

Capitolo 1
Il problema di Lur'e

1. Introduzione

Il problema di Lur'e riguarda l'analisi di una particolare forma di stabilità robusta per sistemi nei quali un elemento L lineare e invariante nel tempo, descritto da una funzione (o matrice) di trasferimento, è connesso in retroazione ad un secondo elemento N , non lineare e non dinamico, descritto da una funzione caratteristica ϕ , eventualmente variante ma più spesso invariante nel tempo. Sistemi di questo tipo sono mostrati in Fig.1 nelle due forme equivalenti (a) o (b). Ad essi, indipendentemente dalla forma di volta in volta presa specificamente in considerazione, daremo d'ora in avanti il nome di *sistema di Lur'e*.

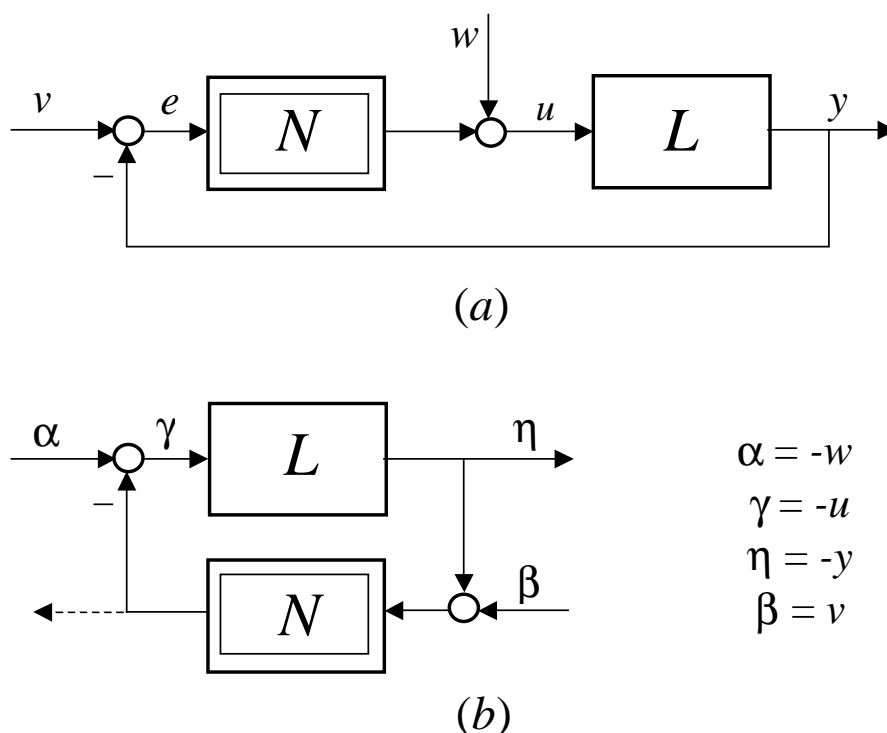


Fig. 1 : Forme equivalenti di un sistema di Lur'e.

Ora, per quanto siano numerosi i sistemi di controllo la cui struttura risulta fin dall'inizio naturalmente conforme a quella di un sistema di Lur'e, resta da comprendere come mai uno studio tutto focalizzato sull'analisi del comportamento di un sistema dalla forma in realtà abbastanza particolare come quello di Fig.1 abbia assunto tanta rilevanza nell'ambito della teoria del controllo e non solo; sistemi riconducibili alla forma di Lur'e s'incontrano infatti in elettronica (amplificatori reazionati a larga banda, oscillatori), nelle telecomunicazioni (discriminatori ad aggancio di fase) e in diverse altre discipline.

In realtà, è importante riconoscere che la stabilità dell'equilibrio di un sistema costituito da un solo elemento non lineare connesso in retroazione ad un sistema lineare e tempo-invariante può sempre essere analizzata riconducendo l'attenzione alla stabilità dell'equilibrio in un sistema di Lur'e convenientemente associato a quello originario. Senza voler insistere in modo particolare su un punto che non sarà oggetto nel seguito di specifica trattazione, va tuttavia notato che anche la restrizione al caso di un unico elemento non lineare tende ad assumere contorni relativamente sfumati nel caso multivariabile, quando l'elemento non lineare può essere costituito da diversi "blocchi", lineari e non, a un ingresso e un'uscita, variamente interconnessi.

Per mettere nella dovuta evidenza che la forma di Lur'e è quasi sempre il risultato di un'opportuna riformulazione del problema iniziale, il prossimo paragrafo sarà interamente dedicato alla discussione di un esempio particolare. Vedremo così formarsi nel modo più naturale l'esigenza di un particolare tipo di stabilità robusta, denominata da Lur'e *stabilità assoluta*, la cui precisa definizione e trattazione è rimandata ai paragrafi successivi.

2. Un esempio significativo

Se si esclude il caso di elementi non lineari deliberatamente inseriti nel controllore a fini particolari, i componenti di un sistema di controllo il cui comportamento, per essere descritto con sufficiente accuratezza, più frequentemente richiede il ricorso a modelli non lineari sono i trasduttori (segnatamente, i sensori) e gli attuatori. La non linearità dei sensori è spesso correggibile inserendo nell'organo di condizionamento un adeguato elemento non lineare che compensi la non linearità del sensore; un elemento, cioè, la cui uscita dipenda linearmente, almeno nella regione di funzionamento, dalla variabile percepita dal sensore. Si consideri quindi, a titolo di esempio, il sistema di controllo Σ di Fig.2, dove $R(s)$, $P(s)$ e $T(s)$ sono, rispettivamente, le funzioni di trasferimento del controllore, del sistema sotto controllo e del trasduttore, mentre $\psi(\cdot)$ è la funzione caratteristica dell'attuatore. Ipotizziamo inoltre che il controllore sia di tipo 1, e quindi $R(s)$ abbia un polo nell'origine, mentre $P(s)$ e naturalmente $T(s)$ siano di tipo 0; con la solita notazione avremo cioè: $g_R = 1$, $g_P = g_T = 0$. Come di consueto, u_0 sarà da ritenersi costante. Supponiamo infine che la caratteristica dell'attuatore presenti il tipico andamento "a S" mostrato in Fig.3, dove il tratto in grassetto rappresenta l'insieme dei punti lavoro regolarmente sostenibili in condizioni di equilibrio.

Siano \bar{y}° e \bar{d}_a due valori costanti di y° e d_a , rispettivamente, e chiediamoci innanzitutto quale sia la condizione di equilibrio di Σ che corrisponde agli ingressi costanti \bar{y}° , \bar{d}_a e u_0 .

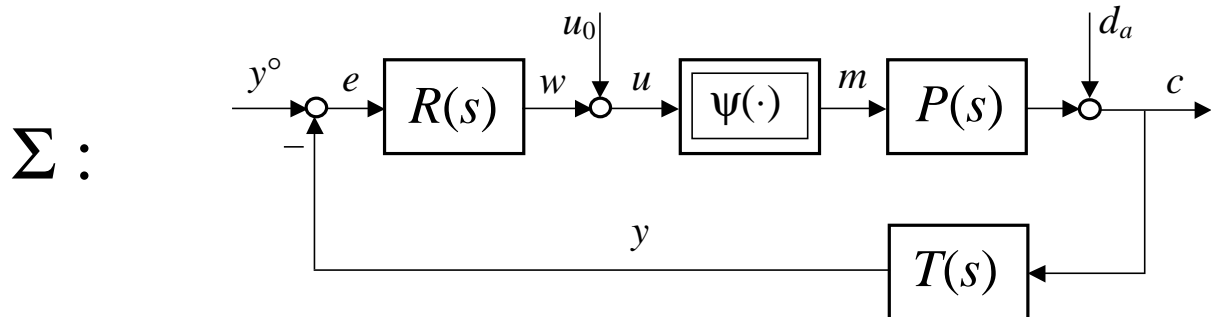


Fig. 2 : Un sistema di controllo.

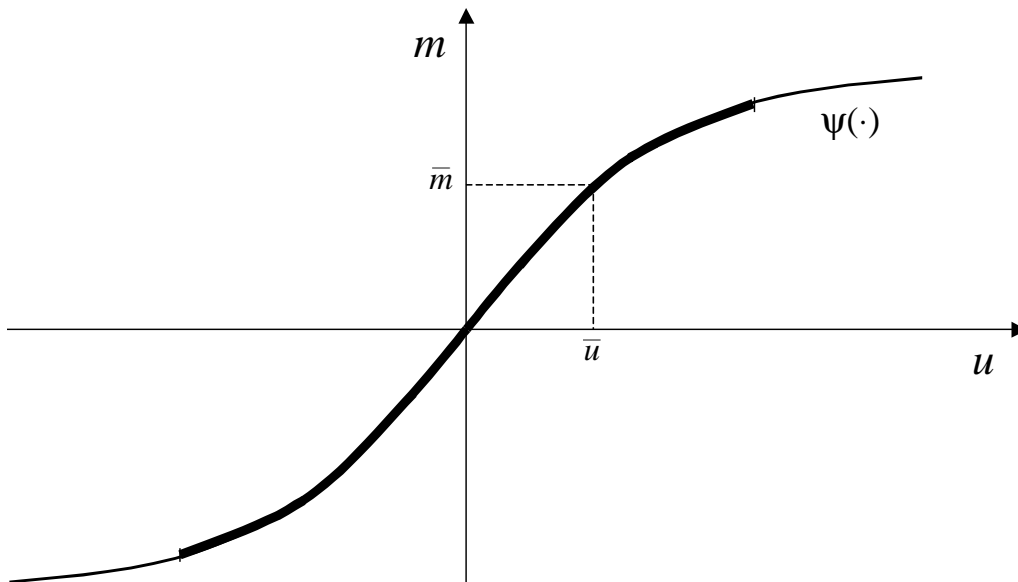


Fig. 3 : Caratteristica dell'attuatore.

La risposta non è difficile. Poiché, per ipotesi, il controllore esercita un'azione integrale ($g_R = 1$), in ogni condizione di equilibrio si avrà $\bar{e} = 0$; quindi, $\bar{y} = \bar{y}^\circ$ e, di conseguenza, $\bar{c} = \bar{y}/\mu_T = \bar{y}^\circ/\mu_T$. Ma $\bar{c} = \mu_P \bar{m} + \bar{d}_a$ e pertanto:

$$\frac{\bar{y}^\circ}{\mu_T} = \mu_P \bar{m} + \bar{d}_a$$

da cui:

$$\bar{m} = \frac{1}{\mu_P} \left(\frac{\bar{y}^\circ}{\mu_T} - \bar{d}_a \right)$$

e infine (Fig.3): $\bar{u} = \psi^{-1}(\bar{m})$, $\bar{w} = \bar{u} - u_0$.

Per il progetto del controllore, cioè della funzione di trasferimento $R(s)$, possiamo ritenere che si sia fatto riferimento al modello lineare $\delta\Sigma$ tangente a Σ in uno dei possibili stati di equilibrio (Fig.4), dove k è il guadagno differenziale dell'attuatore nel punto di lavoro corrispondente allo stato di equilibrio considerato:

$$k = \frac{\partial \psi}{\partial u}(\bar{u}) .$$

Poiché ci sono non uno ma infiniti stati di equilibrio possibili, è plausibile che il guadagno k sia stato considerato un parametro incerto, caratterizzato da un valore minimo, un valore massimo ed eventualmente un valore nominale intermedio.

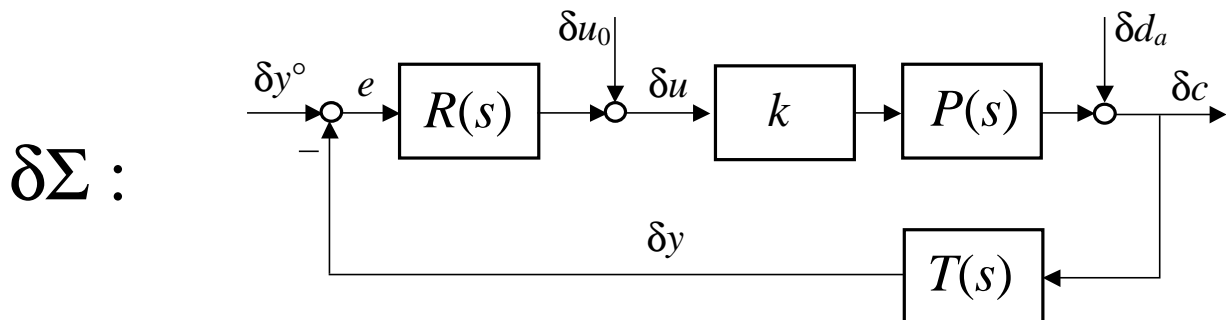


Fig. 4 : Sistema lineare tangente a Σ in uno stato di equilibrio.

