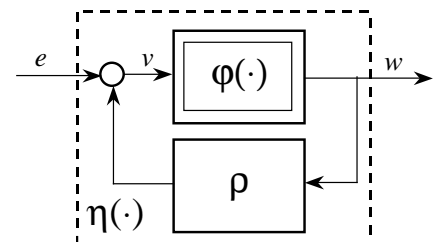
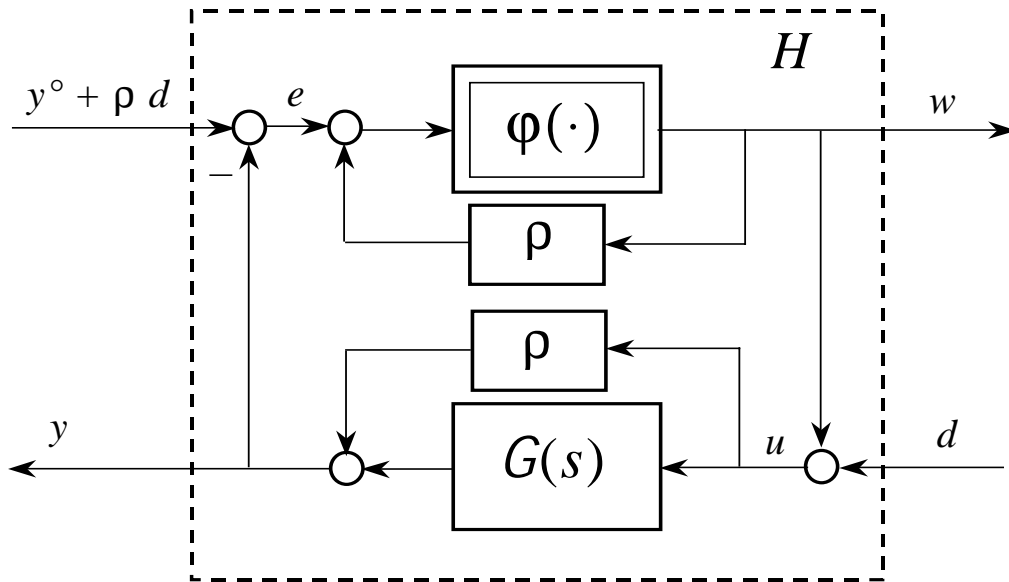


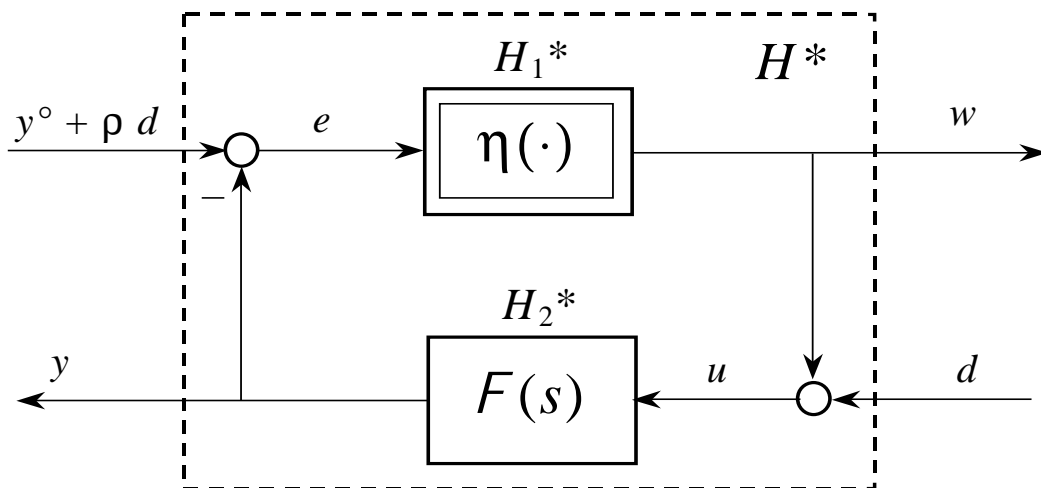
Fig. 17 : La funzione $\eta(\cdot)$.

$$\bar{e} = \frac{1}{h} \bar{w} - \rho \bar{w} \quad \Rightarrow \quad \bar{w} = \frac{h}{1 - \rho h} \bar{e}$$

e quando h tende a $k = 1/\rho$ il rapporto \bar{w}/\bar{e} tende all'infinito.