Una volta che, su questa base, il progetto del controllore sia stato condotto a termine, garantendo che $\delta\Sigma$ sia robustamente asintoticamente stabile rispetto all'insieme dei valori ammissibili del guadagno k , è certo che in $\delta\Sigma$ ogni stato di equilibrio corrispondente a valori costanti degli ingressi è *globalmente stabile*; è cioè asintoticamente stabile e il suo bacino di attrazione è l'intero spazio di stato. Quindi, arbitrarie variazioni a scalino delle variabili d'ingresso da un valore costante, con associato un determinato stato di equilibrio, ad un altro valore costante, con associato un diverso stato di equilibrio, produrranno adeguati transitori al termine dei quali la variabile controllata avrà invariabilmente raggiunto il valore desiderato, indipendentemente dal valore (costante) dei disturbi.

Resta ora da chiedersi se sia lecito aspettarsi che questo buon comportamento di $\delta\Sigma$ non differisca in modo sostanziale da quello che si produce sollecitando, con le corrispondenti variazioni a scalino degli ingressi, il sistema originario Σ . In altre parole, resta da chiedersi se e sotto quali condizioni si possa garantire che, anche in Σ , arbitrarie variazioni a scalino delle variabili d'ingresso da un valore costante, con associato un determinato stato di equilibrio, ad un altro valore costante, con associato un diverso stato di equilibrio, producano adeguati transitori al termine dei quali la variabile controllata avrà in ogni caso raggiunto il valore desiderato y° , indipendentemente dal valore (costante) dei disturbi d_a e u_0 . Resta da chiedersi se si possa, quindi, garantire che il buon comportamento ottenuto per $\delta\Sigma$ non venga compromesso dalla non linearità dell'attuatore. Eventualità che sarebbe senzaltro scongiurata se si potesse garantire che, anche in Σ , tutti gli stati di equilibrio corrispondenti ad ammissibili valori costanti degli ingressi fossero *globalmente* stabili.

Per esplorare quest'ultima possibilità, introduciamo un cambiamento di variabili che fa diretto riferimento al punto di lavoro del sistema Σ corrispondente, in condizione di equilibrio, agli ingressi costanti \bar{y}° , \bar{d}_a e u_0 . Sia:

$$\begin{aligned}\Delta e(t) &:= e(t) - \bar{e} \\ \Delta w(t) &:= w(t) - \bar{w} \\ \Delta u(t) &:= u(t) - \bar{u} \\ \Delta m(t) &:= m(t) - \bar{m} \\ \Delta c(t) &:= c(t) - \bar{c} \\ \Delta y(t) &:= y(t) - \bar{y}.\end{aligned}$$

Poiché gli ingressi (costanti) sono rimasti invariati, si ha :

$$\begin{aligned}\Delta y^\circ(t) &:= y^\circ(t) - \bar{y}^\circ = 0 \\ \Delta u_0 &:= u_0(t) - u_0 = 0 \\ \Delta d_a(t) &:= d_a(t) - \bar{d}_a = 0.\end{aligned}$$

Nelle nuove variabili, il sistema Σ assume la forma Σ^* mostrata in Fig.5, dove la funzione caratteristica $\varphi(\cdot)$ ha adesso l'andamento mostrato in Fig.6. La caratteristica di Fig.6, infatti, non è altro che la caratteristica di Fig.3, "vista" però dal punto di lavoro (in condizione di equilibrio) considerato; punto di lavoro che costituisce l'origine dei nuovi assi Δu e Δm . Si noti che, a differenza di $\delta\Sigma$, che rappresenta (Fig.4) un'approssimazione di Σ valida soltanto in prossimità del punto di lavoro considerato, la forma Σ^* di Fig.5 è una rappresentazione alternativa, rigorosamente equivalente, del sistema Σ .

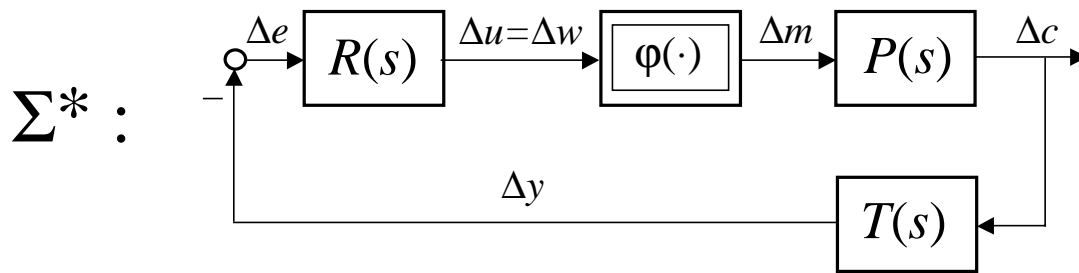


Fig. 5 : Rappresentazione equivalente di Σ .

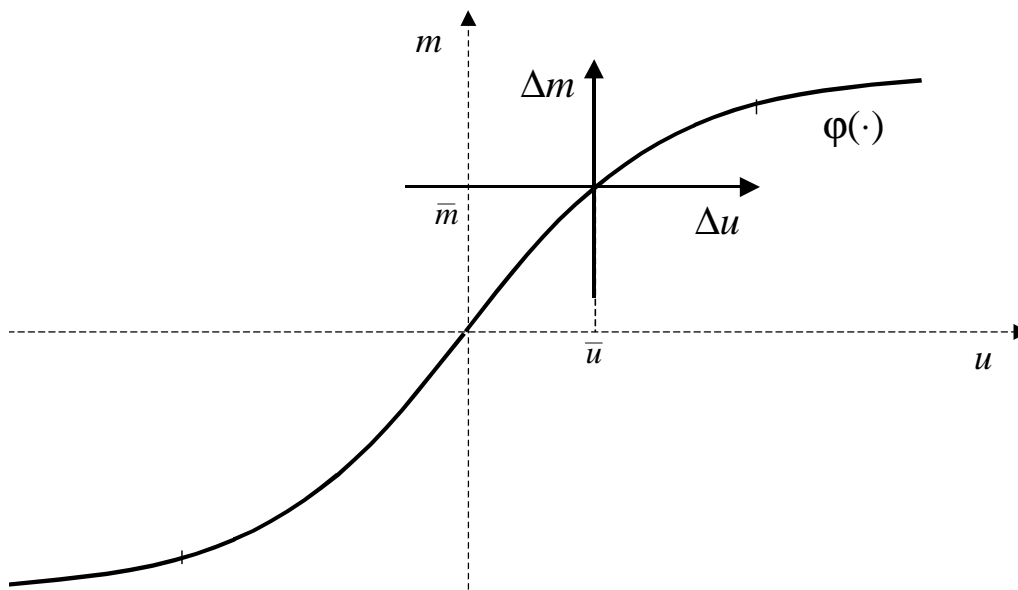


Fig. 6 : La funzione caratteristica $\varphi(\cdot)$.

La stabilità dello stato di equilibrio forzato in Σ dagli ingressi \bar{y}° , \bar{d}_a e u_0 equivale, nella rappresentazione Σ^* di Fig.5, alla stabilità dell'*origine dello spazio di stato*.

Al variare del valore (costante) degli ingressi \bar{y}° , \bar{d}_a e u_0 in Σ , e quindi al variare del punto di lavoro (\bar{u}, \bar{m}) sulla caratteristica dell'attuatore, l'unico elemento che cambia nella rappresentazione Σ^* di Fig.5 è la funzione $\varphi(\cdot)$. In Fig.7 sono mostrati alcuni dei possibili andamenti della funzione caratteristica $\varphi(\cdot)$, al variare del valore considerato per \bar{y}° , \bar{d}_a e u_0 , e quindi al variare del punto di lavoro (\bar{u}, \bar{m}) .

Possiamo concludere l'esame di questo esempio con due osservazioni. La prima è formulabile come segue. Se riuscissimo a dimostrare, sotto ragionevoli condizioni, che in Σ^* l'origine dello spazio di stato è *globalmente stabile*

qualunque sia l'andamento della caratteristica $\varphi(\cdot)$, fra tutti i suoi andamenti possibili (Fig.7), potremmo essere certi che, in Σ , arbitrarie variazioni a scalino delle variabili d'ingresso da un valore costante, con associato un determinato stato di equilibrio, ad un altro valore costante, con associato un diverso stato di equilibrio, producano adeguati transitori al termine dei quali la variabile controllata avrà in ogni caso raggiunto il valore desiderato, indipendentemente dal valore (costante) dei disturbi. Avremmo, cioè, risolto positivamente la questione che ci eravamo posti.

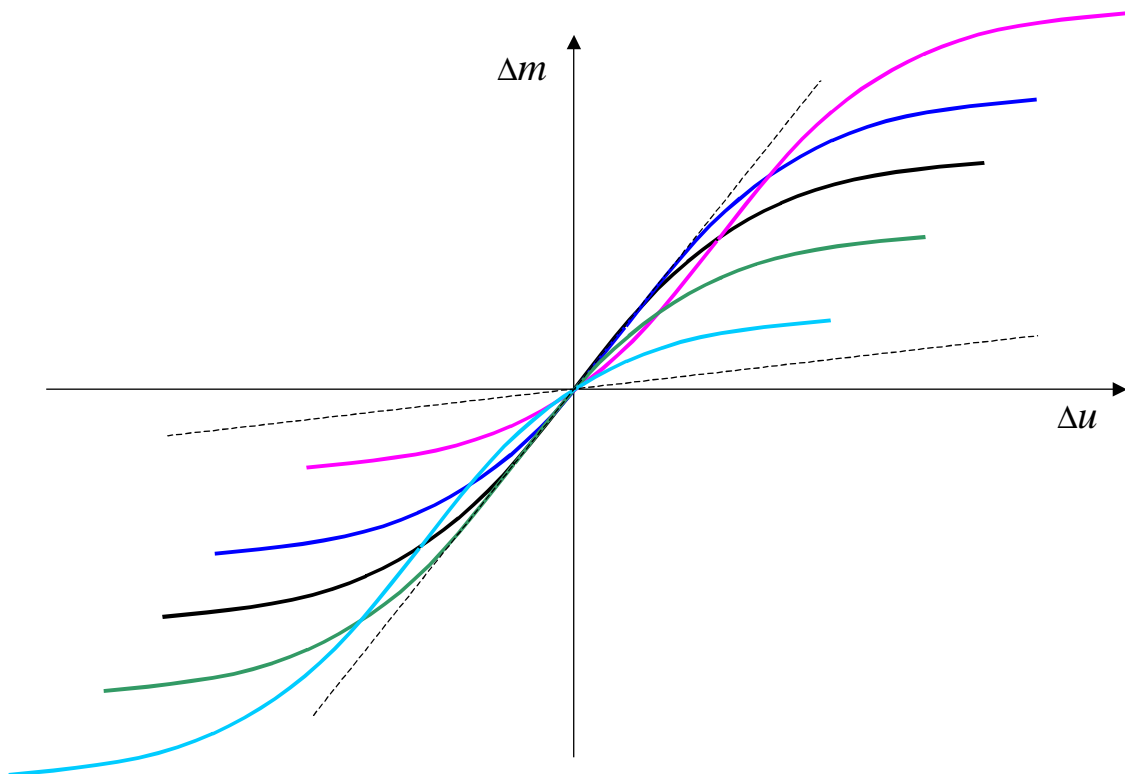


Fig. 7 : Possibili andamenti della caratteristica $\varphi(\cdot)$.

La seconda osservazione riguarda il sistema Σ^* , che può essere ulteriormente compattato (Fig.8) introducendo la funzione di trasferimento:

$$G(s) := P(s) T(s) R(s)$$

e notando, infine, che tutte i possibili andamenti della caratteristica $\varphi(\cdot)$ appartengono ad un settore conico del piano $(\Delta u, \Delta m)$ delimitato (Fig.7, linee tratteggiate) da due rette per l'origine con coefficienti angolari:

$$k_1 := \min_u \frac{d\psi}{du}(u) \quad , \quad k_2 := \max_u \frac{d\psi}{du}(u) .$$

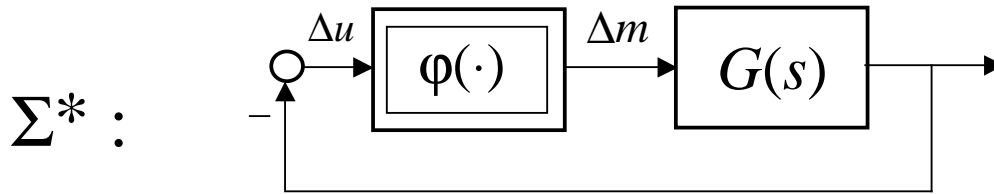


Fig. 8 : Il sistema Σ^* in forma standard.

Si noti che il sistema di Fig.8 è un *sistema di Lur'e autonomo*, cioè invariante nel tempo e libero (privo di ingressi), nel quale la funzione di trasferimento $G(s)$ è nota mentre la caratteristica $\varphi(\cdot)$ non è univocamente definita; essa ha, infatti, un insieme ampio di andamenti possibili tutti contenuti in un settore conico delimitato da due rette passanti per l'origine.

3. Stabilità assoluta, in un settore $[k_1, k_2]$, di un sistema di Lur'e autonomo

Sia S (Fig.9) un sistema di Lur'e autonomo nel quale:

$$L : \begin{cases} \dot{x} = A x + B u \\ y = C x \end{cases}$$

è un sistema stabilizzabile che, senza ledere la generalità, supporremo d'ora in avanti raggiungibile ed osservabile. Il sistema L sarà pertanto correttamente e completamente rappresentato dalla sua funzione di trasferimento:

$$G(s) = C (s I - A)^{-1} B ;$$

N è invece un sistema non lineare e non dinamico descritto da una caratteristica $\varphi(\cdot)$, continua a tratti (funzione reale di variabile reale che abbia, al più, un numero finito di discontinuità su ogni intervallo finito).

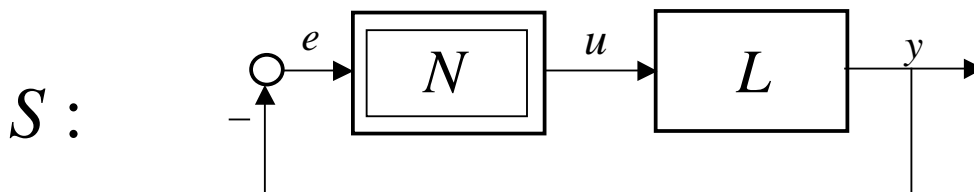


Fig. 9 : Sistema di Lur'e autonomo.

Indichiamo con $\Phi_{[k_1, k_2]}$ l'insieme di tutte le funzioni caratteristiche, nel piano (e, u) , contenute nel settore conico, detto settore $[k_1, k_2]$, delimitato dalle rette passanti per l'origine con coefficienti angolari k_1 e k_2 (Fig.10).

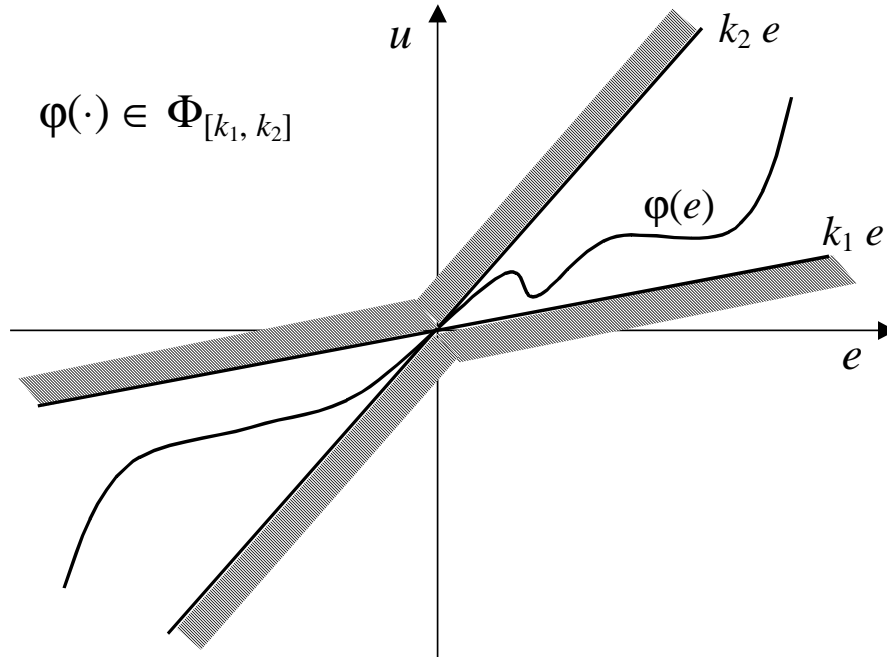


Fig. 10 : Caratteristica $\varphi(\cdot)$ nel settore $[k_1, k_2]$.

Per ogni coppia di numeri reali k_1 e k_2 , con $k_2 \geq k_1$, l'insieme $\Phi_{[k_1, k_2]}$ può essere definito in modo formale nel modo seguente.

Definizione 1

$$\Phi_{[k_1, k_2]} := \{\varphi(\cdot) : k_1 e \leq \varphi(e) \leq k_2 e, \forall e \in \mathbf{R}\}.$$



Si noti che la condizione $(k_1 e \leq \varphi(e) \leq k_2 e)$ è equivalente alla non negatività di una forma quadratica sul piano (e, u) ; infatti, tutti i punti del settore $[k_1, k_2]$ soddisfano la condizione $[(k_2 e - \varphi(e))][\varphi(e) - k_1 e] \geq 0$, vale a dire la condizione $[(k_1 + k_2) e u - u^2 - k_1 k_2 e^2 \geq 0, u = \varphi(e)]$.

Osservazione 1

Tornando al sistema S di Fig.9, per le ipotesi fatte si ha:

$$S : \quad \dot{x} = A x + B \varphi(- C x) := f(x)$$

sicché $f(0) = 0$, e quindi l'origine $x = 0$ dello spazio di stato è uno *stato di equilibrio* di S , qualunque sia la caratteristica $\varphi(\cdot)$ in $\Phi_{[k_1, k_2]}$.

Definizione 2

Il sistema S è *assolutamente stabile nel settore* $[k_1, k_2]$ se $x = 0$ è uno stato di equilibrio *globalmente stabile* di S , qualunque sia la caratteristica $\varphi(\cdot)$ in $\Phi_{[k_1, k_2]}$. \square

Quello che va sotto il nome di **Problema di Lur'e** consiste quindi nel trovare, data la funzione di trasferimento $G(s)$ di L , condizioni necessarie, o sufficienti, di assoluta stabilità di S in un settore $[k_1, k_2]$.

4. Una condizione necessaria

Sia S_L il sistema ottenuto da S sostituendo l'elemento non lineare con un blocco lineare di guadagno k (Fig.11).

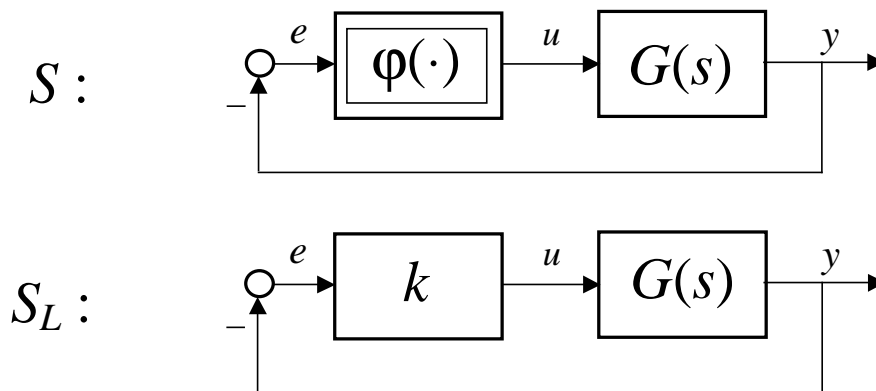


Fig. 11 : Il sistema autonomo di Lur'e S e il sistema lineare S_L ad esso associato.

Poiché le caratteristiche rettilinee $\varphi(e) = k e$, con $k \in [k_1, k_2]$ sono contenute in $\Phi_{[k_1, k_2]}$, è immediato riconoscere che l'assoluta stabilità di S nel settore $[k_1, k_2]$ implica l'asintotica stabilità di S_L per ogni $k \in [k_1, k_2]$.

Un criterio di asintotica stabilità robusta di S_L relativamente a k

Cominciamo con l'osservare che, nel caso del sistema S_L , sono soddisfatte le ipotesi di Nyquist e, facendo riferimento al diagramma di Nyquist associato a

$G(s)$ anziché a quello associato alla funzione di trasferimento d'anello $k G(s)$, il criterio di Nyquist può essere equivalentemente riformulato nel modo seguente.

Il sistema S_L è asintoticamente stabile se e solo se il numero di giri che il diagramma di Nyquist associato a $G(s)$ compie attorno al punto $-1/k$ è uguale al numero di poli di $G(s)$ con parte reale positiva (Fig.12).

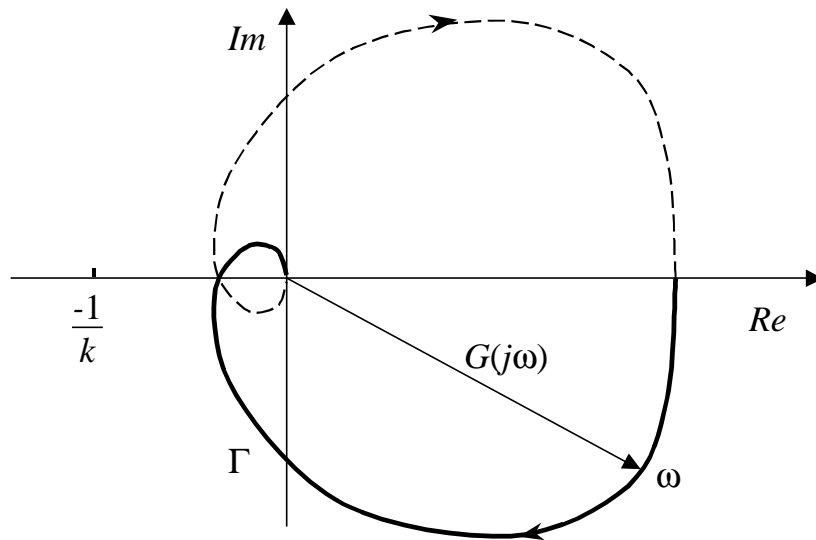


Fig. 12 : Formulazione equivalente del criterio di Nyquist.

E' quindi immediata l'estensione del criterio al caso in cui il guadagno k possa assumere un qualunque valore nell'intervallo $[k_1, k_2]$. Sia infatti (Fig.13):

$$I(k_1, k_2) := \{ \alpha \in \mathbf{R} : \alpha = -1/k, k \in [k_1, k_2] \}.$$

Il sistema S_L è asintoticamente robustamente stabile relativamente a $k \in [k_1, k_2]$, cioè è asintoticamente stabile qualunque sia il valore di k nell'intervallo $[k_1, k_2]$, se e solo se il numero di giri che il diagramma di Nyquist associato a $G(s)$ compie attorno al segmento $I(k_1, k_2)$ è uguale al numero di poli di $G(s)$ con parte reale positiva (*Condizione necessaria e sufficiente di asintotica stabilità robusta di S_L relativamente a $k \in [k_1, k_2]$*).

Condizione necessaria di assoluta stabilità di S nel settore $[k_1, k_2]$

Siamo così pervenuti, quasi inavvertitamente, ad aver dimostrato il risultato seguente.