(a)



(b)

Fig. 18 : (a) Riformulazione equivalente del sistema di Lur'e S di Fig.15;
(b) Sistema di Lur'e S^* .

Proposizione 7

Il sistema S di Fig.15 è L_2 -stabile nel settore $[0, k]$ se e solo se il sistema S^* di Fig.18-b, dove $F(s) = G(s) + \rho$ e $\rho = 1/k$, è L_2 -stabile nel settore $[0, \infty]$.

Prova. In vista della Proposizione 6, è sufficiente notare che i segnali y° e d del sistema S di Fig.15 hanno norma L_2 finita se e solo se i segnali d e $y^\circ + d$ del sistema S^* di Fig.18-b hanno norma L_2 finita.

Prova del Teorema 8. Poiché $G(s)$ descrive un sistema asintoticamente stabile, la stessa affermazione vale per $F(s) = G(s) + \rho$. Inoltre, poiché per ipotesi $Re[G(j\omega)] \geq -\sigma$, $\forall \omega \geq 0$, si ha:

$$Re[F(j\omega)] \geq -\sigma + \rho = \alpha > 0, \forall \omega \geq 0,$$

e quindi anche $F(s)$ è strettamente reale positiva. In vista della Proposizione 5, si può quindi affermare che, se non è polarizzato, H_2^* è un operatore passivo relativamente all'ingresso e all'uscita ($\varepsilon_2, \delta_2 > 0$). D'altro canto, se $\eta(\cdot) \in \Phi_{[0, \infty]}$ anche l'operatore H_1^* (Esempio 6) è passivo ($\varepsilon_1 = \delta_1 > 0$) e poiché: $\varepsilon_1 + \delta_2 > 0$ e $\varepsilon_2 + \delta_1 > 0$, dal Teorema 7 segue che S^* è L_2 -stabile nel settore $[0, \infty]$. Dunque, nel caso in cui H_2^* sia un operatore non polarizzato, la Proposizione 7 chiude la dimostrazione. Se H_2^* è polarizzato (stato iniziale di S_2^* diverso da zero), per l'asintotica stabilità del sistema (A, B, C) si ha:

$$H_2^*(u) := G_2^*(u) + y_{20}$$

$$G_2^*(0) = 0 \quad , \quad y_{20}(t) = C e^{At} x_0 \quad , \quad y_{20} \in L_2 .$$

Il sistema di Fig.18-b si modifica come mostrato nella Fig.19-a, che per altro è equivalente a quella di Fig.19-b. Poiché y_{20} ha norma L_2 finita e G_2^* è non polarizzato, dall'esame di quest'ultima figura si deduce facilmente che l'operatore H^{**} è debolmente limitato e quindi L_2 -stabile nel settore $[0, \infty]$. Pertanto, anche H^* è L_2 -stabile nel settore $[0, \infty]$ e quindi (Proposizione 7) l'operatore H che descrive il sistema di Fig.15 è L_2 -stabile nel settore $[0, k]$. □

Dal Teorema 8 è immediato ricavare, come dal criterio di Popov con $q = 0$ (Teorema 2 del Capitolo 1), un *criterio del cerchio* per la stabilità L_2 del sistema di Lur'e in un settore $[k_1, k_2]$. Si ritrova così, per questa via, un interessante risultato già ottenuto (Teorema 6) come applicazione del teorema del piccolo guadagno. Questa osservazione mette in ulteriore evidenza come il Teorema 8 corrisponda, con riferimento alla stabilità L_2 anziché alla stabilità assoluta del sistema autonomo, al criterio di Popov con $q = 0$. E' quindi naturale chiedersi se,