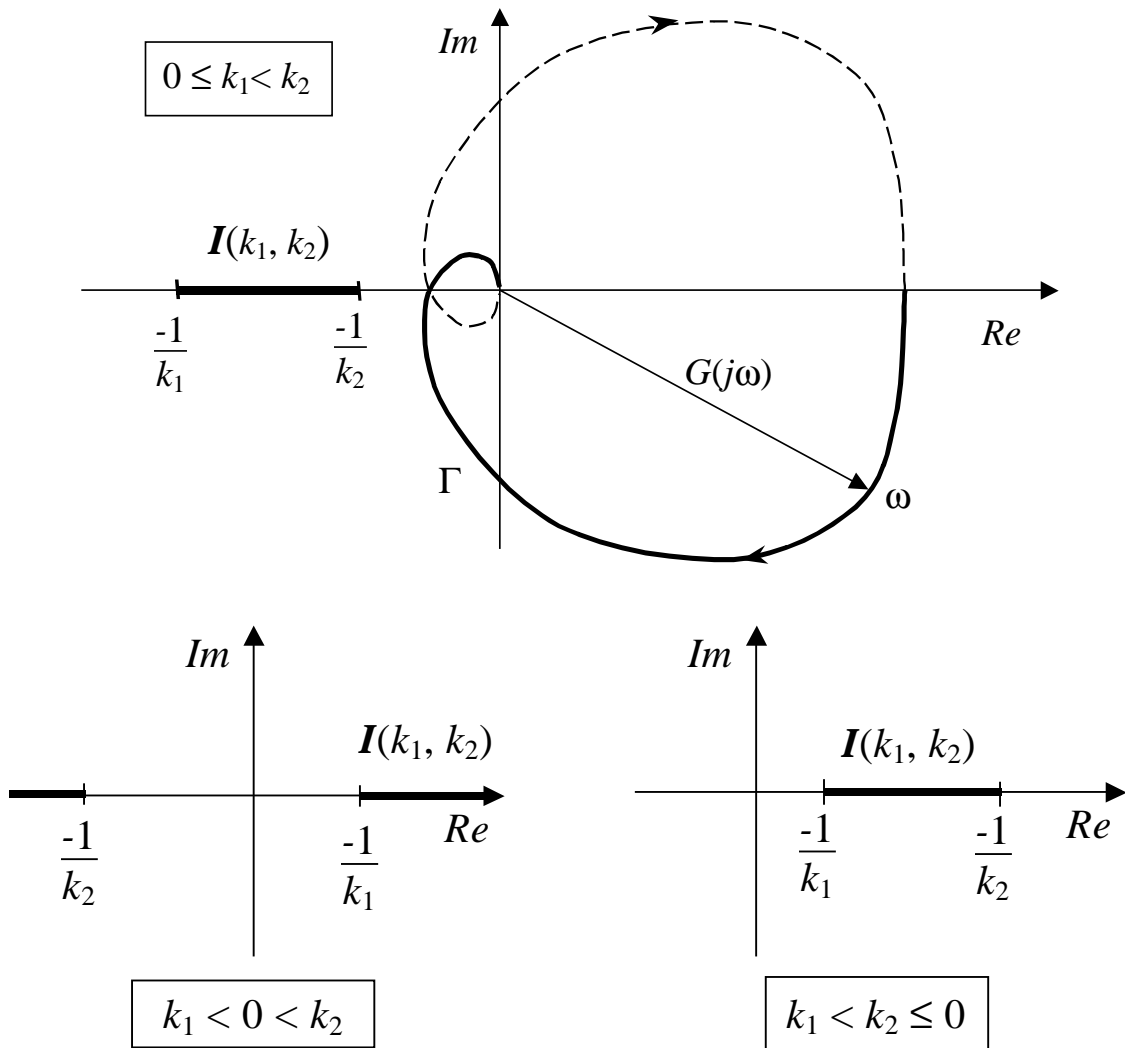


Fig. 13 : Diverse forme del “segmento” $I(k_1, k_2)$.

Teorema 1 (Condizione necessaria)

Se il sistema S è assolutamente stabile nel settore $[k_1, k_2]$, allora il numero di giri che il diagramma di Nyquist associato a $G(s)$ compie attorno al segmento $I(k_1, k_2)$ è uguale al numero di poli di $G(s)$ con parte reale positiva. In particolare, se l’intervallo $[k_1, k_2]$ comprende l’origine, cioè se $0 \in [k_1, k_2]$, allora S_L con $k = 0$ è asintoticamente stabile e, quindi, è asintoticamente stabile anche il sistema L descritto da $G(s)$.

5. Congetture

Per quanto semplice e relativamente interessante, è evidente che, da sola, la condizione necessaria del Teorema 1 non è, in pratica, di grande utilità. Più utile sarebbe una condizione sufficiente di assoluta stabilità nel settore $[k_1, k_2]$.

Sulla spinta dei risultati via via ottenuti in questa direzione, diversi autori formularono interessanti congetture, oggetto di attento studio da parte degli studiosi di tutto il mondo, i quali impegnarono le loro migliori energie nel tentativo di dimostrarne la correttezza o la falsità.

Congettura di Aizerman

La condizione necessaria del Teorema 1 è anche sufficiente. In altre parole, il sistema S è assolutamente stabile nel settore $[k_1, k_2]$ se e solo se il sistema S_L è asintoticamente robustamente stabile relativamente a k nell'intervallo $[k_1, k_2]$. \square

La congettura di Aizerman resistette a lungo. Se provata, avrebbe portato alla sorprendente conclusione che il Problema di Lur'e è, essenzialmente, un problema lineare. Alla fine, però, venne la smentita, in quanto fu possibile trovare un (non banale) controesempio di quella troppo ottimistica supposizione. Un allora giovane luminare della teoria del controllo credette però di poter restaurare la celebre congettura restringendone la validità a una classe particolare di sistemi di Lur'e.

Congettura di Kalman

Se le possibili caratteristiche $\varphi(\cdot)$ dell'elemento non lineare N sono vincolate ad essere continuamente differenziabili e, oltre a passare per l'origine, ad avere la derivata (così come, di conseguenza, la caratteristica stessa) in $\Phi_{[k_1, k_2]}$ allora la congettura di Aizerman è vera. \square

Purtroppo, anche questa più sottile congettura fu presto smentita da un altro calibrato controesempio. Dunque, la conclusione divenne inevitabile: la soluzione del Problema di Lur'e non è riducibile all'analisi di un sistema lineare.

6. Condizione sufficiente di assoluta stabilità nel settore $[0, k]$

La principale condizione sufficiente, sulla quale poggiano diversi altri notevoli risultati, apparve in russo nel 1962 ed è dovuta al ricercatore rumeno V. M. Popov, successivamente emigrato negli Stati Uniti, dove ha continuato l'attività di ricerca. Senza più ottenere, però, risultati di analogo impatto.

Teorema 2 (Criterio di Popov)

Sotto le ipotesi elencate all'inizio del Paragrafo 3, il sistema di Lur'e autonomo S di Fig.11 è assolutamente stabile nel settore $[0, k]$ se è verificata la condizione

necessaria (in particolare, se i poli di $G(s)$ hanno parte reale negativa) e se esiste un numero reale q tale che sia soddisfatta la *condizione di Popov*:

$$\frac{1}{k} + \operatorname{Re} [(1 + j\omega q) G(j\omega)] > 0 \quad , \quad \forall \omega \geq 0 .$$

□

E' facile notare che la condizione di Popov è soddisfatta, con $q = 0$, se (Fig.14):

$$\operatorname{Re} [G(j\omega)] > \frac{1}{k} \quad , \quad \forall \omega \geq 0 ;$$

cioè se il diagramma polare Γ di $G(j\omega)$ giace alla destra della retta passante per $-1/k$ e parallela all'asse immaginario.

Meno banale è la verifica della condizione di Popov nel caso più generale ($q \neq 0$). A questo proposito, notiamo che, se si pone: $G(j\omega) := a + j b$, allora:

$$\operatorname{Re} [(1 + j\omega q) G(j\omega)] = a - \omega q b := a - q b^* ,$$

dove $b^* := \omega b$, e la condizione di Popov diventa:

$$\frac{1}{k} + a - q b^* > 0 \quad \Leftrightarrow \quad b^* \begin{cases} < \frac{a}{q} + \frac{1}{k q} \quad , \quad \text{se } q > 0 , \\ > \frac{a}{q} + \frac{1}{k q} \quad , \quad \text{se } q < 0 . \end{cases}$$

La Fig.15 mostra il significato delle due ultime disuguaglianze nel piano (a, b^*) , vale a dire nel piano in cui potremo tracciare il diagramma polare Γ^* della funzione $G^*(j\omega) := a + j b^*$; il diagramma polare, cioè, della funzione ottenuta da $G(j\omega)$ moltiplicando per ω la parte immaginaria (*Diagramma di Popov*).

In conclusione, la condizione di Popov è verificata se e solo se esiste una retta (detta anche *retta di Popov*), passante per il punto $-1/k$, che lasci strettamente alla sua destra i punti di Γ^* corrispondenti a valori finiti di ω (Fig.16).

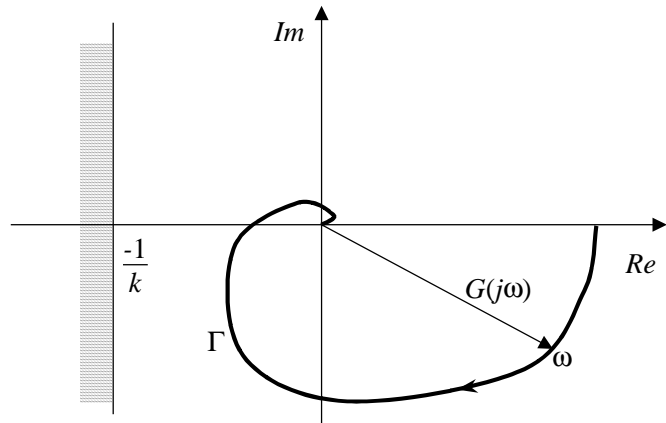


Fig. 14 : Condizione di Popov con $q = 0$.

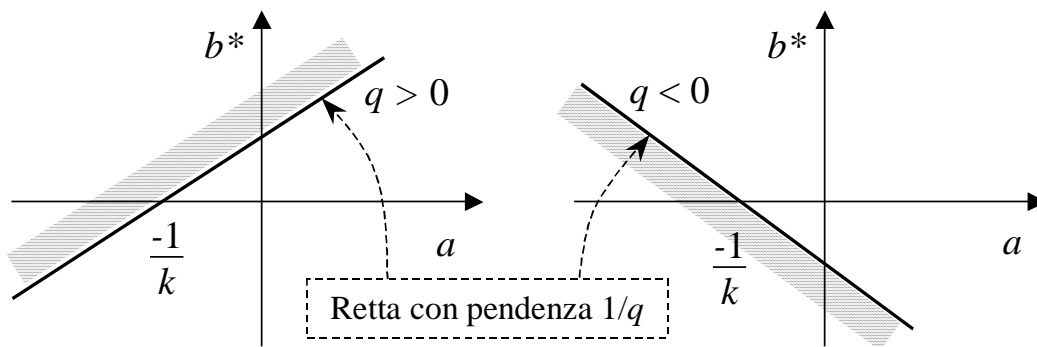


Fig. 15 : Interpretazione grafica della condizione di Popov.

Si noti che, per definizione, i punti sull'asse reale di Γ e di Γ^* coincidono ($b = b^* = 0$). Inoltre, la condizione necessaria di assoluta stabilità di S nel settore $[0, k]$ implica che Γ (e quindi anche Γ^*) non intersechi la semiretta costituita da $-1/k$ e dai punti dell'asse reale che si trovano alla sua sinistra. Questa osservazione consente di visualizzare le circostanze, abbastanza particolari, nelle quali la congettura di Aizerman può essere violata; nelle quali, cioè, è rispettata la condizione necessaria, ma non la condizione sufficiente di Popov.

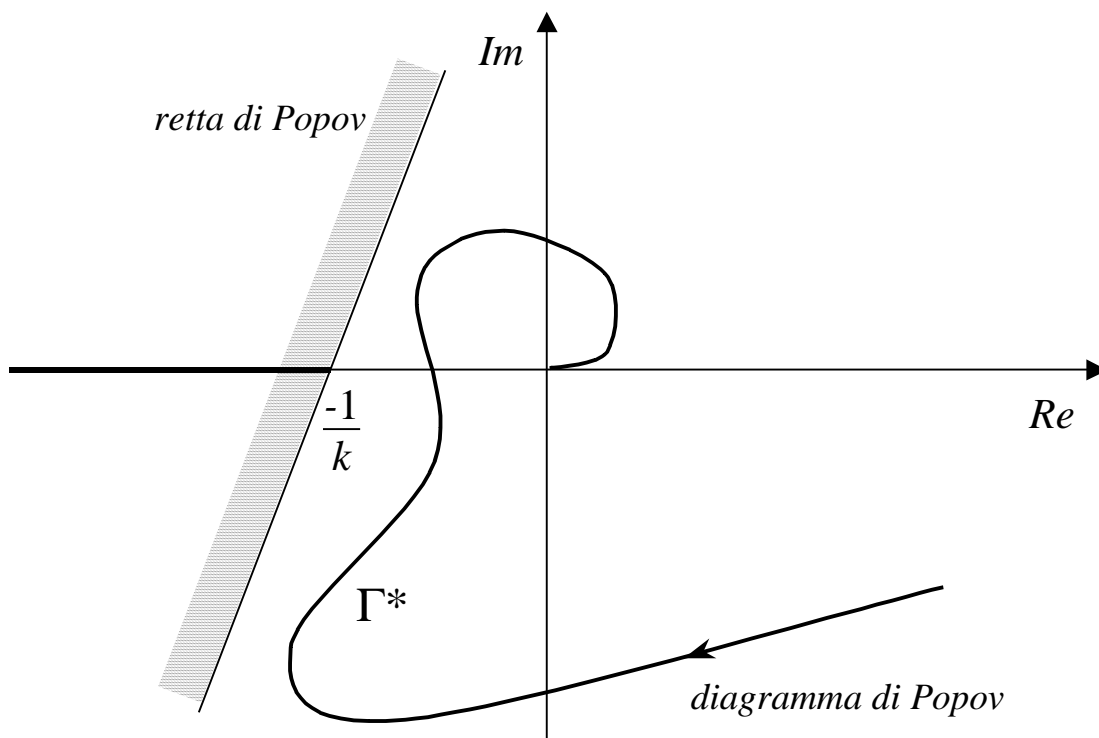


Fig. 16 : Il criterio di Popov.

La dimostrazione del Teorema 2 richiede alcune premesse.

Lemma 1

Se la condizione di Popov è soddisfatta per $q = q_2 > 0$, esiste $q_1 \in (0, q_2)$ tale che la condizione risulti soddisfatta per ogni $q \in [q_1, q_2]$. Analogamente, se la condizione è soddisfatta per $q = q_1 < 0$, allora esiste $q_2 \in (q_1, 0)$ tale che la condizione risulti soddisfatta per ogni $q \in [q_1, q_2]$.

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che, se la condizione di Popov è soddisfatta, nessun punto della linea Γ^* corrispondente a valori finiti di ω può trovarsi sulla retta passante per il punto $-1/k$ e avente pendenza $1/q$ (retta di Popov). Per $\omega \rightarrow \infty$, la linea Γ^* tende sempre a un punto dell'asse immaginario, che può non essere l'origine (se il grado relativo di $G(s)$ è uguale a uno) e che può appartenere a Γ^* .

Esaminiamo per primo il caso $q = q_2 > 0$. Se la condizione di Popov è soddisfatta per $q = q_2 > 0$, è sempre possibile aumentare di una piccola quantità la pendenza della retta di Popov ruotandola in senso antiorario attorno al punto $-1/k$, senza violare durante la rotazione la condizione che il diagramma di Popov Γ^* rimanga alla sua destra (Fig.17).

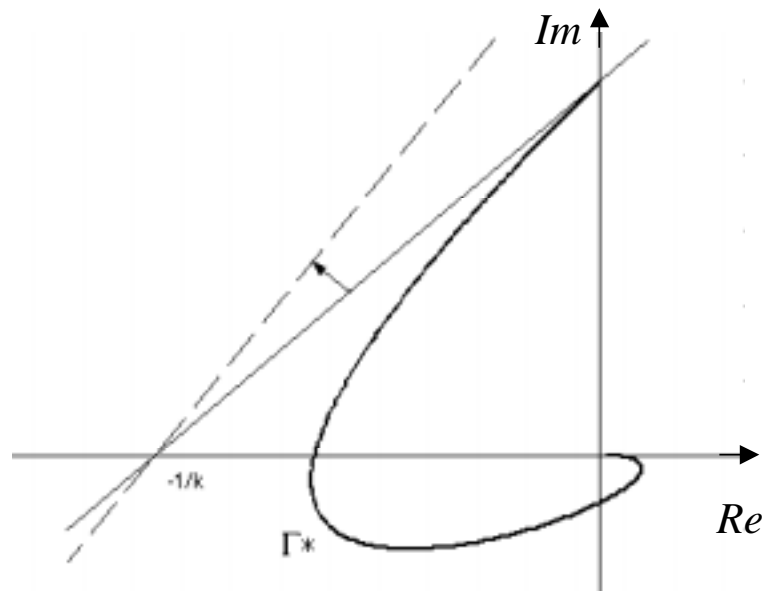


Fig. 17 : Illustrazione del Lemma 1 (prima parte).

Indicando allora con $1/q_1$ il coefficiente angolare della nuova retta di Popov (linea tratteggiata di Fig.17), si ha: $0 < q_1 < q_2$ e la condizione di Popov è soddisfatta per ogni $q \in [q_1, q_2]$.

Analogamente, se la condizione di Popov è soddisfatta per $q = q_1 < 0$, è possibile aumentare di una piccola quantità la pendenza (negativa) della retta di Popov, ruotandola in senso orario attorno al punto $-1/k$, senza violare durante la rotazione la condizione che il diagramma Γ^* rimanga alla sua destra. Esiste quindi $q_2 \in (q_1, 0)$ tale che la condizione di Popov risulti soddisfatta per ogni $q \in [q_1, q_2]$.

Definizione 3 (*Funzione di trasferimento strettamente reale positiva*)

Una funzione di trasferimento $Z(s)$ con tutti i poli nel semipiano sinistro aperto è reale positiva se $Re[Z(j\omega)] \geq 0, \forall \omega \geq 0$; è strettamente reale positiva se $Re[Z(j\omega)] > 0, \forall \omega \geq 0$ e inoltre $Z(\infty) > 0$ oppure $Z(\infty) = 0$ ma il limite per $\omega \rightarrow \infty$ di $\omega^2 Re[Z(j\omega)]$ è positivo.

Nota. I concetti di funzione (strettamente) reale positiva discendono dalla teoria dei circuiti. Non tutte le definizioni, però, di funzione strettamente reale positiva presenti in letteratura sono equivalenti; la loro interpretazione e quella dei risultati che ne derivano richiedono pertanto cautela.

Lemma 2 (*Lemma di Kalman-Yakubovich-Popov*)

La funzione di trasferimento $Z(s) := M (s I - A)^{-1} B + N$ di un sistema dinamico (A, B, M, N) a un ingresso e un'uscita, raggiungibile, osservabile e asintoticamente stabile è strettamente reale positiva se e solo se esistono: una matrice $P = P' > 0$, un vettore L , uno scalare w e una costante positiva ϵ tali che:

$$\begin{aligned} P A + A' P &= -L L' - \epsilon P \\ P B &= M' - L w \\ 2 N &= w^2 \end{aligned}$$



Per la (non banale) dimostrazione di questo risultato si rimanda ai testi citati in bibliografia.

Dimostrazione del Criterio di Popov (Teorema 2)

Consideriamo innanzitutto il caso $q \geq 0$, e poniamo:

$$M := k C + q k C A \quad , \quad N := 1 + q k C B \quad , \quad Z(s) := M (s I - A)^{-1} B + N .$$

Ricordando che $C (s I - A)^{-1} B := G(s)$, si ha:

$$\begin{aligned} Z(s) &= (k C + q k C A) (s I - A)^{-1} B + 1 + q C B = \\ &= 1 + k G(s) + q k C A (s I - A)^{-1} B + q k C (s I - A) (s I - A)^{-1} B = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + k G(s) + q k C A (s I - A)^{-1} B + \\
&\quad + q k s C (s I - A)^{-1} B - q k C A (s I - A)^{-1} B = \\
&= 1 + k G(s) + q k s C (s I - A)^{-1} B = \\
&= 1 + k (1 + q s) G(s) .
\end{aligned}$$

La condizione di Popov

$$\frac{1}{k} + \operatorname{Re} [(1 + j\omega q) G(j\omega)] > 0 \quad , \quad \forall \omega \geq 0$$

è equivalente a: $\operatorname{Re} [1 + k (1 + j\omega q) G(j\omega)] > 0, \forall \omega \geq 0$; e quindi a:

$$\operatorname{Re} [Z(j\omega)] > 0 \quad , \quad \forall \omega \geq 0 .$$

Se la condizione di Popov è soddisfatta per $q = q_2$, allora (Lemma 1) esiste $q_1 < q_2$ tale che la medesima condizione risulti soddisfatta per ogni $q \in (q_1, q_2]$. Per quasi tutti i valori di q nel suddetto intervallo, si ha pertanto che: 1) i poli di $Z(s)$ coincidono con quelli di $G(s)$, sicché anche (A, M) è una coppia osservabile, e 2) risulta: $Z(\infty) = N > 0$ (anche nel caso in cui fosse stato: $N_2 := 1 + q_2 k C B = 0$), sicché la $Z(s)$ è strettamente reale positiva. In definitiva, se la condizione di Popov è soddisfatta per $q = q_2 < 0$, esiste $q > 0$, tale che la condizione di Popov continui ad essere soddisfatta, la coppia (A, M) sia osservabile e $Z(s)$ sia strettamente reale positiva.

Poiché gli autovalori di A hanno, per ipotesi, parte reale negativa e la coppia (A, B) è, sempre per ipotesi, raggiungibile, il lemma di Kalman-Yakubovich-Popov garantisce che esistano una matrice P simmetrica e definita positiva, un vettore L , uno scalare w e una costante positiva ε tali che:

$$P A + A' P = -L L' - \varepsilon P \quad , \quad P B = M' - L w \quad , \quad 2 N = w^2 \quad .$$

Adottiamo allora, come possibile funzione di Liapunov, la seguente:

$$V(x) = x' P x - 2 k q \int_0^y \varphi(-\sigma) d\sigma$$

che è radialmente illimitata e definita positiva qualunque sia la funzione $\varphi(\cdot)$ nel settore $[0, k]$. Infatti, ponendo: $-\sigma = \rho$, si ha:

$$-\int_0^y \varphi(-\sigma) d\sigma = \int_0^y \varphi(\rho) d\rho \geq 0, \quad \forall y \in \mathbf{R}.$$

La derivata di V fatta rispetto al tempo, lungo una traiettoria del sistema

$$S: \quad \dot{x} = A x + B \varphi(-y), \quad y = C x$$

è data da:

$$\dot{V}(x) = x' (P A + A' P) x + 2 x' P B \varphi(-y) - 2 k q \varphi(-y) C (A x + B \varphi(-y)).$$

E' facile riconoscere che, se $\varphi(\cdot)$ appartiene al settore $[0, k]$, allora

$$\varphi(e) (k e - \varphi(e)) \geq 0, \quad \forall e \in \mathbf{R},$$

quindi,

$$-\varphi(-y) (k y + \varphi(-y)) \geq 0, \quad \forall y \in \mathbf{R}.$$

Possiamo pertanto maggiorare l'espressione trovata per $\dot{V}(x)$ nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &\leq x' (P A + A' P) x + 2 x' P B \varphi(-y) + \\ &\quad - 2 k q \varphi(-y) C (A x + B \varphi(-y)) - 2 \varphi(-y) (k y + \varphi(-y)) = \\ &= x' (P A + A' P) x + 2 x' (P B - k q A' C' - k C') \varphi(-y) + \\ &\quad - 2 \varphi^2(-y) (1 + q k C B). \end{aligned}$$

Ma, in virtù del già ricordato lemma di Kalman-Yakubovich-Popov, si ha che:

$$\begin{aligned} P A + A' P &= -L L' - \varepsilon P \\ P B &= M' - L w = k (C' + q A' C') - L w \\ 2 N &= w^2 = 2 (1 + q k C B) \end{aligned}$$

quindi,

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &\leq -x' (L L' + \varepsilon P) x - 2 x' L w \varphi(-y) - \varphi^2(-y) w^2 = \\ &= -\varepsilon x' P x - (x' L + w \varphi(-y))^2 \leq -\varepsilon x' P x \end{aligned}$$

è una funzione definita negativa. Si può pertanto concludere che l'origine dello spazio di stato è globalmente stabile qualunque sia la funzione $\varphi(\cdot)$ nel settore $[0, k]$.

Nel caso $q < 0$, basta porre:

$$M := k C - q k C A \quad , \quad N := 1 - q k C B \quad ,$$

$$V(x) = x' P x + 2 k q \int_0^y \varphi(-\sigma) d\sigma$$

e ripercorrere fedelmente le argomentazioni sviluppate nel caso $q > 0$. Il dettagliato svolgimento di questa seconda parte della dimostrazione è lasciato al lettore.



Vediamo ora un paio di *esempi*, alla luce della seguente definizione.

Definizione 4.

Data la funzione di trasferimento $G(s)$, indichiamo con K_P il più alto valore di K tale che sia possibile garantire, mediante il criterio di Popov, l'assoluta stabilità di S nel settore $[0, k]$, per ogni $k \in [0, K)$. Indichiamo invece con K_N il più alto valore di K tale che il sistema lineare S_L risulti asintoticamente stabile per ogni $k \in [0, K)$.



Una breve riflessione consente di riconoscere che, indicando con $-a_P$ l'ascissa del punto più destra sul semiasse reale negativo per il quale passa una retta tangente a (ma non intersecante) Γ^* , si ha: $K_P = 1/a_P$. Analogamente, indicando con $-a_N$ l'ascissa del punto più a sinistra che l'asse reale ha in comune con Γ^* (o con Γ), si ha: $K_L = 1/a_N$.

Infine, dovrebbe risultare evidente che, se $K_P = K_N$, il caso in esame verifica la congettura di Aizerman.

Esempio 1

Sia:

$$G(s) = \frac{80}{(1 + 0.5 s)^3}$$

allora (Fig.18) si riconosce facilmente che $K_P = K_N \cong 0.1$ ($a_N = a_P \cong 10$). In questo caso, quindi, la congettura di Aizerman è verificata.