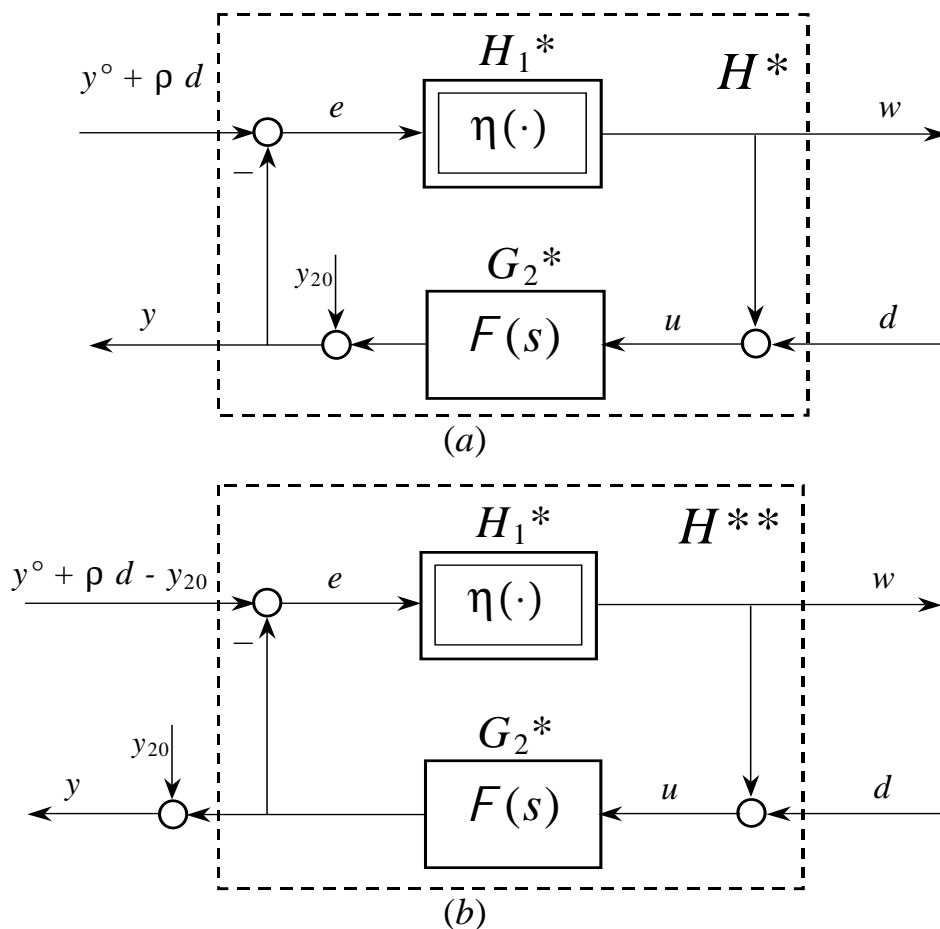


Fig. 19 : L'operatore H^* con H_2^* polarizzato.

anche per la stabilità L_2 del sistema di Lur'e in un settore $[0, k]$, sia possibile ottenere un risultato più generale del Teorema 8; un risultato, cioè, più prossimo a costituire una replica più esauriente del criterio di Popov (con $q \neq 0$). La risposta al quesito, parzialmente affermativa, è costituita da un criterio per l'enunciato del quale è necessario introdurre preliminarmente una definizione restrittiva dello spazio L_2 .

Definizione 9

Sia \tilde{L}_2 lo spazio dei segnali appartenenti a L_2 assieme alla loro derivata prima:

$$\tilde{L}_2 := \{v : v, \dot{v} \in L_2\}.$$



Ad esempio, se $y_0(t) = C e^{At} x_0$, si ha: $\dot{y}_0(t) = C A e^{At} x_0$; quindi, se gli autovalori di A hanno parte reale negativa, $y_0 \in \tilde{L}_2$.

Teorema 9 *Un criterio alla Popov di stabilità ingresso-uscita del sistema di Lur'e in un settore $[0, k]$*

Con riferimento al sistema di Lur'e di Fig.15, supponiamo che:

- l'operatore H_1 corrisponda ad un sistema non dinamico tempo-invariante con caratteristica ingresso-uscita $\varphi(\cdot)$;
- l'operatore H_2 corrisponda ad un sistema dinamico lineare tempo-invariante asintoticamente stabile (A, B, C) descritto dalla funzione di trasferimento

$$G(s) = C (s I - A)^{-1} B ;$$

allora, se esiste $\hat{q} \in \mathbf{R}^+$ tale che:

$$\frac{1}{k} + \operatorname{Re}[(1 + j \omega \hat{q}) G(j\omega)] > 0 \quad , \quad \forall \omega \geq 0 ,$$

si ha: $y, w \in L_2$, per ogni $y^\circ, d \in \tilde{L}_2$ e per ogni $\varphi(\cdot) \in \Phi[0, k]$.