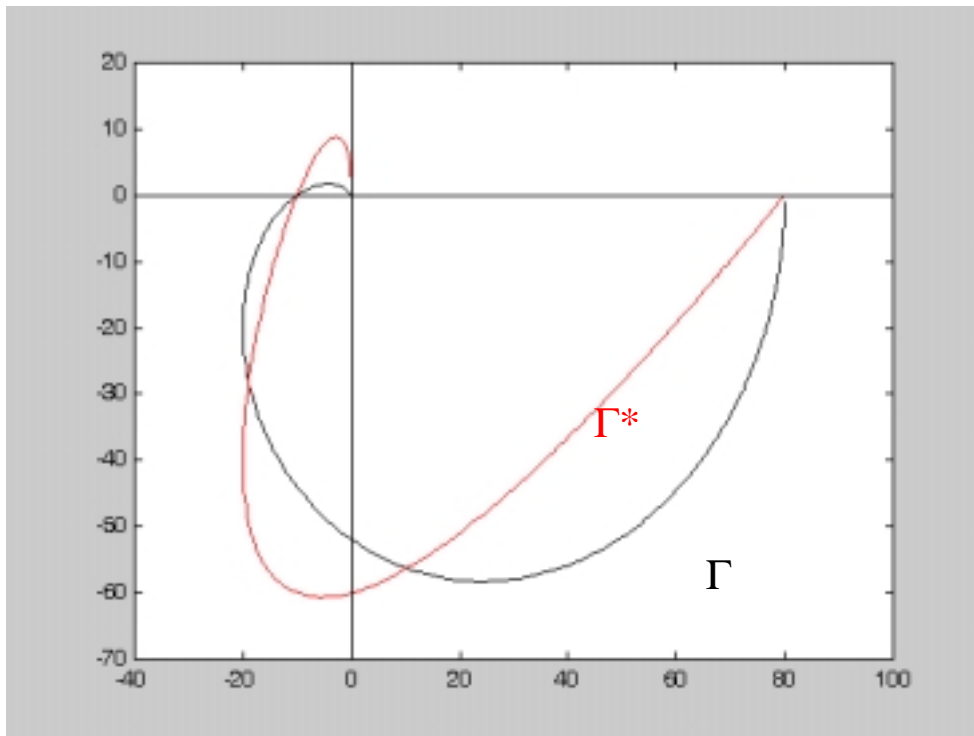


Fig. 18 : I diagrammi Γ (in nero) e Γ^* (in rosso) dell'Esempio 1.

Esempio 2

Sia ora:

$$G(s) = \frac{\mu (1 + s T_1)(1 + s T_2)^2}{(1 + s T_3)^2 (1 + s T_4) (1 + s T_5)}$$

con: $\mu=10$; $-T_1 = T_2 = 0.3$; $T_3 = 3$; $T_4 = 0.0429$; $T_5 = 0.015$.

I diagrammi Γ (in nero) e Γ^* (in rosso) dell'Esempio 2 sono riportati (con un ingrandimento) in Fig.19. Se ne deduce che, in questo caso:

$$K_N := 1/a_N \cong 1.8 > K_P := 1/a_P \cong 1.1 .$$

Quindi non si può affermare che la congettura di Aizerman sia verificata, ma (attenzione!) non si può nemmeno affermare il contrario. Per provarne la falsità, occorrerebbe dimostrare che, per almeno un valore di $k \in (K_P, K_N]$, il sistema di Lur'e autonomo non è assolutamente stabile nel settore $[0, k]$.

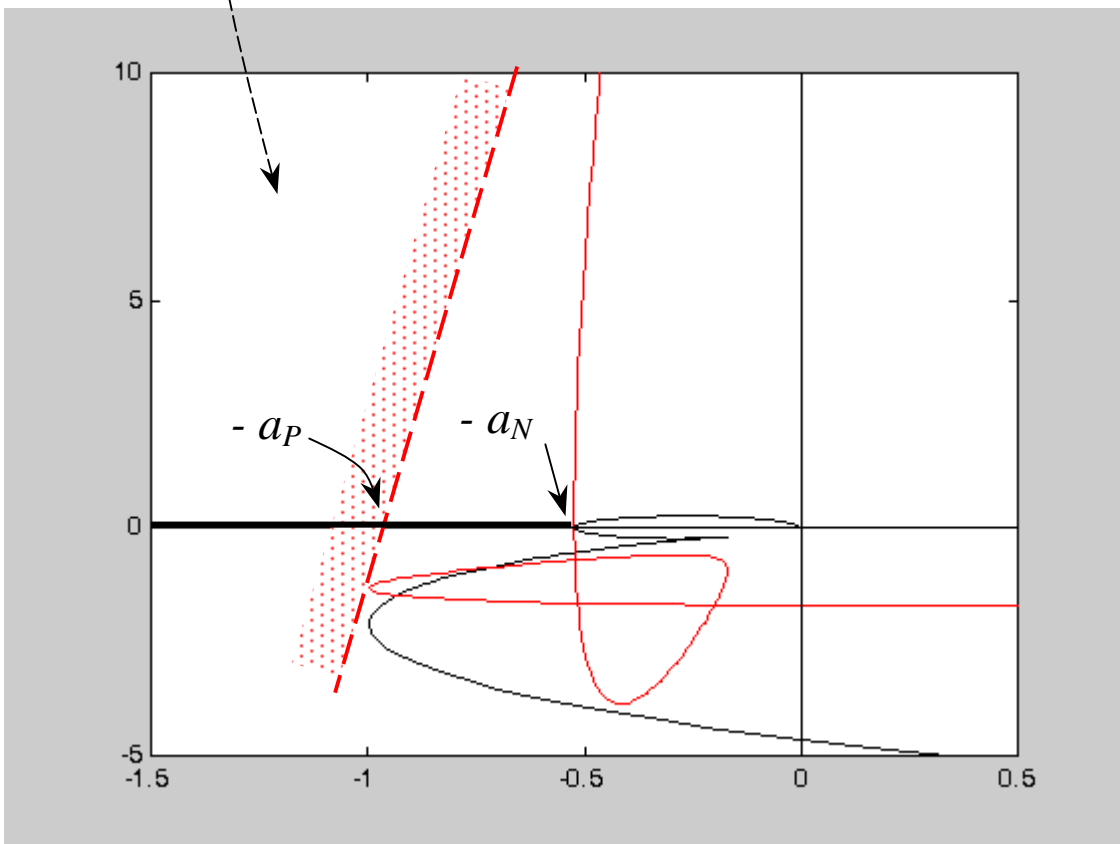
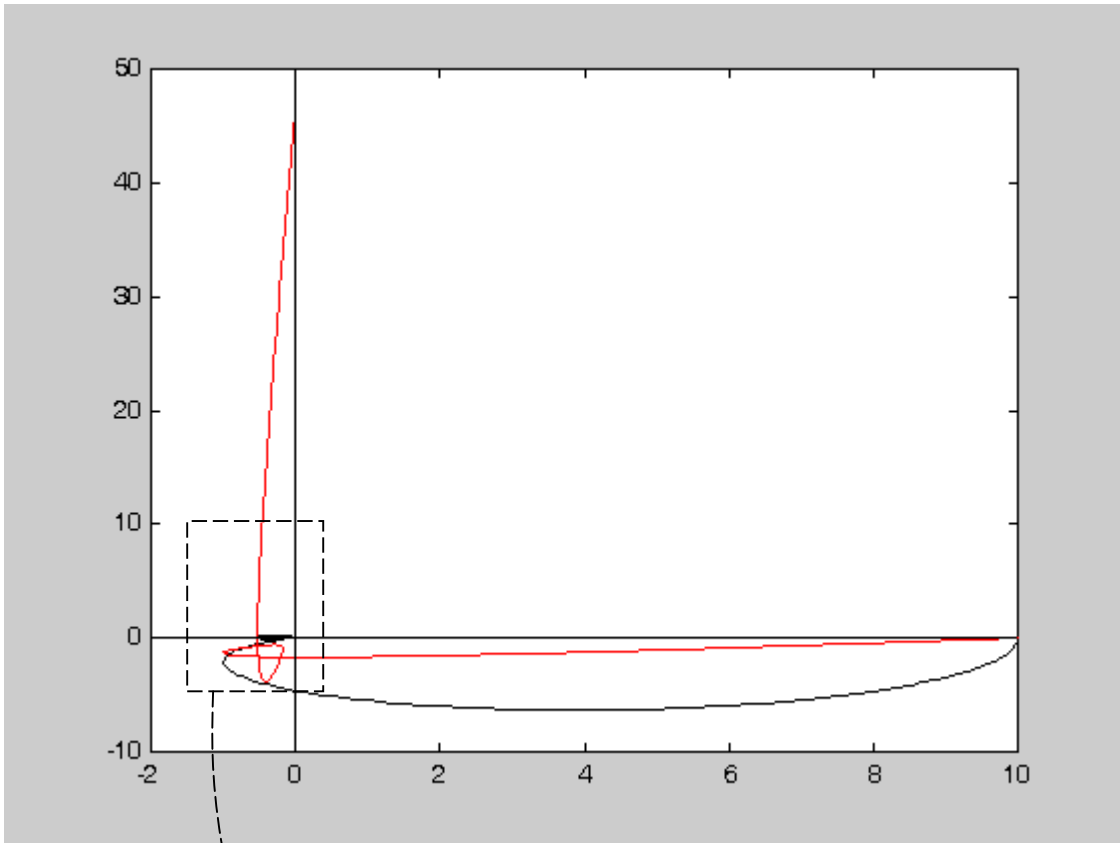


Fig. 19 : I diagrammi Γ (in nero) e Γ^* (in rosso) dell'Esempio 2.

7. Condizione sufficiente di assoluta stabilità nel settore $[k_1, k_2]$

Sia: $k_1, k_2 \in \mathbf{R}$, $k_1 \leq k_2$. Il nostro primo passo consiste nell'osservare come sia possibile, grazie ad un interessante artificio, ridurre un problema di stabilità assoluta nel settore $[k_1, k_2]$ ad un problema di stabilità assoluta nel settore $[0, k]$, $k = k_2 - k_1$.

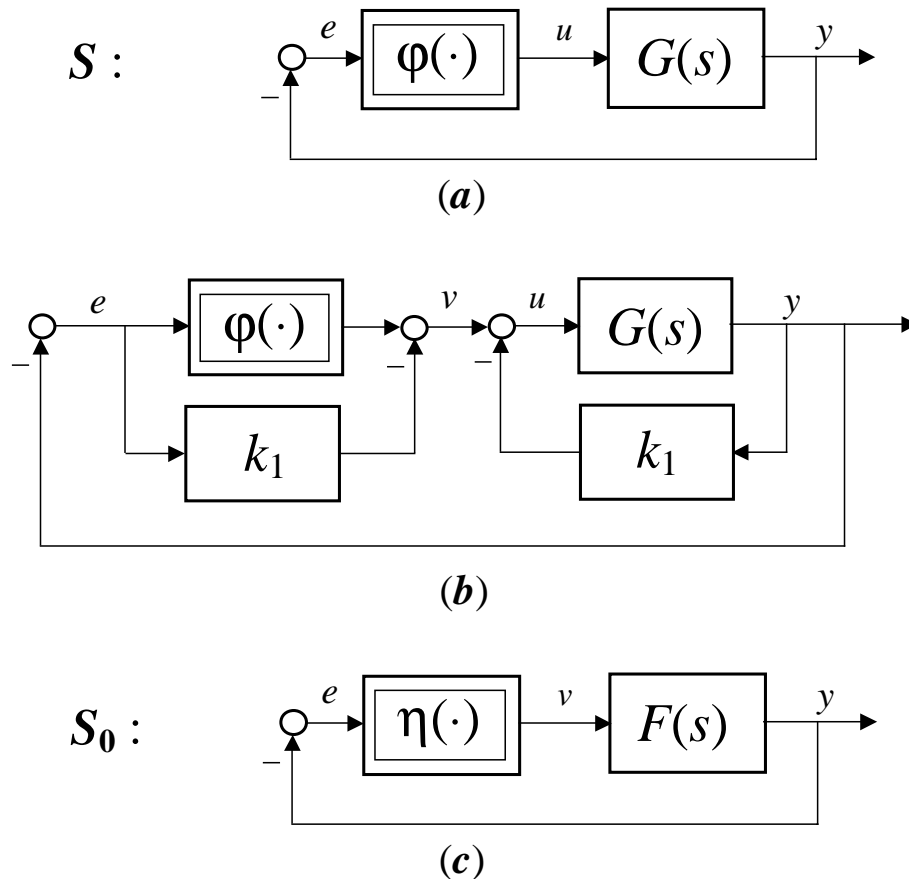


Fig. 20 : Rappresentazioni equivalenti del medesimo sistema.

Si consideri il sistema di Lur'e autonomo S di Fig.20-(a), del quale vogliamo analizzare l'eventuale stabilità assoluta nel settore $[k_1, k_2]$. E' facile osservare che tale sistema è uguale a quello di Fig.20-(b); infatti, all'uscita dei due blocchi lineari con guadagno k_1 si hanno sempre segnali uguali e di segno opposto. Infine, pur di porre:

$$\eta(e) := \varphi(e) - k_1 e \quad , \quad F(s) := \frac{G(s)}{1 + k_1 G(s)}$$

anche il sistema S_0 di Fig.20-(c) è uguale ai precedenti. Si noti inoltre che, in questo caso, $\eta(\cdot)$ è contenuta nel settore $[0, k]$, $k = k_2 - k_1$, se e solo se $\varphi(\cdot)$ è contenuta nel settore $[k_1, k_2]$. Siamo dunque pervenuti alla conclusione seguente.

Proposizione 1.

Il sistema S di Fig.20-(a) è assolutamente stabile nel settore $[k_1, k_2]$ se e solo se il sistema S_0 di Fig.20-(c), con

$$F(s) := \frac{G(s)}{1 + k_1 G(s)} ,$$

è assolutamente stabile nel settore $[0, k]$, con: $k = k_2 - k_1$.



La stabilità assoluta del sistema S può dunque essere studiata applicando, ad esempio, il criterio di Popov al sistema S_0 ; elaborando, cioè, la risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento $F(s)$. A questo punto è naturale chiedersi se non sia possibile modificare il criterio di Popov in modo da ottenere direttamente una condizione che assicuri la stabilità assoluta di S nel settore $[k_1, k_2]$ sulla base della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento $G(s)$.

La risposta, negativa nel caso generale, porta invece a un risultato assai espressivo se, nel criterio di Popov, si pone a priori $q = 0$, rinunciando così alla maggiore flessibilità offerta dalla possibile scelta di q .

Per il Criterio di Popov (con $q = 0$) e in vista della Proposizione 1, possiamo dire che il sistema S è assolutamente stabile nel settore $[k_1, k_2]$ se $F(s)$ è la funzione di trasferimento di un sistema asintoticamente stabile e se

$$Re [F(j\omega)] > \frac{-1}{k} \quad , \quad \forall \omega \geq 0 \quad ,$$

dove:

$$k := k_2 - k_1 \quad , \quad F(s) := \frac{G(s)}{1 + k_1 G(s)} .$$

Notiamo innanzitutto che, per il criterio di Nyquist riformulato, $F(s)$ è la funzione di trasferimento di un sistema asintoticamente stabile se e solo se il numero di giri che il diagramma di Nyquist relativo a $G(s)$ compie attorno al punto $-1/k_1$ è uguale al numero di poli di $G(s)$ con parte reale positiva. Quindi, se $G(s)$ rispetta la condizione necessaria (Teorema 1), $F(s)$ è la funzione di trasferimento di un sistema asintoticamente stabile.

Notiamo inoltre che, in base alla definizione di $F(s)$, la trasformazione che fa passare da F a G è la seguente:

$$G = \frac{F}{1 - k_1 F} ;$$

infatti, dalla definizione di F si ha: $G = F (1 + k_1 G)$, ovvero: $G (1 - k_1 F) = F$. Attraverso questa trasformazione, il diagramma polare della risposta in frequenza associata a $F(s)$ diventa dunque il diagramma polare della risposta in frequenza associata a $G(s)$. Per ottenere un criterio di stabilità assoluta di S nel settore $[k_1, k_2]$ direttamente basato sul diagramma polare della risposta in frequenza associata a $G(s)$ dobbiamo chiederci (Fig.21) quale sia l'immagine, attraverso la trasformazione suddetta, della retta parallela all'asse immaginario passante per il punto $-1/k, k = k_2 - k_1$.

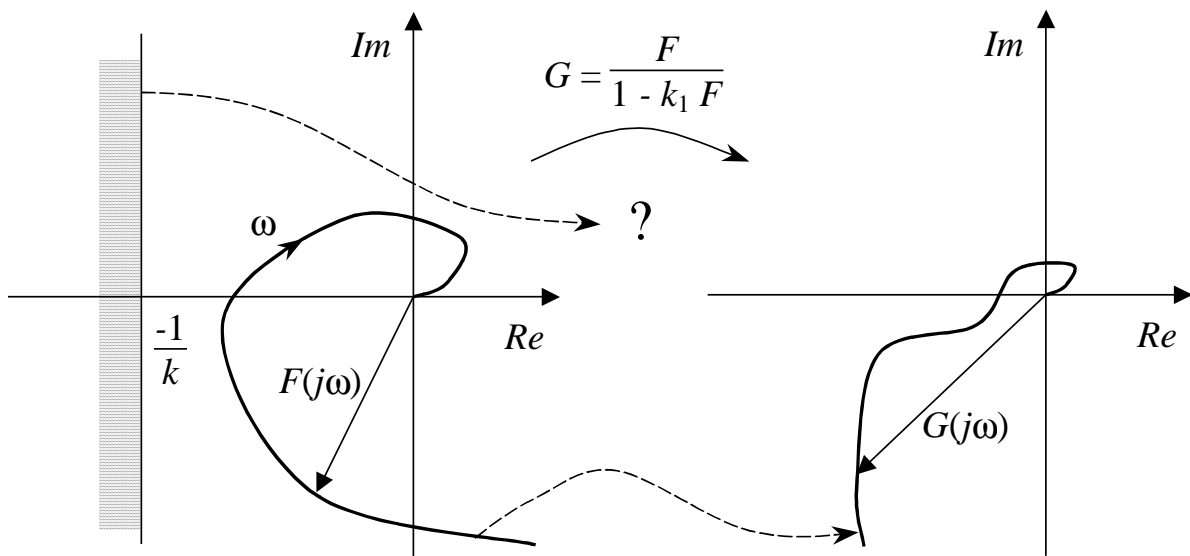


Fig. 21 : La trasformazione da F a G .

Per rispondere alla domanda appena formulata, poniamo:

$$F = \frac{-1}{k} + j \sigma$$

e vediamo quale linea descrive, al variare di σ da $-\infty$ a $+\infty$, il numero complesso:

$$G = \frac{F}{1 - k_1 F} = \frac{\frac{-1}{k} + j \sigma}{1 + \frac{k_1}{k} - j k_1 \sigma} .$$

Non è difficile riconoscere che questa linea è una circonferenza con centro sull'asse reale passante per i punti $-1/k_1$ e $-1/k_2$. Osserviamo inoltre che il semipiano a sinistra della retta parallela all'asse immaginario passante per il

punto $-1/k$ è quello che non contiene l'origine e indichiamo con $\mathcal{O}(k_1, k_2)$ la sua immagine attraverso la trasformazione che fa passare da F a G ; cioè:

$$\mathcal{O}(k_1, k_2) := \left\{ z \in \mathbf{C} : z = \frac{s}{1 - k_1 s}, s = \alpha + j\beta \in \mathbf{C}, \alpha \leq \frac{-1}{(k_2 - k_1)} \right\}.$$

Una breve riflessione consente di concludere che $\mathcal{O}(k_1, k_2)$ è semplicemente la regione chiusa non contenente l'origine delimitata dalla circonferenza con centro sull'asse reale passante per i punti $-1/k_1$ e $-1/k_2$.

Tutto quanto precede porta alla formulazione di un risultato divenuto celebre anche se, in definitiva, è solo un corollario del criterio di Popov nel caso particolare in cui si sia posto: $q = 0$.

Teorema 3 (Criterio del cerchio)

Il sistema S di Lur'e autonomo è assolutamente stabile nel settore $[k_1, k_2]$ se il numero di giri che il diagramma di Nyquist relativo a $G(s)$ compie attorno al cerchio $\mathcal{O}(k_1, k_2)$ è uguale al numero di poli di $G(s)$ con parte reale positiva.

□

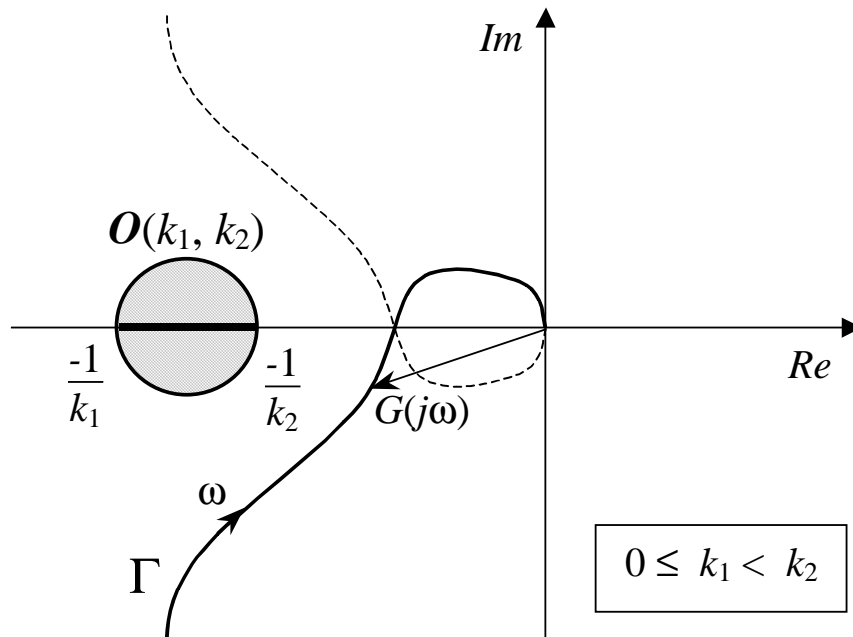


Fig. 22 : Il criterio del cerchio, nel caso $0 \leq k_1 < k_2$.

Si noti che nei casi: $k_1 < 0 < k_2$ e $k_1 < k_2 \leq 0$, la regione $\mathcal{O}(k_1, k_2)$ assume, per definizione, la forma mostrata in Fig.23.

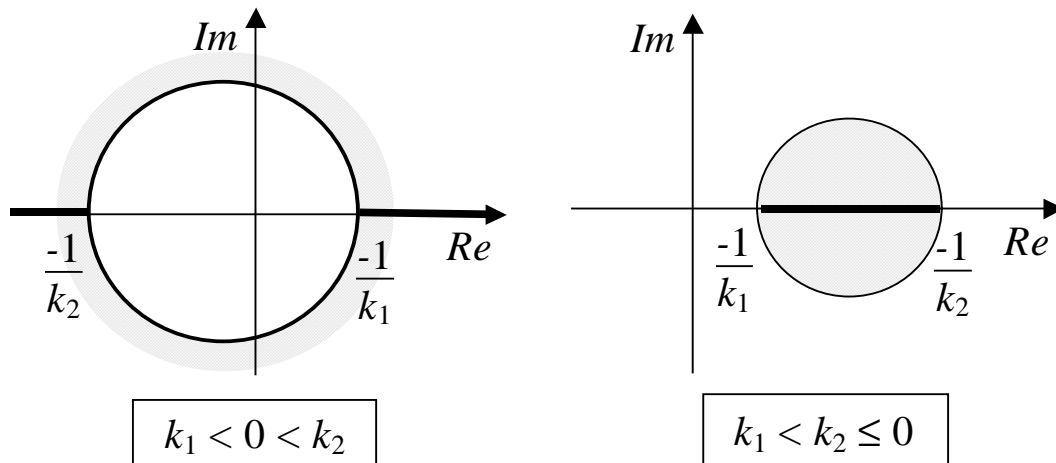


Fig. 23 : La regione $\mathcal{O}(k_1, k_2)$ nei casi: $k_1 < 0 < k_2$ e $k_1 < k_2 \leq 0$.

Confrontando, nei vari casi, la regione $\mathcal{O}(k_1, k_2)$ con il segmento $\mathcal{I}(k_1, k_2)$, indicato in grassetto nelle figure (22) e (23), si può rilevare quanto sia relativamente breve la “distanza” fra la condizione necessaria (Teorema 1) e la condizione sufficiente espressa dal criterio del cerchio (Teorema 3); condizione, quest’ultima, che pure discende da un caso particolare ($q = 0$) del criterio di Popov.

8. Di nuovo l’esempio: la stabilità del movimento

Torniamo ad esaminare l’esempio discusso nel Paragrafo 2; vale a dire, il sistema di controllo Σ di Fig.2, ripetuta qui, per comodità, come Fig.24.

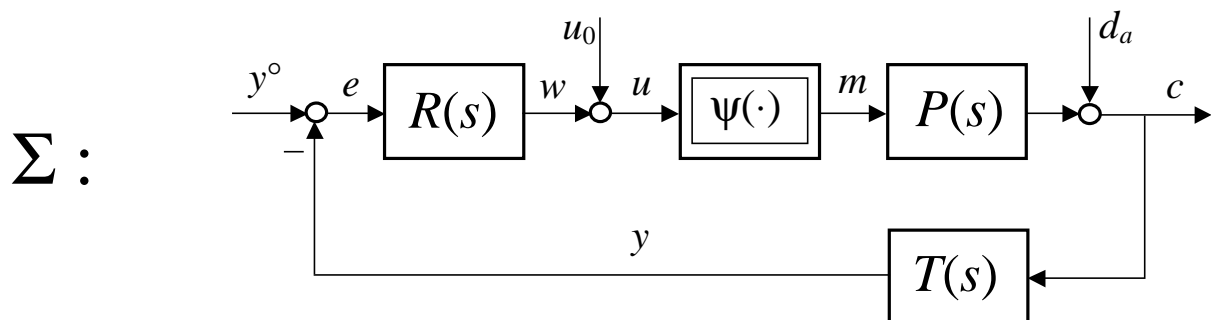


Fig. 24 : Un sistema di controllo.