Prova. Con riferimento alla Fig.19-b e alla dimostrazione del Teorema 8, sappiamo che, se

$$\operatorname{Re}[F(j\omega)] := \operatorname{Re}[G(j\omega) + \rho] \geq \alpha > 0 \quad , \quad \forall \omega \geq 0 ,$$

allora H^{**} è L_2 -stabile per ogni $\eta(\cdot) \in \Phi[0, \infty]$ e H è L_2 -stabile per ogni $\varphi(\cdot) \in \Phi[0, k]$, $k := 1/\rho$. Ma, per ogni $q \geq 0$, H^{**} è palesemente equivalente all'operatore $H^\#$ di Fig.20, nella forma (a) o indifferentemente (b).

Con riferimento alla Fig.20-b, cominciamo a dimostrare che, se $\eta(\cdot) \in \Phi[0, \infty]$ e $q > 0$ (il caso $q = 0$ è banale), $H_1^\#$ è un operatore passivo. Infatti:

$$w(t) = \eta(e(t)) \quad , \quad q \dot{e}(t) + e(t) = z(t) \quad , \quad e(0) = w(0) = 0 ;$$

e quindi:

$$\langle w, z \rangle_\tau = \int_0^\tau \eta(e(t)) e(t) dt + q \int_0^\tau \eta(e(t)) \dot{e}(t) dt ;$$

ma, poiché la caratteristica $\eta(\cdot)$ sta nel primo e terzo quadrante, si ha:

$$\int_0^\tau \eta(e(t)) e(t) dt \geq 0 \quad , \quad \forall \tau \geq 0$$

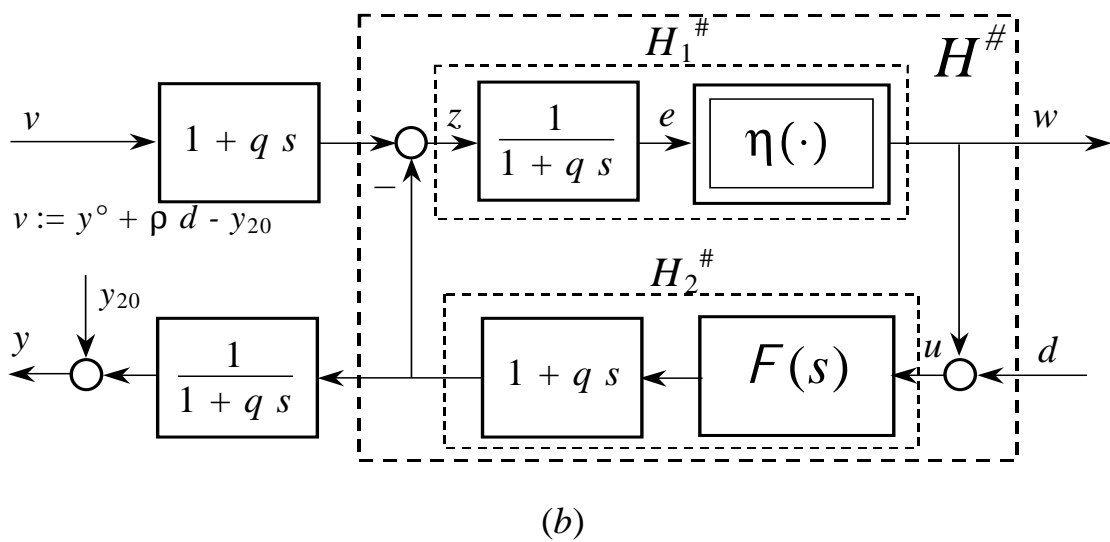
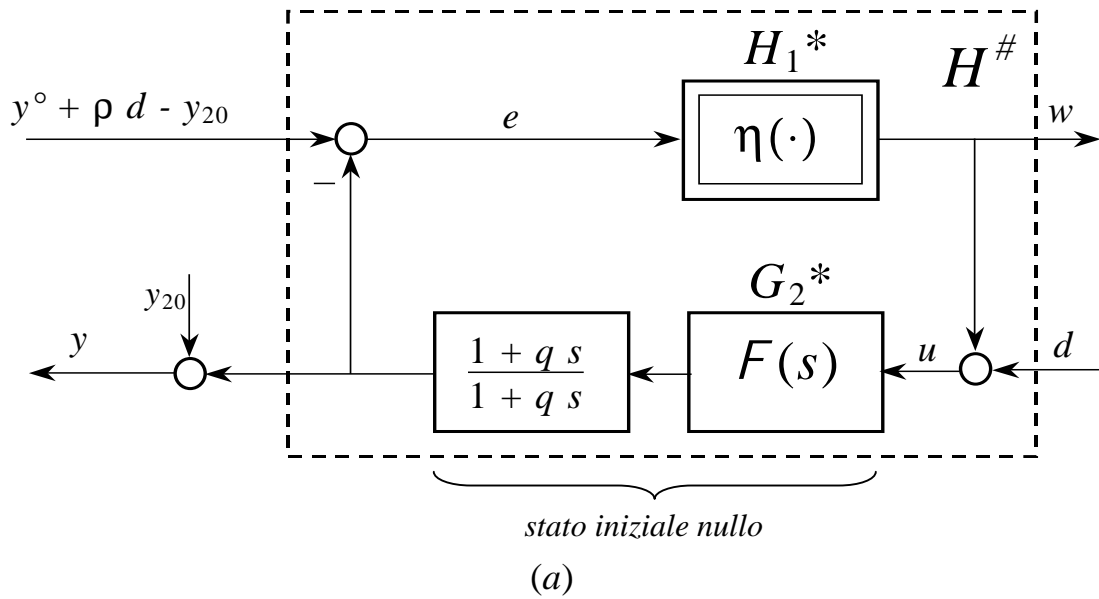


Fig. 20 : Forme equivalenti del sistema di Fig.19-b.

e inoltre:

$$\int_0^{\tau} \eta(e(t)) \dot{e}(t) dt = \int_0^{e(\tau)} \eta(e) de \geq 0 \quad , \quad \forall \tau \geq 0$$

sicché:

$$\langle w, z \rangle_{\tau} \geq 0 \quad , \quad \forall (z, \tau) \in L_{2e} \times \mathbf{R}^+ .$$

In virtù del Teorema 7, possiamo affermare l'operatore $H^\#$ è debolmente limitato, e quindi L_2 -stabile, per ogni $\eta(\cdot) \in \Phi[0, \infty]$ se $H_2^\#$ è strettamente passivo relativamente all'ingresso e all'uscita, ossia se $(1 + q s) F(s)$ è tale che:

$$\operatorname{Re}[(1 + q j \omega) F(j\omega)] \geq \alpha > 0 \quad , \quad \forall \omega \geq 0 .$$

Poiché $F(s) := G(s) + \rho$, con $\rho := 1/k$, quest'ultima condizione diventa:

$$\frac{1}{k} + \operatorname{Re}[(1 + q j \omega) G(j\omega)] \geq \alpha > 0 \quad , \quad \forall \omega \geq 0 ;$$

Ma perché essa sia soddisfatta per almeno un valore positivo di q , è sufficiente che esista $\hat{q} > 0$ tale che:

$$\frac{1}{k} + \operatorname{Re}[(1 + \hat{q} j \omega) G(j\omega)] > 0 \quad , \quad \forall \omega \geq 0 .$$