La caratteristica non lineare $\psi(\cdot)$ dell’attuatore ha l’andamento mostrato in Fig.3. In analogia con quanto fatto nel Paragrafo 2, dove l’attenzione era concentrata sugli stati di equilibrio di Σ , e ricordando che $x := |x_P \ x_T \ x_R|'$, consideriamo ora

un generico movimento $\tilde{x}(\cdot)$ di Σ , forzato dagli ingressi $\tilde{y}^\circ(\cdot)$, \tilde{u}_0 e $\tilde{d}_a(\cdot)$, a partire dallo stato iniziale \tilde{x}_0 . Indichiamo con $\tilde{e}(\cdot)$, $\tilde{w}(\cdot)$, $\tilde{u}(\cdot)$, $\tilde{m}(\cdot)$, $\tilde{c}(\cdot)$ e $\tilde{y}(\cdot)$ gli andamenti delle rispettive variabili in corrispondenza del movimento $\tilde{x}(\cdot)$.

Per studiare la stabilità (alla Liapunov) del movimento $\tilde{x}(\cdot)$, dobbiamo considerare il movimento perturbato $x_p(\cdot)$ prodotto da una variazione dello stato iniziale: $x_0 = \tilde{x}_0 + \Delta x_0$. Indichiamo quindi con $e_p(\cdot)$, $w_p(\cdot)$, $u_p(\cdot)$, $m_p(\cdot)$, $c_p(\cdot)$ e $y_p(\cdot)$ gli andamenti delle rispettive variabili in corrispondenza del movimento perturbato.

Introducendo le nuove variabili: $\Delta x := x_p - \tilde{x}$, $\Delta e := e_p - \tilde{e}$, $\Delta w := w_p - \tilde{w}$, e così via fino a Δc e Δy , è facile pervenire, con argomentazioni simili a quelle svolte nel Paragrafo 2, alla conclusione che, nelle nuove variabili, il sistema Σ assume la forma Σ^* mostrata in Fig.25, dove la caratteristica dell'elemento non lineare continua ad essere quella dell'attuatore presente in Σ , riferita però ad una coppia di assi la cui origine si muove nel tempo con il punto di lavoro (Fig.26).

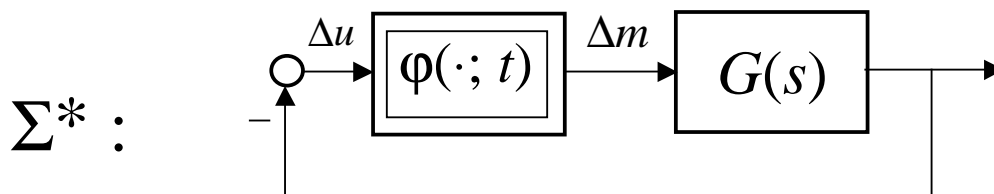


Fig. 25 : Il sistema Σ^* in forma standard.

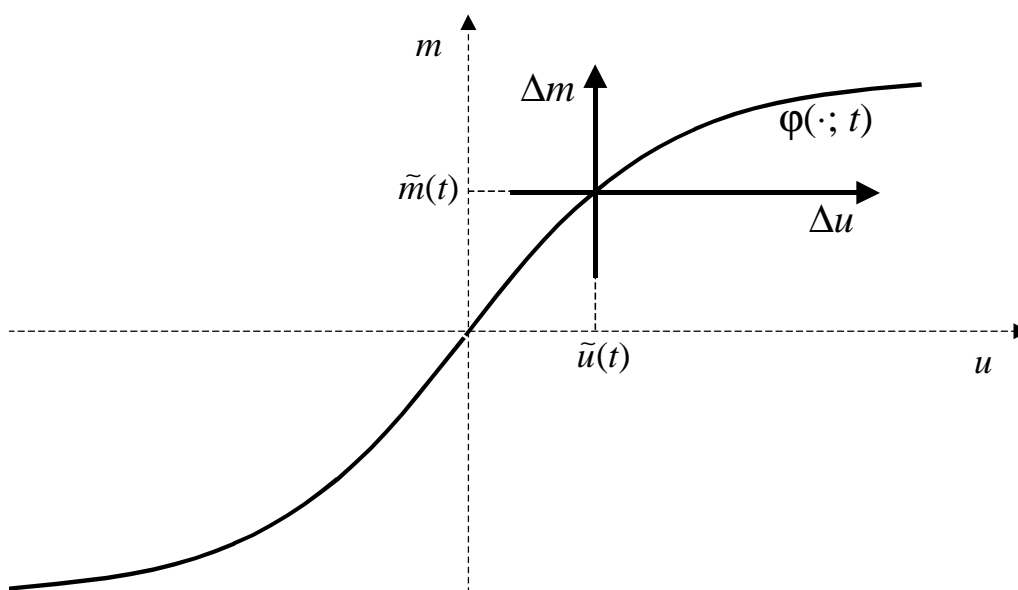


Fig. 26 : La funzione caratteristica $\varphi(\cdot; t)$.

In conclusione, si può affermare che *ogni* movimento $\tilde{x}(\cdot)$ di Σ è (asintoticamente, globalmente) stabile se in Σ^* l'origine dello spazio di stato è uno stato di equilibrio (asintoticamente, globalmente) stabile qualunque sia il possibile andamento nel tempo della caratteristica non lineare $\varphi(\cdot; t)$, la quale per altro, in ogni istante t , dovrà appartenere alla famiglia di curve mostrata in Fig.7 e sarà quindi sempre contenuta nel settore $[k_1, k_2]$. Tutto ciò ci deve portare a considerare con interesse un'estensione al caso tempo-variante del classico problema di Lur'e.

9. Sistema di Lur'e tempo-variante

In questo paragrafo accenneremo brevemente ad alcuni aspetti del problema di Lur'e nel caso tempo-variante (Fig.27). L'elemento non lineare del sistema S è ora descritto da una funzione il cui andamento $\varphi(\cdot; t)$ varia al variare del tempo t ; precisamente:

$$u(t) = \varphi(e(t); t) .$$

La parte lineare del sistema S , ancora privo d'ingressi e quindi libero, continua ad essere, per ipotesi, lineare e tempo-invariante; descritta, cioè, dalla funzione di trasferimento $G(s)$.

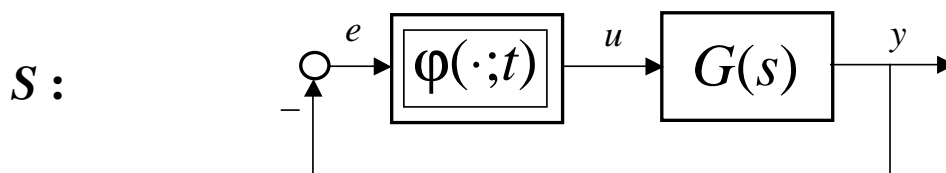


Fig. 27 : Sistema di Lur'e libero e tempo-variante.

L'equazione di stato:

$$S : \quad \dot{x}(t) = A x(t) + B \varphi(-Cx(t); t) = f(x(t); t)$$

consente di verificare immediatamente che, se $\varphi(0; \cdot) \equiv 0$, allora $f(0; \cdot) \equiv 0$ e quindi l'origine $x=0$ dello spazio di stato è uno stato di equilibrio di S , qualunque sia l'istante iniziale t_0 .

Con una leggera estensione della terminologia fin qui adottata, diciamo che $\varphi(\cdot; \cdot)$ è contenuta nel settore $[k_1, k_2]$ se $\varphi(\cdot; t) \in \Phi_{[k_1, k_2]}, \forall t \in \mathbf{R}$. Introduciamo, cioè, la famiglia per così dire allargata di funzioni caratteristiche:

$$\Phi_{[k_1, k_2]}^* := \{ \varphi(\cdot; \cdot) : \varphi(\cdot; t) \in \Phi_{[k_1, k_2]}, \forall t \in \mathbf{R} \} .$$

Naturalmente, l'origine $x=0$ dello spazio di stato è uno stato di equilibrio di S , qualunque sia la caratteristica $\varphi(\cdot; \cdot)$ in $\Phi_{[k_1, k_2]}^*$.

Nelle definizioni di *stabilità*, *stabilità asintotica*, *stabilità globale* di uno stato di equilibrio, le costanti ε e δ nonché il bacino di attrazione B_0 possono dipendere dall'istante iniziale t_0 ; se non ne dipendono, la stabilità dello stato di equilibrio è detta *uniforme*.

Definizione 5

Il sistema di Lur'e tempo-variante S è assolutamente stabile nel settore $[k_1, k_2]$ se $x=0$ è uno stato di equilibrio globalmente uniformemente stabile di S , qualunque sia $\varphi(\cdot; \cdot)$ in $\Phi_{[k_1, k_2]}^*$.

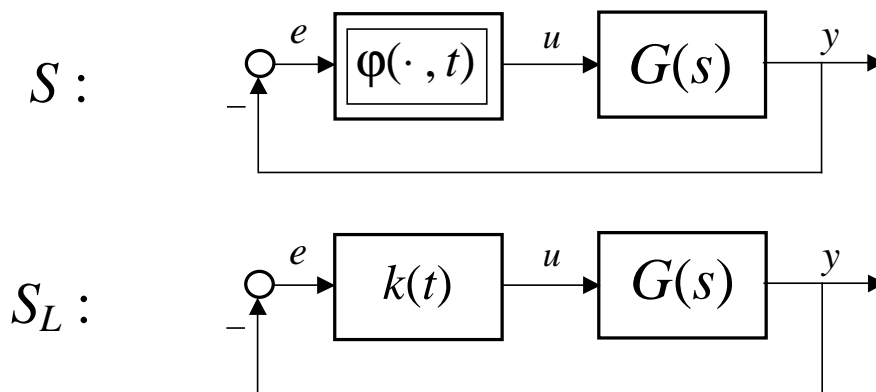


Fig. 28 : Il sistema S di Lur'e tempo-variante e il sistema lineare S_L ad esso associato.

Come nel caso tempo-invariante, associamo al sistema di Lur'e tempo-variante S un sistema lineare S_L ottenuto da S sostituendo (Fig.28) l'elemento non lineare con un blocco lineare tempo-variante (con un "moltiplicatore") di guadagno $k(t)$. L'equazione di stato di S_L è data da:

$$S_L : \quad \dot{x}(t) = A x(t) - B k(t) C x(t) = (A - B k(t) C) x(t) := F(t) x(t) .$$

Infine, con un altro leggero abuso lessicale, diciamo che la funzione $k(\cdot)$ è contenuta nell'intervallo $[k_1, k_2]$ se $k(t) \in [k_1, k_2], \forall t \in \mathbf{R}$. Introduciamo così, indirettamente, la famiglia di segnali $[k_1, k_2]^* := \{k(\cdot) : k(t) \in [k_1, k_2], \forall t \in \mathbf{R}\}$.

Con queste premesse, è sufficiente una breve riflessione per riconoscere che sussiste il risultato seguente.

Teorema 4

Il sistema S è assolutamente stabile nel settore $[k_1, k_2]$ se e solo se il sistema S_L è asintoticamente uniformemente stabile per ogni $k(\cdot)$ in $[k_1, k_2]^*$.



In un certo senso, quindi, si può dire che, nel caso tempo-variante, è vera la congettura di Aizerman, sicché il problema di Lur'e si riduce ad un problema di analisi lineare. Purtroppo, però, gli strumenti disponibili per l'analisi della stabilità di sistemi dinamici lineari *tempo-varianti* sono decisamente più scarsi e meno efficaci di quelli validi nel caso tempo-invariante. Per questo, può essere utile notare che resta valida la condizione necessaria espressa dal Teorema 1, mentre occorre riconoscere che il Teorema 4 non aiuta gran che a formulare, nel caso tempo-variante, nuove e più espressive condizioni sufficienti di assoluta stabilità di S nel settore $[k_1, k_2]$. Fra queste condizioni, resta il criterio di Popov, che però sussiste solo con $q = 0$.

In conclusione, nel caso tempo-variante, il **criterio del cerchio** non solo è la più generale condizione sufficiente di assoluta stabilità nel settore $[k_1, k_2]$ del sistema di Lur'e, ma è anche il risultato più efficace nell'analisi della stabilità asintotica robusta di S_L relativamente a $k(\cdot)$ in $[k_1, k_2]^*$.