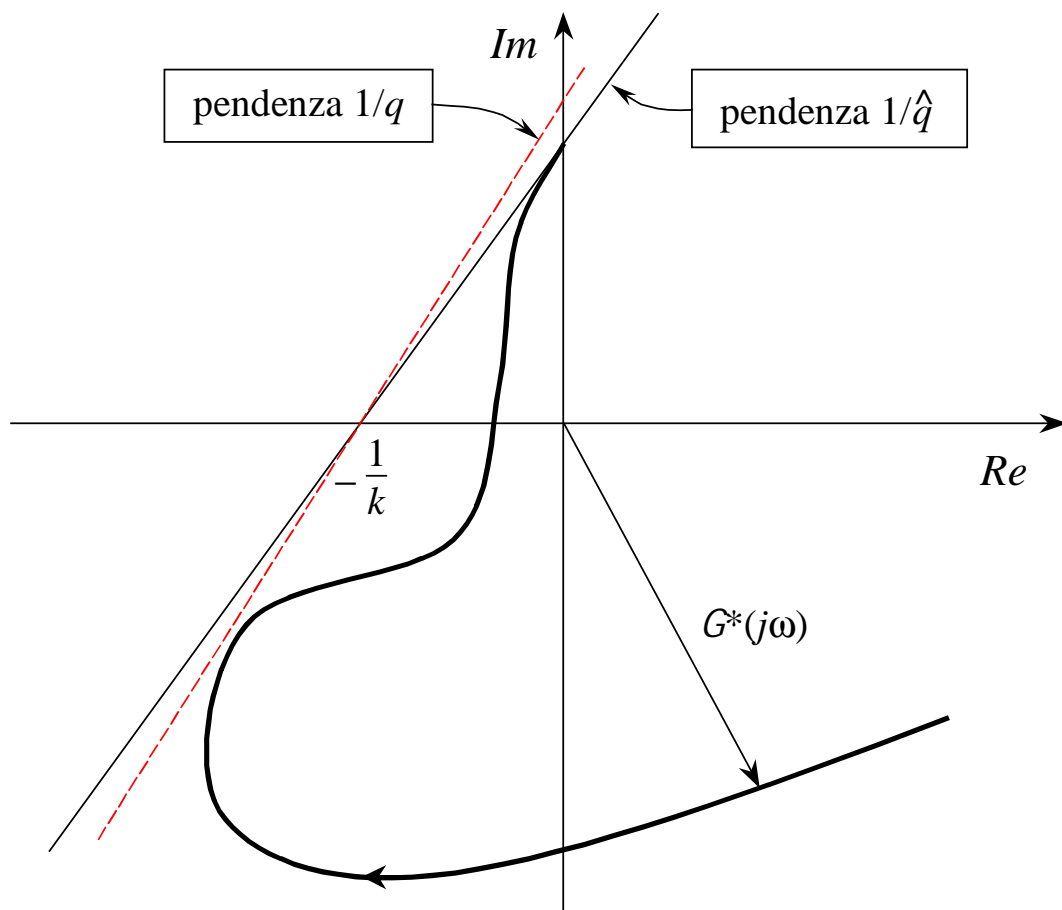


Fig. 21 : Esistenza di una retta per $-1/k$ che lascia strettamente a destra il diagramma di Popov.

In tal caso, infatti, se consideriamo la funzione di Popov

$$G^*(j\omega) := \operatorname{Re}[G(j\omega)] + j\omega \operatorname{Im}[G(j\omega)],$$

è evidente che l'esistenza di una retta con pendenza positiva $1/\hat{q}$, passante per il punto $-1/k$, che lasci alla sua destra il diagramma polare di $G^*(j\omega)$, $\omega \geq 0$, (ma non necessariamente il punto corrispondente al limite di $G^*(j\omega)$ per ω che tende all'infinito) implica (Fig.21) l'esistenza di una retta con pendenza positiva $1/q$, sempre passante per il punto $-1/k$, che lasci però *strettamente* alla sua destra il suddetto diagramma polare.

Quindi, sotto l'ipotesi del Teorema 9, esistono $q > 0$ e $\alpha > 0$ tali che:

$$\frac{1}{k} + \operatorname{Re}[(1 + q j \omega) G(j\omega)] \geq \alpha > 0 \quad , \quad \forall \omega \geq 0 .$$

Se (Fig.20-b), per ogni $\eta(\cdot) \in \Phi[0, \infty]$, $H^\#$ è L_2 -stabile, possiamo di conseguenza affermare che

$$y, w \in L_2 \quad , \quad \forall y^\circ, d \in \tilde{L}_2 .$$

Infine, ricordando (Proposizione 6) che $\eta(\cdot)$ appartiene al settore $[0, \infty]$ se e solo se $\varphi(\cdot)$ appartiene al settore $[0, k]$ la dimostrazione è conclusa.